УДК 512.572

КОММУТАТИВНЫЕ АЛГЕБРЫ ЛЕЙБНИЦА — ПУАССОНА ПОЛИНОМИАЛЬНОГО РОСТА[1]

© 2012 С.М. Рацеев[2]

В работе рассматриваются коммутативные алгебры Лейбница — Пуассона, которые являются обобщениями алгебр Пуассона. Показано, что рост любого многообразия коммутативных алгебр Лейбница — Пуассона V над произвольным полем либо ограничен полиномом, либо не ниже экспоненциального с показателем 2. Показана конечная базируемость многообразий коммутативных алгебр Лейбница — Пуассона полиномиального роста в случае основного поля нулевой характеристики. Также приводится многообразие коммутативных алгебр Лейбница — Пуассона почти полиномиального роста.

Ключевые слова: алгебра Пуассона, коммутативная алгебра Лейбница — Пуассона, многообразие алгебр, рост многообразия.

Введение

На протяжении всей работы, если это специально не оговорено, основное поле K считается произвольным. Определим коммутативную алгебру Лейбница — Пуассона следующим образом. Алгебру $A = A(+, \cdot, \{,\}, K)$ над полем K назовем коммутативной алгеброй Лейбница — Пуассона, если $A(+, \cdot, K)$ — ассоциативная коммутативная алгебра с единицей, $A(+, \{,\}, K)$ — алгебра Лейбница с операцией умножения $\{,\}$ и для любых $a, b, c \in A$ выполняются правила:

$$\begin{aligned} \{a \cdot b, c\} &= a \cdot \{b, c\} + \{a, c\} \cdot b, \\ \{c, a \cdot b\} &= a \cdot \{c, b\} + \{c, a\} \cdot b. \end{aligned} \tag{1}$$

При этом алгебра Лейбница $A(+, \{,\}, K)$ над полем K определяется тождеством

$$\{\{x, y\}, z\} = \{\{x, z\}, y\} + \{x, \{yz\}\},$$

то есть правое умножение на элемент алгебры является дифференцированием. Если в алгебре Лейбница выполнено тождество

$$\{x, x\} = 0, \tag{2}$$

то она является алгеброй Ли, то есть любая алгебра Ли является, в частности, алгеброй Лейбница.

[1]Работа частично поддержана грантом РФФИ 10-01-00209-а.

[2]Рацеев Сергей Михайлович (RatseevSM@rambler.ru), кафедра информационной безопасности и теории управления Ульяновского государственного университета, 432700, Российская Федерация, г. Ульяновск, ул. Льва Толстого, 42.

Из сказанного следует, что если в коммутативной алгебре Лейбница — Пуассона выполнено тождество (2), то данная алгебра будет являться алгеброй Пуассона. В дальнейшем под фразой "алгебра Лейбница — Пуассона" будет подразумеваться коммутативная алгебра Лейбница — Пуассона.

В данной работе исследуются алгебры Лейбница — Пуассона полиномиального роста. В частности, будет показано, что такие алгебры наследуют ряд свойств ассоциативных алгебр, которые подробно изучены в работах [1; 2].

Договоримся опускать скобки $\{,\}$ при их левонормированной расстановке, то есть

$$\{\{\{x_1,x_2\},x_3\},...,x_n\}=\{x_1,x_2,...,x_n\}.$$

Пусть $L(X)$ — свободная алгебра Лейбница с умножением [,], где $X = \{x_1,x_2,...\}$ — счетное множество свободных образующих. Пусть также $F(X)$ — свободная алгебра Лейбница — Пуассона. Обозначим через P_n пространство в $F(X)$, состоящее из полилинейных элементов степени n от переменных $x_1,...,x_n$, а через P_n^L пространство полилинейных элементов степени n в свободной алгебре Лейбница $L(X)$.

Предложение 1. Базис пространства P_n состоит из всех элементов вида

$$x_{k_1}\cdot ...\cdot x_{k_r}\cdot\{x_{i_1},...,x_{i_s}\}\cdot ...\cdot\{x_{j_1},...,x_{j_t}\}, \tag{3}$$

для каждого из которых выполнены следующие условия:

(i) $r\geqslant 0,\ k_1<...<k_r$;

(ii) каждая из переменных x_1,...,x_n встречается в (3) ровно один раз;

(iii) каждый множитель $\{x_{i_1},...,x_{i_s}\}$,..., $\{x_{j_1},...,x_{j_t}\}$ в (3) левонормирован и имеет длину $\geqslant 2$;

(iv) множители в (3) упорядочены по длине: $s\leqslant ...\leqslant t$;

(v) если два соседних множителя в (3), являющиеся скобками $\{,\}$, имеют одинаковую длину

$$...\cdot\{x_{p_1},...,x_{p_s}\}\cdot\{x_{q_1},...,x_{q_s}\}\cdot ...,$$

то $p_1<q_1$.

Доказательство. Понятно, что пространство P_n является линейной оболочкой элементов вида (3) с условиями (i)–(v). Для доказательства линейной независимости данных элементов рассмотрим следующие конструкции алгебр Лейбница и алгебр Лейбница — Пуассона.

Пусть A_L — некоторая алгебра Ли с умножением $[,]$. Определим на множестве $A=A_L\times A_L$ операции $+$ и $[,]$ следующим образом:

$$\begin{aligned}(x_1,x_2)+(y_1,y_2)&=(x_1+y_1,x_2+y_2),\\ [(x_1,x_2),(y_1,y_2)]&=([x_1,y_1],[x_2,y_1]),\end{aligned} \tag{4}$$

где $(x_1,x_2),(y_1,y_2)\in A$. Нетрудно проверить, что полученная алгебра A будет являться алгеброй Лейбница.

Пусть A — некоторая алгебра Лейбница с умножением $[,]$ над полем K. Пусть $v_1,v_2,...$ — линейный базис пространства A над K. Рассмотрим коммутативное кольцо полиномов $K[v_1,v_2,...]$. Скобки $\{,\}$ для элементов v_i определим как умножение в A: $\{v_i,v_j\}=[v_i,v_j]$. Распространим скобки $\{,\}$ на все $K[v_1,v_2,...]$, используя линейность и правила (1). Построенная таким образом алгебра будет являться алгеброй Лейбница — Пуассона, которую обозначим через $LPS(A)$.

Покажем линейную независимость элементов вида (3) с условиями (i)–(v). Предположим, что для некоторого N данные элементы линейно зависимы. Тогда будет выполнено нетривиальное линейное соотношение вида

$$\sum \alpha_{k_1\dots k_r i_1\dots i_s\dots j_1\dots j_t} x_{k_1}\cdot\dots\cdot x_{k_r}\cdot\{x_{i_1},\dots,x_{i_s}\}\cdot\dots\cdot\{x_{j_1},\dots,x_{j_t}\}=0,$$

где не все коэффициенты поля K равны нулю. Выберем такое максимальное значение r, при котором $\alpha_{k_1\dots k_r i_1\dots i_s\dots j_1\dots j_t}\neq 0$. После подстановки вместо переменных x_{k_1},...,x_{k_r} единицы получаем линейное соотношение

$$\sum \beta_{i_1\dots i_s\dots j_1\dots j_t}\{x_{i_1},\dots,x_{i_s}\}\cdot\dots\cdot\{x_{j_1},\dots,x_{j_t}\}=0, \tag{5}$$

в котором не все $\beta_{i_1\dots i_s\dots j_1\dots j_t}$ равны нулю. В (5) выберем слагаемое с максимальным количеством множителей вида

$$\{\dots\}\cdot\dots\cdot\{\dots\}$$

относительно операции $\cdot$ и ненулевым коэффициентом β. Без ограничения общности можно считать, что данное слагаемое имеет такой вид:

$$\{x_1,\dots,x_{a_1}\}\cdot\{x_{a_1+1},\dots,x_{a_1+a_2}\}\cdot\dots\cdot\{x_{a_1+\dots+a_{k-1}+1},\dots,x_n\},$$

где $n = N - r$. Пусть UT_n — алгебра верхнетреугольных матриц порядка n, $[UT_n]$ — алгебра Ли с операцией коммутирования [,]. Пусть $U_n = [UT_n]\times[UT_n]$ — алгебра Лейбница с операциями (4). Рассмотрим алгебру Лейбница — Пуассона $LPS(U_n)$. В равенстве (5) сделаем такую подстановку:

$$x_1\to(0,e_{11}),\quad x_2\to(e_{12},0),\dots,\ x_{a_1}\to(e_{a_1-1,a_1}),$$

$$x_{a_1+1}\to(0,e_{a_1+1,a_1+1}),\ x_{a_1+2}\to(e_{a_1+1,a_1+2},0),\dots,\ x_{a_1+a_2}\to(e_{a_1+a_2-1,a_1+a_2},0),$$

$$\dots$$

$$x_{a_1+\dots+a_{k-1}+1}\to(0,e_{a_1+\dots+a_{k-1}+1,a_1+\dots+a_{k-1}+1}),$$

$$x_{a_1+\dots+a_{k-1}+2}\to(e_{a_1+\dots+a_{k-1}+1,a_1+\dots+a_{k-1}+2},0),\dots,$$

$$x_n\to(e_{n-1,n},0),$$

где e_{ij} — матричные единички. В результате получится, что в алгебре Лейбница — Пуассона $LPS(U_n)$ элемент

$$(0,e_{1a_1})\cdot(0,e_{a_1+1,a_2})\cdot\dots\cdot(0,e_{a_1+\dots+a_{k-1}+1,n})$$

равен нулю, что, конечно же, не так. Противоречие. Предложение доказано.

1. Собственное подпространство в P_n

Обозначим через Γ_n подпространство в P_n, являющееся линейной оболочкой элементов вида

$$\{x_{i_1},\dots,x_{i_s}\}\cdot\dots\cdot\{x_{j_1},\dots,x_{j_t}\},\qquad s\geqslant 2,\dots,\ t\geqslant 2. \tag{6}$$

Тогда из сказанного выше следует, что базисом пространства Γ_n будут являться все элементы вида (6) с условиями (ii)–(v) из предложения 1.

Предложение 2. Для любого натурального числа n будет выполнено равенство

$$dim\ P_n = 1+\sum_{k=2}^{n} C_n^k\cdot dim\ \Gamma_k, \tag{7}$$

где C_n^k — число сочетаний из n по k.

Пусть V — некоторое многообразие алгебр Лейбница — Пуассона (все необходимые сведения о многообразиях PI-алгебр можно найти, например, в монографиях [1; 3]). Пусть $Id(V)$ — идеал тождеств многообразия V. Обозначим

$$P_n(V) = P_n/(P_n \cap Id(V)), \quad \Gamma_n(V) = \Gamma_n/(\Gamma_n \cap Id(V)),$$

$$c_n(V) = dim\ P_n(V), \quad \gamma_n(V) = dim\ \Gamma_n(V), \quad \gamma_n = dim\ \Gamma_n.$$

Предложение 3. Пусть элементы

$$u_s^n(x_1, ..., x_n), \ \ s = 1, ..., \gamma_n, \tag{8}$$

образуют базис пространства Γ_n, $n \geqslant 0$. Тогда полилинейные элементы от переменных $x_1, ..., x_n$ вида

$$\begin{gathered} x_{i_1} \cdot ... \cdot x_{i_{n-k}} \cdot u_s^k(x_{j_1}, ..., x_{j_k}), \\ k = 0, ..., n, \quad s = 1, ..., \gamma_k, \quad i_1 < ... < i_{n-k}, \quad j_1 < ... < j_k, \end{gathered} \tag{9}$$

будут образовывать базис пространства P_n.

Доказательство. Сначала покажем, что элементы вида (9) линейно независимы в P_n. Предположим противное. Пусть выполнено нетривиальное линейное соотношение

$$\sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n, \ \ 1 \leqslant s \leqslant \gamma_k, \\ 1 \leqslant j_1 < ... < j_k \leqslant n}} \alpha_{j_1 ... j_k}^{k,s} x_{i_1} \cdot ... \cdot x_{i_{n-k}} \cdot u_s^k(x_{j_1}, ..., x_{j_k}) = 0. \tag{10}$$

Выберем такое минимальное значение k, при котором $\alpha_{j_1 ... j_k}^{k,s} \neq 0$. Подставим в этом случае вместо переменных $x_{i_1}, ..., x_{i_{n-k}}$ единицу. Тогда из (10) будет следовать такое нетривиальное линейное соотношение:

$$\sum_{s=1}^{\gamma_k} \beta_s u_s^k(x_{j_1}, ..., x_{j_k}) = 0,$$

где не все β_s равны 0, что противоречит линейной независимости элементов (8) при $n = k$.

Далее, так как число элементов вида (9) равно числу $1 + \sum_{k=2}^n C_n^k \cdot \gamma_k$, то с учетом равенства (7) получаем, что элементы (9) образуют базис пространства P_n. Предложение доказано.

Предложение 4. Пусть V — некоторое многообразие алгебр Лейбница — Пуассона и пусть элементы

$$u_s^n(x_1, ..., x_n), \ \ s = 1, ..., \gamma_n(V), \tag{11}$$

образуют базис пространства $\Gamma_n(V)$, $n \geqslant 0$. Тогда

(i) полилинейные элементы от переменных $x_1, ..., x_n$ вида

$$\begin{gathered} x_{i_1} \cdot ... \cdot x_{i_{n-k}} \cdot u_s^k(x_{j_1}, ..., x_{j_k}), \\ k = 0, ..., n, \quad s = 1, ..., \gamma_k(V), \quad i_1 < ... < i_{n-k}, \quad j_1 < ... < j_k, \end{gathered} \tag{12}$$

будут образовывать базис пространства $P_n(V)$;

(ii) $\qquad c_n(V) = 1 + \sum_{k=2}^n C_n^k \cdot \gamma_k(V)$.

Доказательство. (i) Доказательство линейной независимости элементов вида (12) аналогично доказательству линейной независимости элементов вида (9) в предложении 3. Поэтому остается показать, что любой элемент из $P_n(V)$ линейно выражается через элементы вида (12). Пусть $f(x_1, ..., x_n) \in P_n(V)$.

Дополним элементы (11) при $n = k$ до базиса пространства $\Gamma_k,\ k = 0, ..., n$:

$$u_s^k(x_1, ..., x_k),\ \ v_t^k(x_1, ..., x_k),\ \ s = 1, ..., \gamma_k(V),\ \ t = 1, ..., \gamma_k - \gamma_k(V).$$

Тогда из предложения 3 следует, что элемент $f(x_1, ..., x_n)$ представим в виде следующей линейной комбинации:

$$f(x_1, ..., x_n) = \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n,\ 1\leqslant s\leqslant \gamma_k(V), \\ 1\leqslant j_1<\ldots<j_k\leqslant n}} \alpha^{k,s}_{j_1\ldots j_k} x_{i_1}\cdot\ldots\cdot x_{i_{n-k}}\cdot u_s^k(x_{j_1}, ..., x_{j_k}) + \qquad (13)$$

$$+ \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n,\ 1\leqslant t\leqslant \gamma_k-\gamma_k(V), \\ 1\leqslant j_1<\ldots<j_k\leqslant n}} \beta^{k,t}_{j_1\ldots j_k} x_{i_1}\cdot\ldots\cdot x_{i_{n-k}}\cdot v_t^k(x_{j_1}, ..., x_{j_k}).$$

Предположим, что в равенстве (13) хотя бы один из элементов $\beta^{k,t}_{j_1\ldots j_k}$ не равен нулю. Выберем такое минимальное значение k, при котором $\beta^{k,t}_{j_1\ldots j_k} \neq 0$. Подставим вместо переменных $x_{i_1}, ..., x_{i_{n-k}}$ единицу. Получим равенство

$$f(1, ..., x_{j_1}, ..., x_{j_k}, ..., 1) = \sum_{s=1}^{\gamma_k} \epsilon_s u_s^k(x_{j_1}, ..., x_{j_k}) + \sum_{t=1}^{\gamma_k-\gamma_k(V)} \delta_t v_t^k(x_{j_1}, ..., x_{j_k}), \qquad (14)$$

где не все δ_t равны 0. Так как правая часть равенства (14) принадлежит $\Gamma_k(V)$ и не все δ_t равны 0, то элементы вида (11) не являются базисом пространства $\Gamma_n(V)$ при $n = k$. Противоречие.

Пункт (ii) следует из пункта (i). Предложение доказано.

Предложение 5. Пусть V — некоторое многообразие алгебр Лейбница — Пуассона. Тогда

(i) если $\gamma_{2k}(V) = 0$ для некоторого $k \geqslant 1$, то $\gamma_n(V) = 0$ для любого $n \geqslant 2k$;

(ii) если $\gamma_{2k+1}(V) = 0$ для некоторого $k \geqslant 1$, то $\gamma_{2n+1}(V) = 0$ для любого $n \geqslant k$;

(iii) если $\gamma_{2k+1}(V) = 0$ для некоторого $k \geqslant 1$ и в многообразии V выполнено полилинейное тождество

$$\{x_1, y_1\}\cdot\{x_2, y_2\}\cdot\ldots\cdot\{x_{k+1}, y_{k+1}\} = 0,$$

то $\gamma_n(V) = 0$ для любого $n \geqslant 2k + 1$.

Доказательство. (i) Пусть $\gamma_{2k}(V) = 0$ для некоторого $k \geqslant 1$. Индукцией по n покажем, что $\gamma_n(V) = 0$ для любого $n \geqslant 2k$ с очевидной базой $n = 2k$.

Пусть $n > 2k$ и моном $f \in \Gamma_n$. Покажем, что $f \in Id(V)$. Пусть d — максимальная длина скобки $\{,\}$ в элементе f:

$$f = \ldots\cdot\{x_{i_1}, ..., x_{i_d}\}\cdot\ldots$$

Если $d = 2$, то n — четное число и $n \geqslant 2k + 2$. Поэтому $f \in Id(V)$, так как если вычеркнуть скобку $\{x_{i_1}, x_{i_2}\}$ в элементе f, то полученный элемент по предположению индукции принадлежит $Id(V)$.

Если же $d > 2$, то элемент f можно получить из элемента

$$g = \ldots\cdot\{y, x_{i_3}, ..., x_{i_d}\}\cdot\ldots$$

с помощью подстановки $y \to \{x_{i_1}, x_{i_2}\}$. Так как $g \in Id(V)$ по предположению индукции, то $f \in Id(V)$.

(ii) Пусть $\gamma_{2k+1}(V) = 0$ для некоторого $k \geqslant 1$. Как и в предыдущем пункте, для доказательства равенства $\gamma_{2n+1}(V) = 0$ для любого $n \geqslant k$ используем индукцию по n.

Пусть $n > k$ и моном $f \in \Gamma_{2n+1}$. Пусть d — максимальная длина скобки $\{,\}$ в элементе f. Тогда возможны следующие случаи.

1. $d = 3$. Тогда число скобок $\{,\}$ длины 3 в элементе f может быть только нечетным. Если такая скобка одна, то f имеет следующий вид:

$$\{x_{j_1}, x_{j_2}\} \cdot ... \cdot \{x_{j_{s-1}}, x_{j_s}\} \cdot \{x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}\}.$$

Тогда $f \in Id(V)$, так как по предположению индукции

$$\{x_{j_3}, x_{j_4}\} \cdot ... \cdot \{x_{j_{s-1}}, x_{j_s}\} \cdot \{x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}\} \in Id(V).$$

Если в элементе f не менее трех скобок $\{,\}$ длины 3

$$f = ... \cdot \{x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}\} \cdot \{x_{j_1}, x_{j_2}, x_{j_3}\} \cdot \{x_{s_1}, x_{s_2}, x_{s_3}\} \cdot ...,$$

то f можно получить из элемента

$$g = ... \cdot \{y_1, x_{i_3}\} \cdot \{y_2, x_{j_3}\} \cdot \{x_{s_1}, x_{s_2}, x_{s_3}\} \cdot ...$$

с помощью подстановок $y_1 \to \{x_{i_1}, x_{i_2}\}$, $y_2 \to \{x_{j_1}, x_{j_2}\}$. Так как $g \in Id(V)$ по предположению индукции, то $f \in Id(V)$.

2. $d \geqslant 4$. Тогда элемент f можно получить из элемента

$$... \cdot \{y, x_{i_4}, ..., x_{i_d}\} \cdot ...$$

с помощью подстановки $y \to \{x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}\}$. Поэтому $f \in Id(V)$.

Доказательство пункта (iii) аналогично доказательству пунктов (i) и (ii). Предложение доказано.

Обозначим через B линейную оболочку элементов (не обязательно полилинейных) свободной алгебры $F(X)$ вида

$$\{x_{i_1}, ..., x_{i_s}\} \cdot ... \cdot \{x_{j_1}, ..., x_{j_t}\}, \quad s \geqslant 2, ..., t \geqslant 2.$$

При этом, в частности, $\Gamma_n = B \cap P_n$, $n = 1, 2, ...$

Предложение 6. Пусть V — многообразие алгебр Лейбница — Пуассона над бесконечным полем K. Тогда идеал тождеств $Id(V)$ порождается элементами из множества тождеств $B \cap Id(V)$. Если $char\ K = 0$, то $Id(V)$ порождается системой полилинейных тождеств из множества

$$\bigcup_{n \geqslant 1} (\Gamma_n \cap Id(V)).$$

Доказательство. Пусть $f(x_1, ..., x_n) \in Id(V)$ и поле K бесконечно. Можно считать, что полином $f(x_1, ..., x_n)$ является полиоднородным полистепени $(m_1, ..., m_n)$, имеющий следующий общий вид:

$$f(x_1, ..., x_n) = \sum_{k_1=0}^{m_1} ... \sum_{k_n=0}^{m_n} \alpha_{k_1...k_n} x_1^{k_1} \cdot ... \cdot x_n^{k_n} \cdot \{...\} \cdot ... \cdot \{...\} =$$

$$= \sum_{k_1=0}^{m_1} x_1^{k_1} \cdot \left(\sum_{k_2=0}^{m_2} ... \sum_{k_n=0}^{m_n} \alpha_{k_1...k_n} x_2^{k_2} \cdot ... \cdot x_n^{k_n} \cdot \{...\} \cdot ... \cdot \{...\} \right) =$$

$$= \sum_{k_1=0}^{m_1} x_1^{k_1} \cdot g_{k_1}(x_1, ..., x_n).$$

Пусть s — наибольшее значение k_1, $0 \leqslant k_1 \leqslant m_1$, при котором $g_s(x_1, ..., x_n) \neq 0$. При этом степень переменной x_1 в элементе g_s строго меньше, чем в элементах $g_1, ..., g_{s-1}$.

В элементе $f(x_1, ..., x_n)$ сделаем подстановку $x_1 \to (1 + x_1)$:

$$f(1 + x_1, ..., x_n) = \sum_{k_1=0}^{s} \left(\sum_{i=0}^{k_1} C_{k_1}^i x_1^i \right) \cdot g_{k_1}(x_1, ..., x_n).$$

При этом правую часть последнего равенства можно представить в виде суммы $h(x_1, ..., x_n) + g_s(x_1, ..., x_n)$, где каждое слагаемое в $h(x_1, ..., x_n)$ имеет строго большую степень переменной x_1, чем степень переменной x_1 в $g_s(x_1, ..., x_n)$. В силу бесконечности поля K элемент $g_s(x_1, ..., x_n) \in Id(V)$. Применяя тот же алгоритм относительно переменной x_2 в элементе $g_s(x_1, ..., x_n)$ и т. д., получаем, что $f(x_1, ..., x_n)$ является следствием системы тождеств из множества $B \cap Id(V)$.

Если $char\ K = 0$, то (учитывая, что любое тождество из $Id(V)$ является следствием системы тождеств из множества $B \cap Id(V)$) очевидно, что любое тождество многообразия V является следствием системы полилинейных тождеств из множества $B \cap Id(V)$. Предложение доказано.

2. Многообразия полиномиального роста

Теорема 1. Для многообразия алгебр Лейбница — Пуассона V над произвольным полем следующие условия эквивалентны:

(i) последовательность $\{c_n(V)\}_{n \geqslant 1}$ ограничена полиномом;

(ii) для некоторого $m \geqslant 2$ в V выполнены полилинейные тождества

$$\{x_1, ..., x_m\} = 0, \tag{15}$$

$$\{x_1, y_1\} \cdot ... \cdot \{x_m, y_m\} = 0; \tag{16}$$

(iii) найдется такое число N, что для любого $n > N$ будет выполнено равенство $\gamma_n(V) = 0$;

(iv) найдется такое число N, что для любого $n \geqslant N$ будет выполнено равенство

$$c_n(V) = 1 + \sum_{k=2}^{N} C_n^k \cdot \gamma_k(V). \tag{17}$$

Доказательство. Пусть выполнено условие (i). Рассмотрим линейно независимые элементы в P_n вида

$$x_{i_1} \cdot ... \cdot x_{i_p} \cdot \{x_{j_1}, x_{j_2}\} \cdot ... \cdot \{x_{j_{q-1}}, x_{j_q}\}, \tag{18}$$

где $\{i_1, ..., i_p, j_1, ..., j_q\} = \{1, ..., n\}$, $i_1 < ... < i_p$, $j_1 < ... < j_q$. Так как число данных элементов равно 2^{n-1}, то они линейно зависимы в $P_n(V)$ для некоторого n. Поэтому в $P_n(V)$ нетривиальная линейная комбинация элементов (18) равна нулю. Выберем в данной линейной комбинации слагаемое с минимальным количеством скобок $\{,\}$ и ненулевым коэффициентом. Подставив во все линейное выражение единицу вместо переменных, стоящих вне скобок $\{,\}$ данного слагаемого, получим тождество (16).

Далее, рассмотрим линейно независимые элементы в P_n вида

$$x_{i_1} \cdot ... \cdot x_{i_p} \cdot \{x_{j_1}, ..., x_{j_q}\},$$

где $\{i_1, ..., i_p, j_1, ..., j_q\} = \{1, ..., n\}$, $i_1 < ... < i_p$, $j_1 < ... < j_q$. Рассуждая аналогичным образом, как выше, получаем, что в V выполнено тождество (15). Поэтому из (i) следует (ii).

Пусть выполнено условие (ii). Тогда для любого $n > (m-1)^2$ будет выполнено равенство $\gamma_n(V) = 0$, поэтому из (ii) следует (iii).

Импликация $(iii) \Rightarrow (iv)$ следует из пункта (ii) предложения 4.

Импликация $(iv) \Rightarrow (i)$ очевидна. Теорема доказана.

Теорема 2 Если $char\ K = 0$, то произвольное многообразие алгебр Лейбница — Пуассона полиномиального роста допускает конечный базис тождеств.

Доказательство. Пусть многообразие алгебр Лейбница — Пуассона V имеет полиномиальный рост. Тогда из теоремы 1 следует, что найдется такое четное число $N \geqslant 2$, что для любого $n \geqslant N$ будет выполнено равенство $\gamma_n(V) = 0$. При этом тождества из $\Gamma_n \cap Id(V) = \Gamma_n$, $n \geqslant N$, являются следствиями тождеств $\Gamma_N \cap Id(V) = \Gamma_N$ (предложение 5). Учитывая предложение 6, многообразие V задается конечной системой тождеств из множества

$$\bigcup_{k=0}^{N} (\Gamma_k \cap Id(V)).$$

Теорема доказана.

Следующая теорема является обобщением аналогичного результата для случая многообразий алгебр Пуассона ([4]).

Теорема 3. Пусть V — нетривиальное многообразие алгебр Лейбница — Пуассона над произвольным полем. Тогда

(i) либо $c_n(V) \geqslant 2^{n-1}$ для любого n,

(ii) либо найдется такой многочлен степени $N \geqslant 0$ из кольца $\mathbb{Q}[x]$, что для любого $n \geqslant N$ будет выполнено равенство

$$c_n(V) = a_N n^N + ... + a_1 n + a_0, \qquad a_N \neq 0.$$

Доказательство. Пусть рост многообразия V не ограничен полиномом. Тогда из теоремы 1 следует, что либо все элементы вида

$$\{x_1, ..., x_m\}, \quad m = 1, 2, ...,$$

либо все полилинейные элементы вида

$$\{x_1, y_1\} \cdot ... \cdot \{x_m, y_m\}, \quad m = 1, 2, ...,$$

не принадлежат идеалу тождеств многообразия V. Поэтому в любом случае

$$\gamma_{2m}(V) \geqslant 1, \quad m = 0, 1, 2, ...$$

Следовательно, учитывая пункт (ii) предложения 4, получаем такое неравенство:

$$c_n(V) \geqslant \sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} C_n^{2k} = 2^{n-1}.$$

Пусть теперь рост многообразия V ограничен полиномом. Учитывая теорему 1, пусть N — максимальное число, при котором $\gamma_N(V) > 0$. Тогда для любого

$n \geqslant N$ будет выполнено равенство (17), то есть найдется такой многочлен степени $N \geqslant 0$ с рациональными коэффициентами, что для любого $n \geqslant N$

$$c_n(V) = a_N n^N + ... + a_1 n + a_0, \qquad a_N \neq 0.$$

Теорема доказана.

3. Многообразие почти полиномиального роста

Пусть характеристика основного поля K равна 0. Пусть Λ — бесконечномерная алгебра Грассмана с единицей и умножением $\wedge$. Введем в алгебре Λ операции $\cdot$ и $\{,\}$ следующим образом:

$$a \cdot b = \frac{1}{2}(a \wedge b + b \wedge a), \ \ \{a,b\} = a \wedge b - b \wedge a, \quad a, b \in \Lambda.$$

Полученная алгебра $(\Lambda, +, \cdot, \{,\})$ будет алгеброй Пуассона, которую обозначим через G. В работе [5] показано, что многообразие $var(G)$, порожденное алгеброй G, является почти полиномиальным, причем идеал тождеств алгебры G порождается тождеством $\{x_1, x_2, x_3\} = 0$.

Пусть также UT_2 — алгебра верхнетреугольных матриц с умножением $\wedge$ над произвольным полем K. Рассмотрим алгебру Пуассона $U_2 = [UT_2] \oplus K$ с операциями

$$(a + \alpha) \cdot (b + \beta) = (\beta a + \alpha b) + \alpha\beta,$$
$$\{a + \alpha, b + \beta\} = [a, b], \quad a, b \in UT_2, \quad \alpha, \beta \in K,$$

где $[a, b] = a \wedge b - b \wedge a$.

В работе [4] показано, что рост многообразия $var(U_2)$ является почти полиномиальным, а идеал тождеств алгебры U_2 порождается тождествами

$$\{\{x_1, x_2\}, \{x_3, x_4\}\} = 0, \qquad \{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\} = 0.$$

В работе [4] также показано, что многообразие алгебр Пуассона V имеет полиномиальный рост тогда и только тогда, когда $G \notin V$ и $U_2 \notin V$. Из данного критерия следует, что существует только два многообразия алгебр Пуассона почти полиномиального роста: $var(G)$ и $var(U_2)$.

Обозначим через $L_{\geqslant 2}(X)$ подалгебру в свободной алгебре Лейбница $L(X)$, каждый элемент которой является линейной комбинацией мономов степени $\geqslant 2$.

Предложение 7. Пусть A_L — некоторая ненулевая алгебра Лейбница с умножением $[,]$ над бесконечным полем K. Рассмотрим векторное пространство

$$A = A_L \oplus K,$$

в котором определим операции $\cdot$ и $\{,\}$ следующим образом:

$$(a + \alpha) \cdot (b + \beta) = (\beta a + \alpha b) + \alpha\beta,$$

$$\{a + \alpha, b + \beta\} = [a, b], \quad a, b \in A_L, \quad \alpha, \beta \in K.$$

Тогда полученная алгебра $(A, +, \cdot, \{\}, K)$ будет являться алгеброй Лейбница — Пуассона, причем будут выполнены следующие условия:

(i) $Id(A_L) = Id(A) \cap L_{\geqslant 2}(X)$ и в алгебре A выполнено тождество $\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\} = 0$;

(ii) $\Gamma_n(A) = P_n^L(A) = P_n^L(A_L)$ для любого $n \geqslant 2$, где равенства приведены с точностью до изоморфизма векторных пространств;

(iii) для любого n выполнено равенство

$$c_n(A) = 1 + \sum_{k=2}^{n} C_n^k \cdot dim\ P_k^L(A_L).$$

Доказательство. Очевидно, что алгебра $(A, +, \cdot, \{\}, K)$ является алгеброй Лейбница — Пуассона, в которой выполнено тождество $\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\} = 0$. При этом пункт (i) следует из того, что если $f \in L_{\geqslant 2}(X)$, то $f \in Id(A_L)$ тогда и только тогда, когда $f \in Id(A)$.

(ii) Заметим, что из пункта (i), в частности, следует, что $Id(A) \cap P_n^L = Id(A_L) \cap$ $\cap P_n^L$ для любого $n \geqslant 2$. Поэтому

$$P_n^L(A_L) = P_n^L/(Id(A_L) \cap P_n^L) = P_n^L/(Id(A) \cap P_n^L) = P_n^L(A).$$

Далее, обозначим через $Id(\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\})$ идеал тождеств в свободной алгебре Лейбница — Пуассона $F(X)$, порожденный элементом $\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\}$. Очевидно, что для любого n выполнено равенство

$$\Gamma_n = P_n^L \oplus Id(\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\}) \cap \Gamma_n.$$

Поэтому

$$\Gamma_n(A) = \Gamma_n/(Id(A) \cap \Gamma_n) =$$

$$= \frac{P_n^L \oplus Id(\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\}) \cap \Gamma_n}{Id(A) \cap (P_n^L \oplus Id(\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\}) \cap \Gamma_n)} =$$

$$= \frac{P_n^L \oplus Id(\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\}) \cap \Gamma_n}{(Id(A) \cap P_n^L) \oplus (Id(\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\}) \cap \Gamma_n)} \cong$$

$$\cong P_n^L/(Id(A) \cap P_n^L) = P_n^L(A).$$

Пункт (iii) следует из пункта (ii) и предложения 4. Предложение доказано.

Рассмотрим двумерную алгебру Лейбница L_2 над полем K с базисом a, b и таблицей умножения $[a, b] = a$, $[a, a] = [b, b] = [b, a] = 0$. Обозначим через A_2 алгебру Лейбница — Пуассона $L_2 \oplus K$, построенную с помощью предложения 7.

Теорема 4. Пусть характеристика основного поля K равна нулю. Для алгебры Лейбница — Пуассона A_2 верны следующие утверждения.

(i) Полилинейные тождества

$$\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\} = 0, \quad \{x_1, \{x_2, x_3\}\} = 0 \tag{19}$$

порождают идеал тождеств алгебры A_2.

(ii) Рост многообразия $var(A_2)$, порожденного алгеброй A_2, является почти полиномиальным, причем для любого натурального n выполнено равенство

$$c_n(A_2) = n \cdot 2^{n-1} - n + 1.$$

(iii) Базис полилинейной компоненты $P_n(A_2)$ состоит из элементов вида

$$x_{i_1} \cdot ... \cdot x_{i_s} \cdot \{x_{j_1}, ..., x_{j_t}\}, \tag{20}$$

где $\{i_1, ..., i_s, j_1, ..., j_t\} = \{1, ..., n\}$, $i_1 < ... < i_s$, $j_2 < ... < j_t$.

Доказательство. Понятно, что в алгебре A_2 выполнены тождества (19). Покажем, что базис полилинейной компоненты $P_n(A_2)$ состоит из элементов вида (20).

Из тождеств (19) следует, что $\Gamma_n(A_2)$ является линейной оболочкой элементов вида

$$\{x_i, x_1, ..., \widehat{x}_i, ..., x_n\}, \quad i = 1, ..., n, \tag{21}$$

где $\widehat{\ }$ означает, что элемент отсутствует. При этом данные элементы являются линейно независимыми в $\Gamma_n(A_2)$. Действительно, предположим, что для некоторого $n \geqslant 2$ в алгебре A_2 выполнено нетривиальное тождество

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \{x_i, x_1, ..., \widehat{x}_i, ..., x_n\} = 0, \quad \alpha_i \in K.$$

Пусть для некоторого j выполнено $\alpha_j \neq 0$. Подставим вместо переменной x_j скобку $\{y_0, y_1\}$. Тогда, с учетом тождества $\{x_1, \{x_2, x_3\}\} = 0$, в алгебре A_2 будет выполнено тождество $\{y_0, y_1, x_1, ..., \widehat{x}_j, ..., x_n\} = 0$. Но данное тождество не выполнено в алгебре A_2, что показывает проверка $\{a, b, ..., b\} = a$.

Из сказанного следует, что, с учетом предложения 4, для алгебры A_2 выполнены пункты (i) и (iii), при этом

$$c_n(A_2) = 1 + \sum_{k=2}^{n} C_n^k \cdot \gamma_k(V) = 1 + \sum_{k=2}^{n} C_n^k \cdot k = n \cdot 2^{n-1} - n + 1.$$

Пусть W — некоторое собственное подмногообразие в $var(A_2)$. Тогда из предложения 6 следует, что элементы (21) линейно зависимы в $\Gamma_n(W)$ для некоторого $n \geqslant 2$. Поэтому, как показано выше, в многообразии W выполнено тождество $\{x_1, ..., x_m\} = 0$ для некоторого m. Также в многообразии W выполнено тождество $\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\} = 0$, поэтому из теоремы 1 следует, что рост многообразия W ограничен некоторым полиномом. Теорема доказана.

Литература

[1] Drensky V. Free algebras and PI-algebras. Graduate course in algebra. Singapore: Springer-Verlag, 2000.

[2] Drensky V., Regev A. Exact behaviour of the codimention of some P.I. algebras // Israel J. Math. 1996. V. 96. P. 231–242.

[3] Бахтурин Ю.А. Тождества в алгебрах Ли. М.: Наука, 1985.

[4] Рацеев С.М. О многообразиях алгебр Пуассона полиномиального роста // Алгебра и математическая логика: материалы международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения профессора В.В. Морозова. Казань: КФУ. 2011. С. 156–157.

[5] Mishchenko S.P., Petrogradsky V.M., Regev A. Poisson PI algebras // Transactions of the American Mathematical Society. 2007. № 10 (359). P. 4669–4694.

Поступила в редакцию 12/III/2012;
в окончательном варианте — 12/III/2012.

COMMUTATIVE LEIBNIZ — POISSON ALGEBRAS OF POLYNOMIAL GROWTH

© 2012 S.M. Ratseev[3]

In this paper we study commutative Leibniz — Poisson algebras. We prove that a variety of commutative Leibniz — Poisson algebras has either polynomial growth or growth with exponential not less than 2, the field being arbitrary. We prove that every variety of commutative Leibniz — Poisson algebras of polynomial growth over a field of characteristic 0 has a finite basis for its polynomial identities. Also we construct a variety of commutative Leibniz — Poisson algebras with almost polynomial growth.

Key words: Poisson algebra, commutative Leibniz — Poisson algebra, variety of algebras, growth of variety.

Paper received 12/*III*/2012.
Paper accepted 12/*III*/2012.

[3]Ratseev Sergey Mihaylovich (`RatseevSM@rambler.ru`), the Dept. of Information Security and Control Theory, Ulyanovsk State University, Ulyanovsk, 432700, Russian Federation.