УДК 51-8:519.1

ИГРА "УДАЛЕНИЕ ЦИФР" И СВЯЗАННАЯ С НЕЙ ЛАДЕЙНАЯ ИГРА МИЗЕР

© 2012 И.С. Фролов[1]

В работе исследуются свойства, в том числе арифметическая периодичность функции, связанной с игрой "Удаление цифр", а также обратной к ней функции, являющейся функцией Шпрага–Гранди для ладейной игры мизер.

Ключевые слова: игра "Удаление цифр", комбинаторная игра, функция Шпрага–Гранди, арифметическая периодичность.

1. Предварительные сведения

В игре "Удаление цифр", введенной Дж. Конвеем [1, гл. 15, с. 190–192], два игрока, начиная с некоторой заданной строки цифр, по очереди уменьшают любую цифру или удаляют нуль и все следующие за ним цифры. Эта игра рассматривается в книге [1] для иллюстрации понятия *sop*-функции (функции, строго сохраняющей порядок). Данная игра относится к классу беспристрастных комбинаторных игр [2, т. 1, с. 15]. Изложим кратко основные положения теории.

Каждая беспристрастная комбинаторная игра (далее — просто игра) может быть представлена ориентированным графом без циклов $G = (V, E)$, вершины которого V представляют возможные позиции, а дуги E — возможные ходы в игре.

Определение 1. N-позицией называется позиция, в которой существует выигрывающий ход. P-позицией называется позиция, в которой не существует выигрывающих ходов.

Игрок, делающий ход в N-позиции, может выиграть, и для реализации выигрыша ему следует пойти в P-позицию. Таким образом, игра может считаться полностью решенной, если установлены все ее P-позиции.

В *нормальной* игре терминальные позиции считаются P-позициями, однако каждая игра имеет вариант *мизер*, в котором терминальные позиции считаются N-позициями.

Определение 2. Пусть $G = (V, E)$ — игра, $v \in V$ — ее позиция. Множеством опций позиции v называется множество $F(v) = \{v' \in V \mid (v, v') \in E\}$ (F называется функцией следования).

Опция позиции v — это позиция, которая может быть достигнута из v за один ход. Все опции P-позиции суть N-позиции; среди опций N-позиции найдется хотя бы одна P-позиция.

[1]Фролов Илья Сергеевич (xity@yandex.ru), кафедра алгебры и геометрии Самарского государственного университета, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

Определение 3. Функцией Шпрага–Гранди игры $G = (V, E)$ называется функция $g : V \to \mathbb{N}$, определенная формулой

$$g(v) = \operatorname{mex} \{g(v') \mid v' \in F(v)\},$$

где $\operatorname{mex} X = \min(\mathbb{N} \setminus X)$ для любого подмножества $X \subset \mathbb{N}$.

Согласно теореме Шпрага–Гранди [3; 4], множество нулей функции g совпадает с множеством всех P-позиций игры.

Значение $g(v)$ будем называть значением позиции v.

Определение 4. Суммой двух игр $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ называется игра $G = (V, E)$, в которой ходом является выбор игроком одной из игр и совершение в ней хода.

Формально удобно выразить сумму игр $G = G_1 + G_2$ через функции следования своих компонент: положим $V = V_1 \times V_2$, а затем для любой позиции $v = (v_1, v_2) \in V$ положим

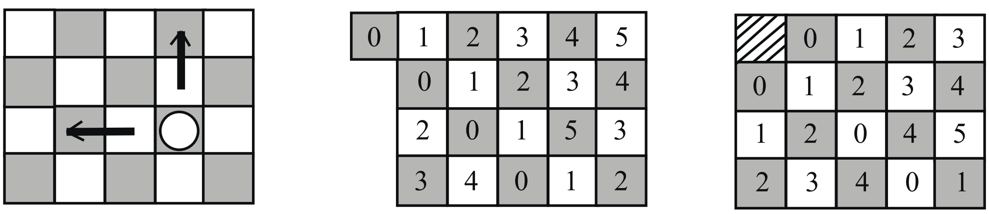
$$F(v) = F_1(v_1) \times \{v_2\} \cup \{v_1\} \times F_2(v_2).$$

Классическим примером игры является *Ним*, или игра с кучами предметов. Ее можно представить в виде суммы игр $H_a + H_b + H_c + \ldots$, где каждая компонента H_n представляет собой кучу из n предметов, а ход в компоненте H_n — взятие любого числа предметов (от 1 до n). Известно, что $g(H_n) = n$,

$$g(H_a + H_b + H_c + \ldots) = a \oplus b \oplus c \oplus \ldots,$$

где $a \oplus b$ — операция побитового сложения mod 2 (без переноса в следующий разряд).

Для иллюстрации рассмотрим игру $H_m + H_n$, которая может быть отождествлена с ладейной игрой. Позиция упомянутой игры (m, n) имеет в качестве опций (m, n') и (m', n), $0 \leqslant n' < n$, $0 \leqslant m' < m$; иначе говоря, данная позиция может быть изображена ладьей на шахматной доске, неограниченной снизу и справа, ход состоит в передвижении ладьи влево или вверх на любое число полей; проигрывает игрок, у которого нет ходов (рис. 1, *а*). Функцию Шпрага–Гранди $g(m, n) = m \oplus n$ в данном случае можно затабулировать (табл. 1, слева).



а *б* *в*

Рис. 1. Ладейная игра: *а* — нормальная; *б* — с добавленным полем; *в* — с запрещенным полем

2. Удаление цифр

Позицией игры "Удаление цифр" является строка десятичных цифр. Ход заключается либо в уменьшении любой цифры, либо в удалении нуля и всех следующих за ним цифр.

Таблица 1

Значения $m \oplus n$ (слева); $f_m : n$ (справа)

$\oplus$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	0	3	2	5	4	7	6
2	2	3	0	1	6	7	4	5
3	3	2	1	0	7	6	5	4
4	4	5	6	7	0	1	2	3
5	5	4	7	6	1	0	3	2
6	6	7	4	5	2	3	0	1
7	7	6	5	4	3	2	1	0

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$f_0 : n$	1	2	3	4	5	6	7	8
$f_1 : n$	0	1	2	3	4	5	6	7
$f_2 : n$	2	0	1	5	3	4	8	6
$f_3 : n$	3	4	0	1	2	7	5	9
$f_4 : n$	4	3	5	0	1	2	9	10
$f_5 : n$	5	6	4	2	0	1	3	11
$f_6 : n$	6	5	7	8	9	0	1	2
$f_7 : n$	7	8	6	9	10	3	0	1

Отметим, что ограничение десятичными цифрами не играет большой роли (что отмечено, например, в [5, с. 9]), и игру можно рассматривать как порядковую сумму игр с кучами $H = H_a : H_b : H_c : \ldots$, где в качестве хода разрешается ход в любой из куч либо удаление пустой кучи со всеми последующими. Если игра H имеет значение x, то добавление слева кучи H_n меняет это значение на $f_n : x$, где функция $f_n : x$ определяется формулами

$$\begin{aligned} f_n : x = {} & \operatorname{mex} \{f_n : x',\, f_{n'} : x \mid 0 \leqslant n' < n,\, 0 \leqslant x' < x\},\ n > 0; \\ f_0 : x = {} & \operatorname{mex} \{f_0 : x',\, 0 \mid 0 \leqslant x' < x\}. \end{aligned} \tag{1}$$

В таком случае значение игры $H_a : H_b : \ldots : H_m$ равно $f_a : (f_b : \ldots : (f_m : 0))$, поскольку для пустой позиции функция Шпрага–Гранди принимает значение 0. Значения функции $f_m : n$ легко затабулировать, используя формулы (1) (см. табл. 1, справа, а также рис. 2, внизу).

Например, значением позиции 618034 является

$$f_6 : f_1 : f_8 : f_0 : f_3 : f_4 : 0 = 1.$$

Чтобы найти ход в P-позицию, имеющую значение 0, проведем вычисления в обратном порядке:

$$\begin{tikzcd} 1 & 6 \arrow[l, "f_6"'] \arrow[dl, "f_7"'] & 6 \arrow[l, "f_1"'] \arrow[dl, "f_3"'] & 3 \arrow[l, "f_8"'] \arrow[dl, "f_2"'] & 2 \arrow[l, "f_0"'] \arrow[dl, "f_{11}"'] & 4 \arrow[l, "f_3"'] \arrow[dl, "f_6"'] & 0 \arrow[l, "f_4"'] \arrow[dl, "f_7"'] \\ 0 & 5 \arrow[l, "f_6"'] & 5 \arrow[l, "f_1"'] & 10 \arrow[l, "f_8"'] & 9 \arrow[l, "f_0"'] & 7 \arrow[l, "f_3"'] & 10 \arrow[l, "f_4"'] \end{tikzcd} \tag{2}$$

Найдем, как изменить каждую цифру, чтобы перейти от верхней последовательности к нижней. Так как лишь одна цифра уменьшается, заключаем, что единственный ход ведет к выигрышу — в 612034.

Из (1) следует, что числа в таблице вычисляются как mex от всех чисел выше и слева, за исключением того, что 0 не должен быть в 0-й строке.

Определение 5. Функция $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ называется арифметически периодической, если найдутся такие период t, сдвиг s и предпериод p, что $\varphi(x+t) = \varphi(x)+s$ при $x \geqslant p$.

Известна арифметическая периодичность первых трех строк таблицы: $f_0 : x = x + 1$, $f_1 : x = x$, $f_2 : x = x +_3 2$ (сложение mod 3), $f_3 : (x + 9) = f_3 : x + 9$ при $x \geqslant 3$.

Целью настоящей работы является исследование арифметической периодичности функции f_n в общем случае.

3. Основные результаты

Таблицу значений функции $f_m : n$ (табл. 1, справа) можно представить как таблицу значений ладейной игры с добавленным полем (рис. 1, *б*). С использованием компьютера найдены периоды и предпериоды функции $f_m : n$ для значений m до 9 включительно (табл. 2, справа).

Таблица 2

Периоды и предпериоды $g(m,n)$ (слева); $f(m,n)$ (справа)

m	t	p	t_m/t_{m-1}	m	t	p	t_m/t_{m-1}
0	1	0	–	0	1	0	–
1	1	0	1	1	1	0	1
2	3	0	3	2	3	0	3
3	9	5	3	3	9	3	3
4	36	10	4	4	36	12	4
5	144	25	4	5	144	22	4
6	720	25	5	6	720	22	5
7	5040	21	7	7	5040	21	7
8	10080	68	2	8	10080	72	2
9	151200	68	15	9	151200	72	15

Далее будем обозначать $f(m,n) = f_m : n$ и введем функцию

$$g(m,n) = k \iff f(m,k) = n, \quad \text{т.е. } g_m = f_m^{-1}$$

(эта функция использовалась в (2) для обратного расчета значений функции Шпрага–Гранди).

Функция $g(m,n)$ обладает следующими свойствами:

(G1) $g(m,n)$ — функция Шпрага–Гранди для ладейной игры мизер. В отличие от нормальной игры проигрывает игрок, поставивший ладью на заштрихованное поле (рис. 1, *в*).

(G2) $g(m,n) = \operatorname{mex} \{g(m',n), g(m,n'), m' < m, n' < n\}$, $m+n > 0$ и $g(0,0) = -1$.

Если ввести обозначения: $R(m,n) = \{g(m,n') \mid 0 \leqslant n' < n\}$ — множество чисел в строке слева от поля (m,n); $C(m,n) = \{g(m',n) \mid 0 \leqslant m' < m\}$ — множество чисел в столбце сверху от поля (m,n), то (рис. 3)

$$g(m,n) = \begin{cases} \operatorname{mex} R(m,n) \cup C(m,n), \ m+n > 0, \\ -1, \ m = n = 0. \end{cases}$$

Таблица начальных значений функции $g(m,n)$, а также (для сравнения) функции $f(m,n)$ приведена ниже, на рис. 2.

(G3) $g(m,n) = g(n,m)$.

(G4) $g(0,n) = n-1, \ g(1,n) = n$.

(G5) $g(n,n) = 0, \ n \geqslant 2$.

(G6) $g(2n,2n-1) = g(2n-1,2n) = 1, \ g(2n,2n+1) = g(2n+1,2n) = 2, \ n \geqslant 2$; исключениями являются $g(0,1) = 0, \ g(1,2) = 2$ и $g(2,3) = 4$; далее на диагоналях, соседних с главной, числа 1 и 2 чередуются: $g(n,n+1) = \frac{3+(-1)^n}{2}$.

(G7) $g(m,n) < m+n$.

(G8) $g(m,n) \geqslant |m-n|, \ n \geqslant 1, \ m \geqslant 1$; или более точно,

(G8a) $g(m,n) \geqslant n-m, \ m \geqslant 1$,

(G8b) $g(m,n) \geqslant m-n, \ n \geqslant 1$.

m\n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
0	-	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
2	1	2	0	4	5	3	7	8	6	10	11	9	13	14	12	16	17	15	19	20	18	22	23
3	2	3	4	0	1	6	8	5	9	7	12	13	10	11	15	17	14	18	16	21	22	19	20
4	3	4	5	1	0	2	9	10	11	6	7	8	14	15	16	12	13	19	20	17	21	18	24
5	4	5	3	6	2	0	1	9	10	11	8	7	15	16	17	13	12	14	21	22	23	24	18
6	5	6	7	8	9	1	0	2	3	4	13	12	16	10	11	18	19	20	14	15	17	23	25
7	6	7	8	5	10	9	2	0	1	3	4	14	17	18	19	11	20	12	13	16	15	25	26
8	7	8	6	9	11	10	3	1	0	2	5	4	18	17	20	19	21	13	12	14	16	15	27
9	8	9	10	7	6	11	4	3	2	0	1	5	19	20	18	21	22	23	15	12	13	14	16
10	9	10	11	12	7	8	13	4	5	1	0	2	3	6	21	20	18	22	23	24	14	16	15
11	10	11	9	13	8	7	12	14	4	5	2	0	1	3	6	22	23	21	24	25	26	17	19
12	11	12	13	10	14	15	16	17	18	19	3	1	0	2	4	5	6	7	8	9	24	26	28
13	12	13	14	11	15	16	10	18	17	20	6	3	2	0	1	4	5	8	7	23	9	27	29
14	13	14	12	15	16	17	11	19	20	18	21	6	4	1	0	2	3	5	9	7	8	10	30
15	14	15	16	17	12	13	18	11	19	21	20	22	5	4	2	0	1	3	6	8	7	9	10
16	15	16	17	14	13	12	19	20	21	22	18	23	6	5	3	1	0	2	4	10	11	7	8
17	16	17	15	18	19	14	20	12	13	23	22	21	7	8	5	3	2	0	1	4	6	11	9
18	17	18	19	16	20	21	14	13	12	15	23	24	8	7	9	6	4	1	0	2	3	5	11
19	18	19	20	21	17	22	15	16	14	12	24	25	9	23	7	8	10	4	2	0	1	3	5
20	19	20	18	22	21	23	17	15	16	13	14	26	24	9	8	7	11	6	3	1	0	2	4
21	20	21	22	19	18	24	23	25	15	14	16	17	26	27	10	9	7	11	5	3	2	0	1
22	21	22	23	20	24	18	25	26	27	16	15	19	28	29	30	10	8	9	11	5	4	1	0

m\n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
2	2	0	1	5	3	4	8	6	7	11	9	10	14	12	13	17	15	16	20	18	19	23	21
3	3	4	0	1	2	7	5	9	6	8	12	13	10	11	16	14	18	15	17	21	22	19	20
4	4	3	5	0	1	2	9	10	11	6	7	8	15	16	12	13	14	19	21	17	18	20	24
5	5	6	4	2	0	1	3	11	10	7	8	9	16	15	17	12	13	14	22	23	24	18	19
6	6	5	7	8	9	0	1	2	3	4	13	14	11	10	18	19	12	20	15	16	17	24	25
7	7	8	6	9	10	3	0	1	2	5	4	15	17	18	11	20	19	12	13	14	16	25	26
8	8	7	9	6	11	10	2	0	1	3	5	4	18	17	19	21	20	13	12	15	14	16	27
9	9	10	8	7	6	11	4	3	0	1	2	5	19	20	21	18	22	23	14	12	13	15	16
10	10	9	11	12	7	8	13	4	5	0	1	2	3	6	20	22	21	24	16	25	15	14	17
11	11	12	10	13	8	9	14	5	4	2	0	1	6	3	7	23	24	21	25	22	26	17	15
12	12	11	13	10	14	15	16	17	18	19	3	0	1	2	4	5	6	7	8	9	23	26	28
13	13	14	12	11	15	16	10	18	17	20	6	3	0	1	2	4	5	8	7	24	9	27	29
14	14	13	15	16	12	17	11	19	20	18	21	6	2	0	1	3	4	5	9	7	8	10	30
15	15	16	14	17	13	12	18	20	19	21	22	7	4	5	0	1	2	3	6	8	10	9	11
16	16	15	17	14	18	13	12	21	22	23	19	20	5	4	3	0	1	2	10	6	7	8	9
17	17	18	16	15	19	14	20	12	13	22	23	21	7	8	5	2	0	1	3	4	6	11	10
18	18	17	19	20	16	21	15	13	12	14	24	22	8	7	6	9	3	0	1	2	4	5	31
19	19	20	18	21	17	22	23	14	15	12	16	24	9	25	8	6	7	4	0	1	2	3	5
20	20	19	21	18	22	23	17	15	14	13	25	16	24	9	10	7	8	6	2	0	1	4	3
21	21	22	20	19	23	18	24	16	25	15	14	17	26	27	9	8	10	11	4	3	0	1	2
22	22	21	23	24	20	19	25	26	16	17	15	18	27	28	29	10	9	30	5	11	3	0	1

Рис. 2. Таблица значений функции $g(m,n)$ (вверху) и $f(m,n)$ (внизу)

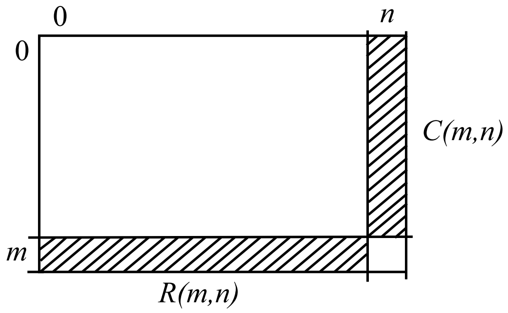


Рис. 3. Множества g-значений в строке и в столбце

Теорема 1. Функция $g(m,n)$ при фиксированном m арифметически периодична по n, начиная с некоторого p:

$$\forall m \ \exists p, t \ \ g(m, n+t) = g(m,n) + t, \ \ n \geqslant p.$$

Доказательство приводится в следующем параграфе. Период t и предпериод p функции $g(m,n)$ зависят от m, и их значения найдены (с использованием компьютерных расчетов) при m от 0 до 9 (табл. 2, слева).

Ввиду того что функции $g(\cdot,\cdot)$ и $f(\cdot,\cdot)$ взаимно обратны по второму аргументу при фиксированном первом, имеется соответствие между свойствами этих функций, что отражено ниже.

Теорема 2. Функция $f(\cdot,\cdot)$ обладает следующими свойствами (вытекающими из соответствующих свойств функции $g(\cdot,\cdot)$, указанных в первой колонке):

$g(\cdot,\cdot)$	$f(\cdot,\cdot)$	
$g(m,n) = g(n,m)$	$f(m,n) = k \iff f(k,n) = m;$	$f(f(m,n),n) = m$
$g(0,n) = n-1$	$f(0,n) = n+1,$	$f(n+1,n) = 0$
$g(1,n) = n$	$f(1,n) = n,$	$f(n,n) = 1$
$g(n,n) = 0,\ n \geqslant 2$	$f(n,0) = n,\ n \geqslant 2$	
$g(2n,2n-1) = 1,\ n \geqslant 2$	$f(2n,1) = 2n-1,$	$f(2n-1,1) = 2n$
$g(2n,2n+1) = 2,\ n \geqslant 2$	$f(2n,2) = 2n+1,$	$f(2n+1,2) = 2n$
$g(m,n) \geqslant n-m,\ m \geqslant 1$	$f(m,n) \leqslant m+n,\ m \geqslant 1$	
$g(m,n) \geqslant m-n,\ n \geqslant 1$	$f(m,n) \geqslant m-n,\ m > n+1$	
$g(m,n) < m+n$	$f(m,n) > n-m$	

Теорема 3. Функция $f(\cdot,\cdot)$ арифметически периодична по второму аргументу при фиксированном первом:

$$\forall m \ \exists p, t \ \ f(m, n+t) = f(m,n) + t, \ \ n \geqslant p.$$

Периоды функций $f(\cdot,\cdot)$ и $g(\cdot,\cdot)$ одинаковы.

4. Доказательства

Докажем свойства функции $g(m,n)$.

(G1) является очевидным следствием (G2).

Доказательство (G2). Пусть $f(m,n) = k$. Докажем, что

$$g(m,k) = \ \operatorname{mex}\ \{g(m',k),\, g(m,k'),\, m' < m,\, k' < k\},\ m+k > 0\,. \tag{3}$$

Поскольку $g(m,k)=n$ означает, что в таблице значений функции $f(m,n)$ в позиции (m,n) стоит число k, равенство (3) равносильно тому, что множество $R^f(m,n)=\{f(m,n') \mid 0 \leqslant n' < n\}$ состоит из чисел двух категорий: $R^f(m,n)= = R_1 \cup R_2$, $R_1 = R^f(m,n) \cap \{x \mid x<n\}$, $R_2 = R^f(m,n) \smallsetminus R_1$, причем для любого $x=f(m,n') \in R_2$ имеет место $k \in C^f(m,n')$.

Действительно, при выполнении последнего условия для каждого $n'<n$ либо $f(m,n') = x \in R_1$ и $n' = g(m,x)$, $x<n$, либо $f(m,n') = x \in R_2$ и, так как $k \in C^f(m,n')$, то $k = f(m',n')$ для некоторого $m'<m$, так что $n' = g(m',k)$, $m'<m$.

Но если $x = f(m,n') \in R^f(m,n)$ и $x>n$, то $k \in C^f(m,n')$ в силу mex-свойства (1) функции $f(m,n)$. $\square$

(G3) $g(m,n)=g(n,m)$ выполняется в силу симметрии относительно m и n в (G2).

(G4) $g(0,n)=n-1$, $g(1,n)=n$ вытекает из следующих очевидных равенств $f(0,n-1)=n$, $f(1,n)=n$.

(G5) $g(n,n)=0$, $n \geqslant 2$ следует из того, что все P-позиции (m,n) ладейной игры (G1), а именно в них $g(m,n)=0$, суть: (0,1), (1,0) и (n,n), $n \geqslant 2$.

Доказательство (G6). Докажем, что $g(k,k+1) = \frac{3+(-1)^k}{2}$ при $k \geqslant 3$.

Обозначим Q_k подтаблицу значений функции $\{g(m,n)\}_{0 \leqslant m \leqslant k, 0 \leqslant n \leqslant k}$. Используем индукцию по k. При $k \geqslant 3$ квадрат Q_k, если k нечетно, содержит ровно одну 2 в каждой строке и в каждом столбце, если же k четно, то — ровно одну 1 в каждой строке и в каждом столбце (в силу предположения индукции).

Таким образом, если k четно, то $2 \notin R(k,k+1) \cup C(k,k+1)$, но 0 и $1 \in R(k,k+ +1)$, поэтому $g(k,k+1)=2$; если же k нечетно, то $1 \notin R(k,k+1) \cup C(k,k+1)$, но $g(k,k)=0$, поэтому $g(k,k+1)=1$. $\square$

Доказательство (G7). Докажем неравенство $g(m,n) < m+n$ индукцией по $m+n$. При $m+n=0$ имеем $g(0,0)=-1$, при $m+n=1$ имеем $g(1,0)=g(0,1)=0$. В общем случае, при $m+n>0$, согласно (G2), $g(m,n) = \operatorname{mex} R(m,n) \cup C(m,n)$. Множества $R(m,n)$ и $C(m,n)$ состоят из элементов $g(m',n')$, для которых $m'+ +n' < m+n$, и поэтому по предположению индукции $g(m',n') < m+n-1$. Следовательно,

$$\operatorname{mex} R(m,n) \cup C(m,n) \leqslant 1 + \max R(m,n) \cup C(m,n) < 1 + (m+n-1). \ \square$$

Доказательство (G8). В силу симметричности $g(m,n)=g(n,m)$ (G3) достаточно доказать, что $g(m,n) \geqslant n-m$ при $m \geqslant 1$.

Используем индукцию по m. При $m=1$ неравенство очевидно.

Пусть $m>1$. По предположению индукции все числа из $C(m,n)$ строго больше $n-m$. Остается показать, что множество $R(m,n)$ содержит все числа от 0 до $n-m-1$. Это утверждение доказывается индукцией по $n \geqslant m$ при фиксированном m. При $n \leqslant m$ это очевидно. Предполагая, что $R(m,n-1) \supset [0,n-m-2]$ и учитывая, что $\min C(m,n-1) > n-m-1$, немедленно заключаем, что либо $g(m,n-1) = n-m-1$, либо $n-m-1$ уже содержится в $R(m,n-1)$. Таким образом, $R(m,n) \supset [0,n-m-1]$, что завершает индуктивный переход и все доказательство. $\square$

Доказательство теоремы 1. Используем индукцию по m. Положим $h(m,n) = g(m,n)-n$. Согласно свойствам (G7) и (G8), $-m \leqslant h(m,n) < m$, так что при фиксированном m последовательность $\{h(m,n)\}_n$ ограничена. Заметим, что арифметическая периодичность функции g по 2-му аргументу равносильна периодичности функции h по тому же аргументу, начиная с некоторого предпериода p: $h(m,n+t)=h(m,n)$, $n\geqslant p$. Период и предпериод зависят от m: $t=t(m)$, $p=p(m)$.

Пусть T — общее кратное чисел $\{t(m')\mid m'<m\}$ такое, что $T\geqslant 2m$, и пусть $P:=\max\{p(m')\mid m'<m\}$. При $k\geqslant P$ отрезки последовательности $\{h(m,n)\}_{n\in[k,k+T-1]}$ суть элементы конечного множества $[-m,m-1]^T$, поэтому они должны повторяться. Пусть, скажем, для некоторых $\tau\geqslant T$ (τ кратно T) и $k\geqslant P$ имеет место равенство

$$h(m,n+\tau)=h(m,n),\ n\in[k,k+T).$$

Тогда и

$$g(m,n+\tau)=g(m,n)+\tau,\ n\in[k,k+T). \tag{4}$$

Покажем, что равенство (4) останется верным при всех $n\geqslant k$. Предположим противное, а именно, что найдется наименьшее $n_0\geqslant k+T$ такое, что $g(m,n_0+\tau)\neq g(m,n_0)+\tau$.

Заметим, что $C(m,n_0+\tau)=C(m,n_0)+\tau$ по предположению индукции, так как τ является арифметическим периодом для всех строк с номерами, меньшими, чем m. В соответствии с выбором $T\geqslant 2m$ имеем

$$R(m,n_0+\tau)\supset[0,n_0-m+\tau)\supset[0,n_0-T+m+\tau)\supset[0,k+m+\tau).$$

Поэтому для любого $x<g(m,n_0)+\tau$ имеем:

если $x<k+m+\tau$, то $x\in R(m,n_0+\tau)$,

а если $x\geqslant k+m+\tau$, то $k+m\leqslant x-\tau<g(m,n_0)$;

следовательно, $x-\tau$ содержится в $C(m,n_0)$ или в $\{g(m,n')\mid k\leqslant n'<n_0\}$ (поскольку при $n'<k$ $g(m,n')<k+m$). Но тогда x содержится в $C(m,n_0+\tau)$ или в $\{g(m,n'+\tau)\mid k\leqslant n'<n_0\}$, так что в любом случае $x\in R(m,n_0+\tau)\cup C(m,n_0+\tau)$. Отсюда вытекает, что

$$g(m,n_0+\tau)=\ \operatorname{mex}\ R(m,n_0+\tau)\cup C(m,n_0+\tau)\geqslant g(m,n_0)+\tau.$$

Для доказательства равенства остается показать, что $x_0:=g(m,n_0)+\tau$ не содержится в $R(m,n_0+\tau)$. Но в противном случае $x_0\in\{g(m,n'+\tau)\mid k\leqslant n'<n_0\}$, поскольку, если бы было $x_0=g(m,\hat n)$ для некоторого $\hat n<k+\tau$, то $x_0<m+\hat n<m+k+\tau$ и тогда $g(m,n_0)<m+k$, но $g(m,n_0)\geqslant n_0-m\geqslant k+T-m\geqslant m+k$ при $T\geqslant 2m$.

Отсюда заключаем, что $x_0-\tau\in\{g(m,n')\mid k\leqslant n'<n_0\}\subset R(m,n_0)$, но $x_0-\tau=g(m,n_0)$ не может содержаться в $R(m,n_0)$. $\square$

Доказательство теоремы 2. Осуществляется прямой проверкой. Например, докажем предпоследнее, $f(m,n)\geqslant m-n$, $m>n+1$.

В силу того что $f(m,n)=k\iff g(m,k)=n$, из неравенства (G8b): $n\geqslant m-k$, $k\geqslant 1$ следует $k\geqslant m-n$, т. е. $f(m,n)\geqslant m-n$, если $f(m,n)\neq 0$, но $f(m,n)=0$ только при $m=n+1$. Таким образом, достаточным условием выполнения неравенства является $m>n+1$. $\square$

Доказательство теоремы 3. Имеем

$$f(m,n+t)=k+t\iff g(m,k+t)=n+t.$$

Так как второе равенство верно, начиная с $k=p_0$, то $f(m,n+t)=k+t$ при $n>\max\limits_{j<p_0}g(m,j)$. $\square$

Литература

[1] Conway J.H. On Numbers and Games. 2nd ed. Natick, MA: A.K. Peters, 2001.

[2] Berlekamp E.R., Conway J.H., Guy R.K. Winning Ways for Your Mathematical Plays. 2nd ed. Wellesley, MA: A.K.Peters, 2001–2004. V. I–IV.

[3] Sprague R. P. Über mathematische Kampfspiele // Tôhoku Mathematical Journal, 1936. V. 41. P. 438–444.

[4] Grundy P.M. Mathematics and Games // Eureka. 1939. V. 2. P. 6–8.

[5] Rice T.A. Greedy quasigroups and combinatorial games // Thesis. Iowa State University, 2004. Ames, IA.

Поступила в редакцию 12/*III*/2012;
в окончательном варианте — 12/*III*/2012.

"DIGITAL DELETION" GAME AND RELATED ROOK GAME MISERE

 I.S. Frolov[2]

In this paper we investigate some properties including ultimate arithmetical periodicity of the function generated with the game "Digital deletion", and also the inverse function which is the Sprague-Grundy function for the misere form of rook game.

Key words: "Digital deletion" game, combinatorial games, Sprague–Grundy function, arithmetical periodicity.

Paper received 12/*III*/2012.
Paper accepted 12/*III*/2012.

[2]Frolov Ilya Sergeyevich (`xity@yandex.ru`), the Dept. of Algebra and Geometry, Samara State University, Samara, 443011, Russian Federation.