УДК 517.521+517.587

ХАОСЫ РАДЕМАХЕРА И МНОГОЧЛЕНЫ БЕРНУЛЛИ

© 2012 Р.С. Суханов[1]

В данной работе доказано, что многочлен Бернулли четного (нечетного) порядка равен аболютно сходящемуся ряду по объединению хаосов Радемахера четных (нечетных) порядков.

Ключевые слова: хаосы Радемахера, многочлены Бернулли, интегрирование сумм Радемахера.

1. Предварительные сведения

Определение 1.1. Последовательность $\{r_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *функций Радемахера* определяется равенствами

$$r_0(x) \equiv 1, r_n(x) = \operatorname{sgn}(\sin(2^n \pi x)).$$

Определение 1.2. *Хаос Радемахера* порядка k — множество всех функций вида $r_{i_1,\ldots,i_k}(x) = r_{i_1}(x) \cdot \ldots \cdot r_{i_k}(x)$, где $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k$.

Хаос Радемахера порядка 0 состоит из одной функции $r_0(x) \equiv 1$. Хаос Радемахера первого порядка — система функций Радемахера.

Определение 1.3. Система функций Уолша $\{w_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ определяется как объединение хаосов Радемахера всех порядков (при этом $w_0(x) \equiv 1$).

Замечание. Существует несколько способов нумерации функций Уолша. Поскольку в данной работе нумерация не играет какой-либо значимой роли, мы не будем на этом вопросе останавливаться.

Целью данной работы является описание многочленов, представимых в виде рядов по системе хаосов Радемахера.

В статье [6] было доказано, что если некоторая аналитическая на $(0;1)$ функция представима почти всюду в виде ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_n r_n(x)$, то

$$f(x) = C(\frac{1}{2} - x) = C \cdot \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i-1} r_i(x)$$

для некоторой константы C.

В статье [4] получено разложение

$$\frac{1}{6} - x + x^2 = \sum_{1 \leqslant i < j < \infty} 2^{-1-i-j} r_{i,j}(x).$$

[1]Суханов Роман Сергеевич (surose@yandex.ru), кафедра функционального анализа и теории функций Самарского государственного университета, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

Автором было замечено, что $x-\frac{1}{2}$ и $x^2-x+\frac{1}{6}$ — многочлены Бернулли $B_1(x)$ и $B_2(x)$, соответственно. Возникает естественный вопрос: можно ли каким-либо похожим образом получить разложение многочленов Бернулли $B_k(x)$ при $k \geqslant 3$? Ответ на этот вопрос дается в теореме 3.1.

2. Многочлены Бернулли

Нам понадобятся определение многочленов Бернулли и некоторые их свойства. Вообще говоря, существует несколько эквивалентных определений многочленов Бернулли. Мы (для удобства) будем использовать определение с помощью производящей функции, данное в [1].

Определение 2.1. *Многочлены Бернулли* $B_n(x)$ образуют последовательность функций, соответствующую производящей функции

$$\frac{te^{tx}}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty} B_n(x)\frac{t^n}{n!}. \tag{2.1}$$

При $x=0$ многочлены Бернулли равны соответствующим числам Бернулли: $B_n(0)=B_n$. Выпишем первые пять многочленов:

$$\begin{aligned}
B_0(x) &\equiv 1,\\
B_1(x) &= x-\frac{1}{2},\\
B_2(x) &= x^2-x+\frac{1}{6},\\
B_3(x) &= x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x,\\
B_4(x) &= x^4-2x^3+x^2-\frac{1}{30}.
\end{aligned}$$

Сформулируем те свойства многочленов Бернулли, которые нам необходимы в дальнейшем, в виде леммы.

Лемма 2.1. Пусть $n \in \mathbf{N}$.

(a) $B_n(1-x)=(-1)^n B_n(x)$;

(b) при $n>1$ $B_n(1)=B_n$;

(c) дифференциальное рекуррентное соотношение: $(B_n(x))'=nB_{n-1}(x)$;

(d) интегральное рекуррентное соотношение:

$$B_n(x)=B_n+n\int_0^x B_{n-1}(t)dt;$$

(e) $\int_0^1 B_n(x)dx=0$.

Доказательство. Равенства (a) и (c) были доказаны в [2; 3], соответственно (b) следует из (a) и того факта, что $B_{n-1}=0$ (см. [5]). Легко видеть, что (d) эквивалентно (c).

Докажем (e).

Пусть сначала $n=2m-1$ при некотором $m \in \mathbf{N}$. Из (a) следует, что $B_{2m-1}\left(\frac{1}{2}\right)=(-1)^{2m-1}B_{2m-1}\left(\frac{1}{2}\right)=0$. Произведя в интеграле $\int_0^1 B_{2m-1}(x)dx$ замену $x=1-t$, получим $\int_0^1 B_{2m-1}(x)dx=(-1)^{2m-1}\int_0^1 B_{2m-1}(t)dt=0$.

Пусть теперь $n=2m$ при некотором $m \in \mathbf{N}$. Тогда

$$\int_0^1 B_{2m}(x)dx=\int_0^{1/2} B_{2m}(x)dx+\int_{1/2}^1 B_{2m}(x)dx.$$

Произведем во втором интеграле замену $x = 1 - t$ и ввиду (a) получим:

$$\int_0^1 B_{2m}(x)dx = 2\int_0^{1/2} B_{2m}(x)dx = \frac{2}{2m+1}\left(B_{2m+1}\left(\frac{1}{2}\right) - B_{2m+1}\right) = 0.$$

3. Основные результаты

Первая теорема дает ответ на "естественный" вопрос, поставленный в разд. 1.

Теорема 3.1. Многочлен Бернулли $B_k(x)$ представлен в виде абсолютно сходящегося ряда по объединению хаосов Радемахера порядков $\leqslant k$, притом одной четности с k.

Вторая теорема показывает, что связь между хаосами Радемахера и многочленами Бернулли более глубокая.

Теорема 3.2. (1) Следующие условия эквивалентны:

(1a) Многочлен $p(x)$ разлагается в ряд по хаосам Радемахера порядков $1, 3, \ldots, n = 2k - 1$, где $k \in \mathbf{N}$.

(1b) Существуют такие константы $a_1, \ldots, a_{2k-1}$, что

$$p(x) = \sum_{j=1}^{k} a_{2j-1}B_{2j-1}(x). \tag{3.1}$$

(2) Следующие условия эквивалентны:

(2a) Многочлен $p(x)$ разлагается в ряд по хаосам Радемахера порядков $0, 2, \ldots, n = 2k$, где $k \in \mathbf{N}$.

(2b) Существуют такие константы $a_0, a_2, \ldots, a_{2k}$, что

$$p(x) = \sum_{j=0}^{k} a_{2j}B_{2j}(x). \tag{3.2}$$

4. Доказательства

Известны следующие разложения первых многочленов Бернулли, связанные с системой Радемахера:

$$\begin{array}{rcl} B_0(x) & = & 1, \\ B_1(x) & = & -\sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i-1}r_i(x), \\ B_2(x) & = & \sum_{1\leqslant i<j<\infty} 2^{-1-i-j}r_{i,j}(x). \end{array} \tag{4.1}$$

Формула для $B_1(x)$ и $B_2(x)$ получена, как было сказано ранее, в [4; 6], соответственно, но в обеих работах не шла речь о многочленах Бернулли.

Здесь и далее символом $[\cdot]$ будем обозначать целую часть числа, символом $\{\cdot\}$ — дробную часть числа.

Нам потребуется два вспомогательных утверждения.

Предложение 4.1. Для почти всех $x \in [0;1]$ (кроме, быть может, двоично-рациональных точек) выполняется равенство

$$\int_0^x r_i(t)dt = 2^{-1-i} - \sum_{j=i+1}^{\infty} 2^{-1-j}r_{i,j}(x). \tag{4.2}$$

Доказательство. Произведем в интеграле замену $u = 2^{i-1}t$ и получим

$$\int_0^x r_i(t)dt = \int_0^{2^{i-1}x} r_i(2^{1-i}u)d(2^{1-i}u) = 2^{1-i}\int_0^{2^{i-1}x} r_1(u)du =$$

$$= 2^{1-i}\int_{[2^{i-1}x]}^{2^{i-1}x} r_1(u)du = 2^{1-i}\int_0^{\{2^{i-1}x\}} r_1(u)du.$$

Таким образом, задача свелась к подсчету интеграла $\int_0^x r_1(t)dt$. Легко проверить, что

$$\int_0^x r_1(t)dt = \begin{cases} x, & x \leqslant \frac{1}{2} \\ 1-x, & x > \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Используя вторую формулу из (4.1), получаем, что при $i = 1$ сумма справа в формуле (4.2) равна

$$\sum_{j=2}^{\infty} 2^{-1-j} r_{1,j}(x) = r_1(x) \cdot \sum_{j=2}^{\infty} 2^{-1-j} r_j(x) =$$

$$r_1(x) \cdot B_1(2x) = \begin{cases} \frac{1}{4} - x, & x \leqslant \frac{1}{2} \\ x - \frac{3}{4}, & x > \frac{1}{2} \end{cases}, \tag{4.3}$$

где многочлен $B_1(x)$ считается продолженным за границы интервала $(0;1)$ по периодичности. Тем самым при $i = 1$ равенство (4.2) выполнено.

В общем случае получаем

$$\int_0^x r_i(t)dt = 2^{1-i}\left(2^{-2} - \sum_{j=2}^{\infty} 2^{-1-j} r_{1,j}(\{2^{i-1}x\})\right) =$$

$$= 2^{1-i}\left(2^{-2} - \sum_{j=2}^{\infty} 2^{-1-j} r_{1,j}(2^{i-1}x)\right) = 2^{1-i}\left(2^{-2} - \sum_{j=2}^{\infty} 2^{-1-j} r_{i,i-1+j}(x)\right) =$$

$$= 2^{-1-i} - \sum_{j=i+1}^{\infty} 2^{-1-j} r_{i,j}(x).$$

Лемма 4.1.

$$\forall x > 0\, \forall 1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \int_0^x \prod_{j=1}^{k} r_{i_j}(t)dt = \prod_{j=1}^{k-1} r_{i_j}(x) \cdot \int_0^x r_{i_k}(t)dt. \tag{4.4}$$

Доказательство. На любом двоично-рациональном интервале $\Delta^n_{i_k-1}$ порядка $i_k - 1$ функции r_{i_j}, $1 \leqslant j \leqslant k-1$ являются константами, а функция r_{i_k} равна 1 на левой половине интервала и -1 — на правой, следовательно,

$$\int_{\Delta^n_{i_k-1}} \prod_{j=1}^{k} r_{i_j}(t)dt = 0.$$

Тогда при некотором n (зависящем от x)

$$\int_0^x \prod_{j=1}^{k} r_{i_j}(t)dt = \int_{n2^{1-i_k}}^x \prod_{j=1}^{k} r_{i_j}(t)dt =$$

$$= \prod_{j=1}^{k-1} r_{i_j}(x) \cdot \int_{n2^{1-i_k}}^x r_{i_k}(t)dt = \prod_{j=1}^{k-1} r_{i_j}(x) \cdot \int_0^x r_{i_k}(t)dt.$$

Теперь мы можем доказать теорему 3.1.

Доказательство теоремы 3.1.

Доказательство будем вести индукцией по k.

Для $k \in \{0, 1, 2\}$ разложения известны. Абсолютная сходимость устанавливается подсчетом суммы модулей коэффициентов.

Заметим, что, используя представление функции Уолша $w_n(x)$ в виде произведения некоторых функций Радемахера

$$w_n(x) = \prod_{j=1}^{m} r_j(x), \tag{4.5}$$

предложение 4.1 и лемму 4.1, можно получить значение интеграла $\int_0^x w_n(t)dt$ в явном виде.

Пусть разложение многочлена $B_k(x)$ записано в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n w_n(x). \tag{4.6}$$

Предположим, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится.

Чтобы получить аналогичные условия для $B_{k+1}(x)$, мы будем использовать свойство (d) леммы 2.1. Поскольку все функции Уолша интегрируемы, ряд (4.6) можно интегрировать почленнно

$$B_{k+1}(x) = B_{k+1} + (k+1)\int_0^x B_k(t)dt =$$

$$= B_{k+1} + (k+1)\int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} a_n w_n(t)dt = B_{k+1} + (k+1)\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \int_0^x w_n(t)dt.$$

Оценим сумму модулей коэффициентов полученного ряда.

Пусть функция w_n представлена в виде (4.5). Тогда интеграл от нее равен

$$\int_0^x w_n(t)dt = \int_0^x \prod_{1 \leqslant j \leqslant m} r_{i_j}(t)dt = \prod_{1 \leqslant j \leqslant m-1} r_{i_j}(x) \int_0^x r_{i_m}(t)dt =$$

$$= \prod_{1 \leqslant j \leqslant m-1} r_{i_j}(x) \left(2^{-1-i_m} - \sum_{l=i_m+1}^{\infty} 2^{-1-l} r_{i_m,l}(x) \right). \tag{4.7}$$

Оценим сумму модулей коэффициентов данного ряда:

$$2^{-1-i_m} + \sum_{l=i_m+1}^{\infty} 2^{-1-l} = 2^{-1-i_m} 2 \leqslant \frac{1}{2}.$$

Поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ абсолютно сходится по предположению, первая часть теоремы доказана.

Из формулы (4.7) видно, что интеграл от функции, принадлежащей хаосу порядка k, разлагается в ряд по хаосам порядков $k-1$ и $k+1$. Отсюда и из (4.1) получаем вторую часть утверждения.

Заметим, что из свойства (e) леммы 2.1 следует, что в разложении многочлена $B_k(x)$ свободная константа равна нулю при $k > 0$.

Замечание. В доказательстве получено более сильное условие, чем сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n w_n(x)|$ (в обозначениях формулы (4.6)), а именно абсолютная сходимость ряда из коэффициентов $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$.

Из теоремы 3.1 легко выводятся следующие утверждения.

Следствие 4.3. Пусть $n, m \in \mathbf{N}$ — числа разной четности. Многочлены Бернулли $B_n(x)$ и $B_m(x)$ ортогональны в пространстве $L_2(0;1)$.

Замечание. Непосредственным подсчетом можно убедиться, что если $n, m \in \mathbf{N}$ — числа одной четности, то интеграл $\int_0^1 B_n(x) B_m(x) dx$ не равен нулю.

Следствие 4.4. В объединении хаосов порядков $\leqslant k$ содержатся многочлены всех степеней $\leqslant k$.

В связи со следствием 4.4 возникает вопрос: содержатся ли в объединении хаосов порядков $\leqslant k$ многочлены более высоких степеней? Следующая лемма дает отрицательный ответ на этот вопрос.

Лемма 4.2. Многочлен степени $k > 0$ не разлагается в ряд по системе хаосов Радемахера порядков $< k$.

Доказательство. При $k = 1$ утверждение очевидно.

Пусть многочлен $p(x)$ степени $k > 1$ допускает разложение в ряд по системе хаосов Радемахера порядков $< k$:

$$p(x) = a_0 + \sum_{l=1}^{d=k-1} \sum_{i_1 < \ldots < i_l} a_{i_1, \ldots i_l} r_{i_1, \ldots i_l}(x). \tag{4.8}$$

С другой стороны, представляя $p(x)$ в виде суммы многочленов Бернулли:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{k} b_i B_i(x)$$

и используя теорему 3.1, получаем разложение $p(x)$ в ряд по системе хаосов порядков $\leqslant k$:

$$p(x) = c_0 + \sum_{l=1}^{d=k-1} \sum_{i_1 < \ldots < i_l} c_{i_1, \ldots i_l} r_{i_1, \ldots i_l}(x). \tag{4.9}$$

Из формул (4.1) и (4.4) выводится с использованием индукции, что $c_{1,2,\ldots,k} \neq 0$.

Из разложения (4.8) следует, что

$$\int_0^1 p(x) \cdot r_{1,2,\ldots,k} dx = \int_0^1 \left[a_0 + \sum_{l=1}^{d=k-1} \sum_{i_1 < \ldots < i_l} a_{i_1, \ldots i_l} r_{i_1, \ldots i_l}(x) \right] \cdot r_{1,2,\ldots,k} dx = 0,$$

а из (4.9)

$$\int_0^1 p(x) \cdot r_{1,2,\ldots,k} dx =$$

$$\int_0^1 \left[c_0 + \sum_{l=1}^{k} \sum_{i_1 < \ldots < i_l} c_{i_1, \ldots i_l} r_{i_1, \ldots i_l}(x) \right] \cdot r_{1,2,\ldots,k} dx = c_{1,2,\ldots,k} \neq 0.$$

Полученное противоречие доказывает лемму.

Теперь все готово для доказательства центрального результата данной статьи — теоремы 3.2.

Доказательство теоремы 3.2. При $n = 0$ утверждение теоремы очевидно.

При $n = 1$ утверждение доказано в [6] для аналитической функции $p(x)$, а любой многочлен является аналитической функцией.

Пусть $n > 1$ нечетно (при четном n доказательство аналогично). (1a) непосредственно следует из (1b) и теоремы 3.1. Из леммы 4.2 следует, что степень $p(x)$ не превосходит n.

Выберем константу a_{2k-1} таким образом, что $p(x) = a_{2k-1}B_{2k-1}(x) + p_1(x)$ и степень многочлена $p_1(x)$ не превосходит $2k - 2$.

Далее выберем константу a_{2k-2} таким образом, что $p_1(x) = a_{2k-2}B_{2k-2}(x) + p_2(x)$ и степень многочлена $p_2(x)$ не превосходит $2k - 3$. Поскольку многочлен $p(x)$ разлагается в ряд по системе хаосов Радемахера нечетных порядков, а многочлен $B_{2k-2}(x)$ — четных, константа a_{2k-2} равна нулю.

Аналогичным образом выбираются константы a_{2k-3}, a_{2k-4} и показывается, что $a_{2k-4} = 0$.

Продолжая этот процесс далее по индукции, мы определим все требуемые константы $a_{2k-1}, \ldots, a_1$.

Литература

[1] Abramowitz M., Stegun I.A. Bernoulli and Euler Polynomials and the Euler-Maclaurin Formula // Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. 9th printing. New York: Dover, 1972. P. 804–806.

[2] Appell P.E. Sur une classe de polynomes // Annales d'Ecole Normal Superieur, 1882. Ser 2. № 9. P. 119–144.

[3] Lehmer D.H. A New Approach to Bernoulli Polynomials // Amer. Math. Monthly. 1988. № 95. P. 905–911.

[4] Лыков К.В., Морозова Т.А., Суханов Р,С. Структура непрерывных функций в линейной оболочке хаосов Радемахера // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2008. № 65 (6). С. 123–138.

[5] Прасолов В.В. Многочлены М.: МЦНМО. 2003. 336 с.

[6] Стечкин С.Б., Ульянов П.Л. О множествах единственности // Известия АН СССР. Сер: Математическая. 1962. № 26. С. 211–222.

Поступила в редакцию 12/*III*/2012;
в окончательном варианте — 12/*III*/2012.

RADEMACHER CHAOSES AND BERNOULLI POLYNOMIALS

© 2012 R.S. Sukhanov[2]

In this paper we prove that any Bernoulli polynomial of even (odd) order is an absolutely convergent series of functions from some Rademacher chaoses, each of them is of even (odd) order.

Key words: Rademacher chaoses, Bernoulli polynomials, integration of Rademacher sums.

Paper received 12/*III*/2012.
Paper accepted 12/*III*/2012.

[2]Sukhanov Roman Sergeevich (surose@yandex.ru), the Dept. of Functional Analysis and Theory of Functions, Samara State University, Samara, 443011, Russian Federation.