УДК 517.9

ПОНИЖЕНИЕ РАЗМЕРНОСТИ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАНЖЕВЕНА

© 2012 М.С. Осинцев[1]

В работе рассматривается задача оптимальной фильтрации для сингулярно возмущенного уравнения Ланжевена. Исходя из предположений о параметрах системы и условий, в которых происходит движение, выделены три случая, имеющие свои особенности при редукции задачи оценивания. Для понижения размерности задачи используется метод теории интегральных многообразий, который позволяет получить скорректированные фильтры Калмана–Бьюси.

Ключевые слова: уравнение Ланжевена, интегральные многообразия, дифференциальные уравнения, задача оптимального оценивания, понижение размерности, матричное уравнение Риккати.

Предварительные сведения

Для описания движения системы, на которую воздействуют случайные силы, часто используют уравнение Ланжевена. По сути, уравнение Ланжевена является стохастическим дифференциальным уравнением, в котором присутствует случайная величина типа белого гауссовского шума. В данной работе рассмотрена задача оптимального оценивания для этого уравнения. Как известно, задача оптимального оценивания может быть решена путем построения фильтра Калмана–Бьюси, доставляющего несмещенную, оптимальную, в смысле минимума дисперсии ошибки, оценку положения системы. Такой фильтр позволяет получать оценку положения исследуемой системы в текущий момент времени по известному значению выхода системы, на который наложен аддитивный белый гауссовский шум. Однако вычисление этой оценки сопряжено с необходимостью получения решения матричного дифференциального уравнения Риккати в каждый момент времени для ковариационной матрицы фильтра. При этом размерность уравнения Риккати может быть достаточно велика, что приводит к большим объемам вычислений. В работе выделено три принципиально различных случая, которые вытекают из предположений о величине коэффициентов в исходном уравнении. Если некоторые из коэффициентов достаточно малы, то система дифференциальных уравнений Риккати фильтра становится сингулярно возмущенной. Часть величин в ковариационной матрице фильтра изменяется медленно и описывает качественное

[1]Осинцев Михаил Сергеевич (mishaosintsev@gmail.com), кафедра технической кибернетики Самарского государственного аэрокосмического университета им. академика С.П. Королева (Национальный исследовательский университет), 443001, Российская Федерация, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 151.

поведение системы, остальные же изменяются с высокой частотой и представляют собой либо быстро затухающие экспоненты, либо быстро осциллирующие тригонометрические функции. Метод теории интегральных многообразий позволяет избавиться от быстро изменяющихся величин и получить решения матричного уравнения Риккати на интегральном многообразии медленных движений. При этом данное решение может быть использовано вместо решения полного уравнения с сохранением высокой точности работы фильтра Калмана–Бьюси.

1. Уравнение Ланжевена

Рассмотрим уравнение Ланжевена, описывающее броуновское движение частицы в жидкости [1]:

$$m\ddot{x}(t) + f\dot{x}(t) + kx(t) = \sqrt{2KTf}\dot{w}(t),$$

где $x(t)$ — положение частицы по одной из осей. Частица подвержена действию трех сил: от взаимодействия с другими частицами, которое представлено белым шумом $\sqrt{2KTf}\dot{w}(t)$, силе трения $f\dot{x}$ и внешней силе, пропорциональной смещению kx. Коэффициенты m, f, K, T представляют собой массу частицы, коэффициент трения, константу Больцмана и абсолютную температуру соответственно, а $\dot{w}(t)$ — случайный процесс типа белого гауссовского шума.

Следуя [2], рассмотрим уравнение Ланжевена, приведенное к безразмерной форме

$$\varepsilon^2\ddot{x}(t) + \alpha(\varepsilon)\dot{x}(t) + \beta(\varepsilon)x(t) = \gamma(\varepsilon)h\dot{w}(t), \tag{1}$$

где ε — малый положительный параметр, $x(t)$ — положение частицы по одной из осей.

Исходя из предположений об условиях, в которых протекает движение системы, а также о параметрах самой системы, можно выделить три принципиально разные ситуации, возникающие при решении задачи оптимального оценивания, которые различаются видом параметров $\alpha(\varepsilon)$, $\beta(\varepsilon)$, $\gamma(\varepsilon)$ (1). Для понижения размерности задачи используется метод теории интегральных многообразий, который позволяет получить скорректированные фильтры Калмана–Бьюси [2–7].

В работе [2] уравнение (1) рассматривается в предположении о том, что параметры $\alpha(\varepsilon)$, $\beta(\varepsilon)$ и $\gamma(\varepsilon)$ порядка единицы. Тогда уравнение приводится к виду:

$$\varepsilon^2\ddot{x} + \dot{x} + x = h\dot{w}, \tag{2}$$

где ε — малый положительный парамер. Это уравнение эквивалентно системе сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= x_2; \\ \varepsilon^2\dot{x}_2 &= -x_1 - x_2 + h\dot{w}. \end{aligned} \tag{3}$$

Для этой системы рассмотрим задачу оптимальной фильтрации. В соответствии с работами Р. Калмана выражение для получения оценки $\hat{x}$ положения системы x имеет вид:

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = [A - P(t)C^TR^{-1}C]\hat{x} + P(t)C^TR^{-1}z(t),$$

где $P(t)$ — решение матричного дифференциального уравнения Риккати

$$\begin{gathered} \dot{P} = AP + PA^T - PC^TR^{-1}CP + BQB^T, \\ P(0) = P_0. \end{gathered} \tag{4}$$

В нашем случае соответствующие матрицы имеют вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1/\varepsilon^2 & -1/\varepsilon^2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 \\ h/\varepsilon^2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix},\ Q = (q),\ R = (r). \tag{5}$$

Особый интерес при решении задачи оптимальной фильтрации вызывает матричное дифференциальное уравнение Риккати (4). На практике, при построении фильтра Калмана–Бьюси, основной сложностью является получение решения этого уравнения в реальном времени. Обозначим элементы матрицы P следующим образом:

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{pmatrix},$$

и запишем дифференциальные уравнения для каждого элемента этой матрицы

$$\begin{array}{l} \dot{p_0} = 2p_1 - \frac{1}{r}p_0^2; \\ \varepsilon^2\dot{p}_1 = \varepsilon^2 p_2 - p_0 - p_1 - \varepsilon^2\frac{1}{r}p_0p_1; \\ \varepsilon^2\dot{p}_2 = -2p_1 - 2p_2 - \varepsilon^2\frac{1}{r}p_1^2 + \frac{h^2}{\varepsilon^2}q. \end{array} \tag{6}$$

Уравнения для p_1, p_2 в этой системе являются сингулярно возмущенными. Это означает, что в системе (6) присутствуют быстрые и медленные переменные. В данном случае p_0 является медленной переменной, изменение которой происходит со скоростью порядка $O(1)$, а p_1, p_2 — быстрые, меняющиеся со скоростью порядка $1/\varepsilon^2$. Наличие в системе быстрых переменных означает, что в процессе фильтрации возникнет необходимость снимать выходной сигнал системы с высокой частотой, чтобы при численном решении системы уравнений Риккати разностным методом частота разбиения интервалов времени была больше, чем скорость изменения быстрых переменных. Таким образом, для реализации фильтра Калмана–Бьюси потребуются значительные вычислительные мощности для организации численного решения системы уравнений Риккати с высокой частотой. Именно поэтому вопрос понижения размерности задачи оптимального оценивания и, в частности, понижение размерности системы дифференциальных уравнений Риккати для ковариационной матрицы фильтра является весьма актуальным.

Как известно, удобным аппаратом исследования сингулярно возмущенных систем является метод качественного асимптотического анализа дифференциальных уравнений с сингулярными возмущениями, основанного на теории интегральных многообразий. По сути, этот метод заключается в замене исходной системы новой системой на интегральном многообразии с размерностью равной размерности медленной подсистемы.

Интегральным многообразием называется гладкая поверхность $S \in R^{m\times n\times 1}$ системы

$$\frac{dx}{dt} = f(x,y,t,\varepsilon),$$
$$\varepsilon\frac{dy}{dt} = g(x,y,t,\varepsilon),$$

такая, что если хотя бы одна точка траектории системы принадлежит поверхности $S : (x(t_0), y(t_0), t_0) \in S$, то вся траектория принадлежит поверхности $S : (x(t,\varepsilon), y(t,\varepsilon), t) \in S$. Интегральное многообразие автономной системы

$$\begin{array}{rcl} \dot{x} &=& f(x,y,\varepsilon), \\ \varepsilon\dot{y} &=& g(x,y,\varepsilon) \end{array}$$

имеет вид $S_1 \times (-\infty, \infty)$, где S_1 — поверхность в фазовом пространстве $R^{m\times n}$. Сюда относятся только те интегральные многообразия размерности m, которые могут быть представлены в виде кривых векторной функции

$$y = h(x, t, \varepsilon).$$

Также заметим, что $h(x, t, 0) = h^{(0)}(x, t)$, где $h^{(0)}(x, t)$ является функцией, график которой представляет собой линию на медленной поверхности, при этом $h(x, t, \varepsilon)$ — достаточно гладкая функция ε. Для автономных систем интегральным многообразием будут графики функции

$$y = h(x, \varepsilon).$$

Такое интегральное многообразие называют интегральным многообразием медленных движений, которое можно понимать как поверхность, на которой достигается локальный минимум фазовой скорости. Таким образом, перейдя к рассмотрению системы (6) на интегральном многообразии, получим систему, в которой отсутствуют быстро изменяющиеся переменные.

Рассмотрим решение для матричного уравнения Риккати (4) и выделим из него решение на интегральном многообразии медленных движений. Как и в скалярном случае, матричное уравнение Риккати может быть приведено к линейному, если известно одно частное решение этого уравнения $P = P_1$. Тогда для матрицы U, введенной по формуле $P = U^{-1} + P_1$, имеем линейное уравнение

$$\dot{U} = UD + D^T U - CR^{-1}C,$$

где $D = A - P_1 C R^{-1} C$. Обозначим через U_1 частное решение этого уравнения, а в качестве $F(t)$ возьмем фундаментальную матрицу однородного уравнения $\dot{x} = Dx$. В работе [6] показано, что в случае постоянных матриц A, B, C, Q, R решение матричного уравнения Риккати для функции $P(t)$ может быть легко найдено в виде:

$$P(t) = (F(t)[(P_0 - P_1)^{-1} - U_1])F(t)^T)^{-1} + P_1.$$

При этом в качестве частного решения P_1 следует взять неотрицательно определенное решение уравнения Лурье:

$$A^T P_1 + P_1 A - P_1 C^T R^{-1} C P_1 + BQB^T = 0. \tag{7}$$

Частное решение U_1 для линейного уравнения может быть найдено из уравнения

$$U_1 D^T + D U_1 = CR^{-1}C, \tag{8}$$

а $F(t)$ — фундаментальная матрица решений уравнения $\dot{x} = -Dx$.

Согласно (7), система (6) уравнений Риккати имеет частное решение

$$P_1 = \begin{pmatrix} \frac{r\rho}{\varepsilon^2} & \frac{r\rho^2}{2\varepsilon^4} \\ \frac{r\rho^2}{2\varepsilon^4} & \frac{r\rho}{\varepsilon^4} + \frac{r\rho^2}{2\varepsilon^6} + \frac{r\rho^3}{2\varepsilon^6} \end{pmatrix},$$

где

$$\rho = \sqrt{2\varepsilon^2 \sqrt{\frac{h^2 q}{r} + 1} - 2\varepsilon^2 + 1} - 1. \tag{9}$$

Будем считать, что начальное положение системы известно точно, то есть начальное значение ковариационной матрицы ошибки фильтра нулевое ($P_0 = 0$). Выражение для матрицы D в нашем случае имеет вид:

$$D = \begin{pmatrix} -\frac{\rho}{\varepsilon^2} & 1 \\ -\frac{\rho^2 + 2\varepsilon^2}{2\varepsilon^4} & -\frac{1}{\varepsilon^2} \end{pmatrix}.$$

Решение этого уравнение будем искать в виде суммы общего решения $U_0(t)$ соответствующего однородного уравнения и частного решения U_1 неоднородного уравнения. Найдем общее решение однородного уравнения

$$\dot{U} = UD^T + DU$$

в виде:

$$U_0(t) = F(t)C_1F(t)^T,$$

где $F(t)$ — матричная экспонента от $-D^T$, а $C_1 = (P_0 - P_1)^{-1} - U_1$. Для построения матричной экспоненты найдем собственные числа матрицы $-D^T$, которые имеют вид:

$$\lambda = \frac{1+\rho+a}{2\varepsilon^2},\ \mu = \frac{1+\rho-a}{2\varepsilon^2},$$

где $a = \sqrt{1-4\varepsilon^2-2\rho-\rho^2}$. Необходимо отметить, что величина λ порядка $1/\varepsilon^2$, а величина μ порядка единицы. Вычислив собственные векторы матрицы $-D^T$, получим выражение для $F(t)$:

$$F(t) = e^{-D^Tt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t}\frac{a-1+\rho}{2a} + e^{\mu t}\frac{a+1-\rho}{2a} & (e^{\lambda t}-e^{\mu t})\frac{a^2-\rho^2+2\rho-1}{4a\varepsilon^2} \\ (e^{\mu t}-e^{\lambda t})\frac{\varepsilon^2}{a} & e^{\lambda t}\frac{a+1-\rho}{2a} + e^{\mu t}\frac{a-1+\rho}{2a} \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Ее определитель равен $|F(t)| = e^{(\lambda+\mu)t}$. Далее найдем частное решение U_1 из уравнения (8). Обозначив элементы этой матрицы как

$$U_1 = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_2 & u_3 \end{pmatrix},$$

получим выражения для ее элементов

$$\begin{aligned} u_1 &= -\tfrac{\varepsilon^2(\rho^2+2\rho+2\varepsilon^2+2)}{2r(\rho+1)(\rho^2+2\rho+2\varepsilon^2)}, \\ u_2 &= -\tfrac{\varepsilon^4}{r(\rho+1)(\rho^2+2\rho+2\varepsilon^2)}, \\ u_3 &= -\tfrac{\varepsilon^6}{r(\rho+1)(\rho^2+2\rho+2\varepsilon^2)}. \end{aligned} \tag{11}$$

Аналогично обозначим элементы матрицы C_1 как

$$C_1 = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

и запишем выражения для ее элементов

$$\begin{aligned} c_1 &= -\tfrac{2\varepsilon^2(\rho^2+\rho+2\varepsilon^2)}{r\rho(\rho^2+2\rho+4\varepsilon^2)} - u_1, \\ c_2 &= \tfrac{2\varepsilon^4}{r(\rho^2+2\rho+4\varepsilon^2)} - u_2, \\ c_3 &= -\tfrac{4\varepsilon^6}{r\rho(\rho^2+2\rho+4\varepsilon^2)} - u_3. \end{aligned} \tag{12}$$

Далее для получения решения, необходимо вычислить обратную матрицу $F(t)C_1F(t)^T + U_1$. Эта матрица имеет размер 2×2, для которой обратная вычисляется рокировкой элементов на главной диагонали, сменой знака элементов на побочной, а также делением всех элементов на определитель матрицы. Так как определитель произведения матриц равен произведению определителей, то $|F(t)C_1F(t)^T| = e^{2(\lambda+\mu)t}(c_1c_3 - c_2^2)$. Исходя из выражения (10) для матрицы $F(t)$, ясно, что элементы матрицы $F(t)C_1F(t)^T$, обозначенные как

$$F(t)C_1F(t)^T + U_1 = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ f_2 & f_3 \end{pmatrix},$$

имеют следующий вид: $f_i = a_i e^{2\lambda t} + b_i e^{2\mu t} + d_i e^{(\mu+\lambda)t} + u_i$, где $a_1 - a_3$, $b_1 - b_3$, $d_1 - d_3$ — коэффициенты, которые могут быть выражены через ε. В этом случае искомый определитель имеет вид:

$$\begin{gathered} |F(t)C_1F(t)^T + U_1| = e^{2(\lambda+\mu)t}(c_1c_3 - c_2^2) + u_1u_3 - u_2^2 + \\ +u_3(a_1e^{2\lambda t} + b_1e^{2\mu t} + d_1e^{(\mu+\lambda)t}) + u_1(a_3e^{2\lambda t} + b_3e^{2\mu t} + d_3e^{(\mu+\lambda)t}) - \\ -2u_2(a_2e^{2\lambda t} + b_2e^{2\mu t} + d_2e^{(\mu+\lambda)t}). \end{gathered} \tag{13}$$

При вычислении обратной матрицы $(F(t)C_1F(t)^T + U_1)^-1$ из каждого элемента в матрице $F(t)C_1F(t)^T + U_1$, а также из определителя (13) вынесем множители $e^{2\lambda t}$ и сократим их.

Таким образом, элементы обратной матрицы, а также определитель будут содержать слагаемые с множителями $e^{-\lambda t}$ и $e^{-2\lambda t}$. Так как собственное число λ порядка $1/\varepsilon^2$, то эти слагаемые суть быстро затухающие экспоненты. Они представляют собой быструю составляющую в решении системы Риккати. Для получения решения исходной системы на интегральном многообразии медленных движений отбросим все слагаемые из элементов матрицы, которые содержат быстро затухающие экспоненты. Получим решение исходной системы в виде:

$$P_M(t) = d(t)\begin{pmatrix} a_3 & -a_2 \\ -a_2 & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{r\rho}{\varepsilon^2} & \frac{r\rho^2}{2\varepsilon^4} \\ \frac{r\rho^2}{2\varepsilon^4} & \frac{r\rho}{\varepsilon^4} + \frac{r\rho^2}{2\varepsilon^6} + \frac{r\rho^3}{2\varepsilon^6} \end{pmatrix}, \tag{14}$$

где

$$d(t) = \frac{1}{e^{2\mu t}(c_1c_3 - c_2^2 + u_1u_3 - u_2^2 + u_3a_1 + u_1a_3 - 2u_2a_2)},$$

$$a_1 = \frac{(\rho + a - 1)^2}{16a^2\varepsilon^4}\nu,\ a_2 = -\frac{(\rho + a - 1)}{8a^2\varepsilon^2}\nu,\ a_3 = \frac{1}{4a^2}\nu,$$

$$\nu = c_3a^2 - 2ac_3\rho - 4ac_2\varepsilon^2 + 2ac_3 + c_3\rho^2 + 4c_2\varepsilon^2\rho - 2c_3\rho + 4c_1\varepsilon^4 - 4c_2\varepsilon^2 + c_3,$$

ρ определяется выражением (9), а $u_1 - u_3$, $c_1 - c_3$ выражениями (11)–(12).

Таким образом, мы получили решение исходной сингулярно возмущенной системы уравнений Риккати, которое изменяется со скоростью порядка единицы. Рассмотрим решение для первого элемента ковариационной матрицы, так как остальные элементы могут быть выражены через него. Уравнение можно представить в виде:

$$p_0(t) = \frac{a_3}{e^{2\mu t}c + u} + \frac{r\rho}{\varepsilon^2}, \tag{15}$$

где

$$c = c_1c_3 - c_2^2, u = u_1u_3 - u_2^2 + u_3a_1 + u_1a_3 - 2u_2a_2.$$

Уравнение (15) есть решение дифференциального уравнения Риккати:

$$\dot{p} = -2\mu\frac{u}{a_3}p^2 - 2\mu\frac{2r\rho u + \varepsilon^2 a_3}{\varepsilon^2 a_3}p + 2\mu\frac{r\rho(r\rho u + a_3\varepsilon^2)}{\varepsilon^4 a_3}. \tag{16}$$

Полученное выражение может быть скалярным уравнением Риккати для фильтра Калмана–Бьюси некоторой динамической системы. По виду уравнения (16) можно восстановить вид этой системы:

$$\begin{gathered} \dot{x} = -\mu\left(\tfrac{2r\rho u}{\varepsilon^2 a_3} + 1\right)x + \dot{w}, \\ z = x + \dot{v}. \end{gathered} \tag{17}$$

При этом дисперсии случайных процессов $\dot{w}$ и $\dot{v}$:

$$Q = \mu\varepsilon\left(\frac{r\rho u}{\varepsilon^2 a_3} + 1\right), R = \frac{a_3}{2\mu u}$$

соответственно. В итоге получили систему (17), решение задачи фильтрации для которой в точности совпадает с решением этой задачи для исходной системы (6) на интегральном многообразии медленных движений для ковариационной матрицы фильтра Калмана–Бьюси. Фактически это означает возможность замены исходной системы новой, обладающей меньшей размерностью. Кроме того, в дифференциальном уравнении Риккати для дисперсии ошибки фильтра для системы (17) отсутствуют быстрые переменные, что позволяет эффективно использовать этот фильтр в условиях низкой частоты снятия выходного сигнала с системы. Интересной особенностью данного решения является тот факт, что для системы (17) начальное положение не является детерминированным. Это следует из того, что в начальный момент времени значение дисперсии ошибки фильтра отлично от нуля:

$$P_0 = \frac{a_3}{c+u} + \frac{r\rho}{\varepsilon^2}. \tag{18}$$

На практике начальное положение системы может быть задано как реализация случайной гауссовой величины с нулевым математическим ожиданием и дисперсией P_0. На рисунке 1, *а* приведены результаты численного моделирования движения исследуемой системы (2). На рисунке 1, *б* показано сравнение ошибок полного фильтра и фильтра на интегральном многообразии. Как видно из представленного графика, оба фильтра имеют одинаковый порядок точности. На рисунке 1, *в* приведен график величины $|\Delta| = |e_f(t) - e_m(t)|$, где $e_f(t)$ — ошибка полного фильтра, $e_m(f)$ — ошибка фильтра на интегральном многообразии. Результаты их работы совпадают с высокой точностью, что является основанием для использования фильтра на интегральном многообразии взамен полного фильтра.

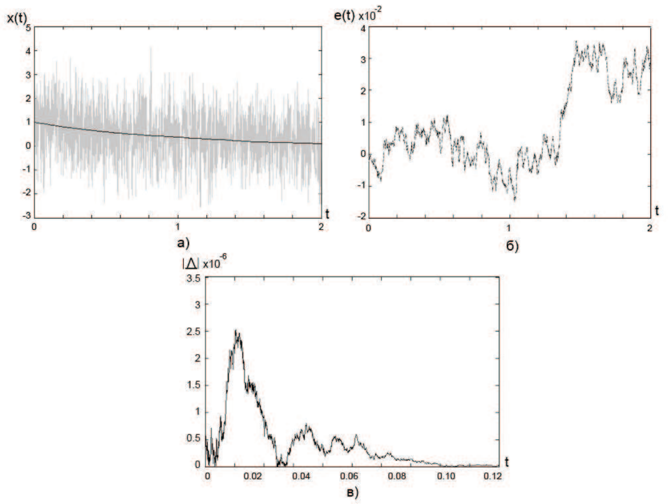

Рис. 1. Результаты численного моделирования динамики системы, полного фильтра Калмана–Бьюси и фильтра на интегральном многообразии: *а* — динамика системы (черным), значения выходной функции, поступающие на вход фильтров; *б* — ошибки полного фильтра (черный пунктир) и фильтра на интегральном многообразии (серый пунктир); *в* — модуль разницы между ошибками фильтров

2. Случай 2

В ряде случаев уравнение (1) может быть использовано в предположении о том, что коэффициенты $\alpha(\varepsilon)$ и $\gamma(\varepsilon)$ порядка ε, $\beta(\varepsilon)$ порядка единицы. Тогда уравнение может быть приведено к виду:

$$\varepsilon^2\ddot{x} + \varepsilon\dot{x} + x = \varepsilon h\dot{w}, \tag{19}$$

где ε — малый положительный параметр. Данное уравнение эквивалентно системе из двух сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &\varepsilon\dot{x} = u; \\ &\varepsilon\dot{u} = -x - u + \varepsilon h\dot{w}. \end{aligned} \tag{20}$$

Рассмотрим задачу оптимального оценивания для этой системы и отличие ее решения от полученного для системы (3). Как и прежде, основной интерес представляет собой система дифференциальных уравнений Риккати для ковариационной матрицы фильтра

$$\begin{aligned} &\varepsilon\dot{p_0} = 2p_1 - \tfrac{1}{r}p_0^2, \\ &\varepsilon\dot{p_1} = -p_0 - p_1 - p_2 - \tfrac{1}{r}p_0p_1, \\ &\varepsilon\dot{p_2} = -2p_1 - 2p_2 - \tfrac{1}{r}p_1^2 + h^2q. \end{aligned} \tag{21}$$

В данном случае мы получили систему из трех сингулярно возмущенных уравнений. Это означает, что все три элемента ковариационной матрицы быстрые. В такой ситуации интегральное многообразие медленных движений имеет нулевую размерность и может быть найдено как решение системы алгебраических уравнений, полученных приравниванием левых частей уравнений (21) к нулю. Это решение имеет вид:

$$P_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon}\rho & \frac{1}{2r\varepsilon}\rho^2 \\ \frac{1}{2r\varepsilon}\rho^2 & \frac{1}{2r^2\varepsilon}\rho^3 + \frac{1}{2r\varepsilon}\rho^2 + \frac{1}{\varepsilon}\rho \end{pmatrix}, \tag{22}$$

где $\rho = -r + \sqrt{-r^2 + 2r\sqrt{r^2 + r\varepsilon^2h^2q}}$. Теперь система дифференциальных уравнений для ковариационной матрицы фильтра (21) может быть заменена постоянным решением (22) на интегральном многообразии медленных движений. Ясно, что для такого фильтра нет необходимости получать выходной сигнал системы с высокой частотой, кроме того, вообще отсутствует потребность в получении решения системы дифференциальных уравнений Риккати, что является большим преимуществом. На рисунке 2, *б* приведены графики сравнения работы полного фильтра и фильтра на многообразии с постоянной ковариационной матрицей. Как видно из приведенных графиков, результаты работы фильтра на многообразии достаточно близки к результатам работы полного фильтра.

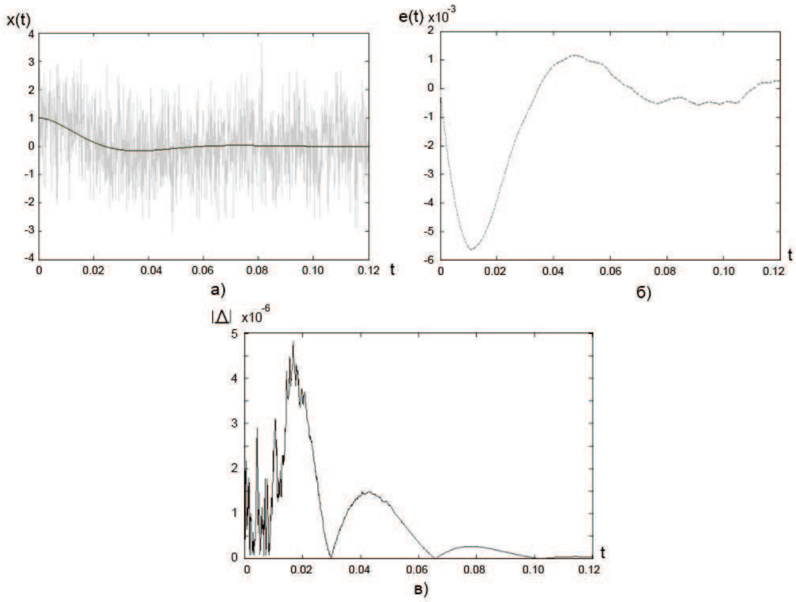

Рис. 2. Результаты численного моделирования динамики системы, полного фильтра Калмана–Бьюси и фильтра на интегральном многообразии: *а* — динамика системы (черным), значения выходной функции, поступающие на вход фильтров; *б* — ошибки полного фильтра (черный пунктир) и фильтра на интегральном многообразии (серый пунктир); *в* — модуль разницы между ошибками фильтров

3. Случай 3

Наиболее интересный случай возникает при рассмотрении исходного уравнения (1), когда коэффициент $\alpha(\varepsilon)$ суть квадрат малого параметра, $\beta(\varepsilon)$ порядка единицы, а $\gamma(\varepsilon)$ порядка ε. В этом случае уравнение примет вид:

$$\varepsilon^2\ddot{x} + 2\varepsilon^2\dot{x} + x = \varepsilon h\dot{w}. \tag{23}$$

Данное уравнение также может быть записано как система двух дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} &\varepsilon\dot{x} = u;\\ &\varepsilon\dot{u} = -2\varepsilon u - x + \varepsilon h\dot{w}. \end{aligned} \tag{24}$$

Система дифференциальных уравнений Риккати для данной системы в этом случае имеет вид:

$$\begin{aligned} &\varepsilon\dot{p}_0 = 2p_1 - \varepsilon\tfrac{1}{r}p_0^2,\\ &\varepsilon\dot{p}_1 = p_2 - p_0 - 2\varepsilon p_1 - \varepsilon\tfrac{1}{r}p_0p_1,\\ &\varepsilon\dot{p}_2 = -2p_1 - 4\varepsilon p_2 - \varepsilon\tfrac{1}{r}p_1^2 + \varepsilon h^2 q. \end{aligned} \tag{25}$$

На первый взгляд, как и в предыдущем случае, все три уравнения описывают быстрые движения системы. Однако рассмотрим более подробно матрицу главных членов в правой части:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы M равен двум, что означает, что линейной комбинацией уравнений системы (25) можно получить уравнение, в котором при производной не будет малого параметра. Очевидно, что сумма первой и третьей строки суть дифференциальное уравнение

$$\dot{p} = -4(p - p_0 1) - \frac{1}{r}p_0^2 - \frac{1}{r}p_1^2 + h^2 q.$$

Это уравнение не является сингулярно возмущенным и описывает медленные движения системы. В данном случае получили увеличение размерности интегрального многообразия, поэтому решение для ковариационной матрицы фильтра на интегральном многообразии не является постоянным. Найдем это решение тем же методом, что и в первом случае.

Частное решение уравнений Риккати (25)

$$P_1 = \begin{pmatrix} \frac{r\rho}{\varepsilon} & \frac{r\rho^2}{2\varepsilon} \\ \frac{r\rho^2}{2\varepsilon} & \frac{r\rho}{\varepsilon} + r\rho^2 + \frac{r\rho^3}{2\varepsilon} \end{pmatrix},$$

где

$$\rho = \sqrt{4\varepsilon^2 + 2\sqrt{\frac{h^2\varepsilon^2 q}{r} + 1} - 2} - 2\varepsilon. \tag{26}$$

Как и прежде, найдем точное решение исходной системы дифференциальных уравнений Риккати на интегральном многообразии. Для этого необходимо из итогового решения выделить медленную составляющую. Для упрощения последующих выкладок введем обозначение

$$\nu = \frac{\sqrt{4 + 4\rho\varepsilon - 4\varepsilon^2 + \rho^2}}{2}. \tag{27}$$

Тогда выражение для фундаментальной матрицы решений $F(t)$ уравнения $\dot{x} = -$ $-Dx$ примет вид:

$$F(t) = e^{\left(1+\frac{\rho}{2\varepsilon}\right)t} \begin{pmatrix} F_1 & F_2 \\ F_3 & F_4 \end{pmatrix},$$

$$F_1 = \left(\varepsilon - \frac{\rho}{2}\right) cos\left(\frac{\nu}{\varepsilon}t\right) - \nu sin\left(\frac{\nu}{\varepsilon}t\right);$$

$$F_2 = \nu cos\left(\frac{\nu}{\varepsilon}t\right) + \left(\varepsilon - \frac{\rho}{2}\right) sin\left(\frac{\nu}{\varepsilon}t\right);$$

$$F3 = cos\left(\frac{\nu}{\varepsilon}t\right);\ F4 = sin\left(\frac{\nu}{\varepsilon}t\right),$$

а ее определитель равен

$$|F(t)| = -\nu e^{\left(2+\frac{\rho}{\varepsilon}\right)t}.$$

В данном случае матрица D имеет вид:

$$D = \begin{pmatrix} -\frac{\rho}{\varepsilon} & \frac{1}{\varepsilon} \\ -\frac{\rho^2+2}{2\varepsilon} & -2 \end{pmatrix}.$$

Обозначим элементы матрицы $F(t)C_1F^T(t)$ следующим образом

$$F(t)C_1F(t) = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ f_2 & f_3 \end{pmatrix},$$

тогда выражение для ее элементов

$$\begin{gathered}f_1=e^{\left(2+\frac{\rho}{\varepsilon}\right)t}(\tfrac{1}{2}(g^2+\nu^2)(c_1+c_3)+\\+(c_2g^2-c_2\nu^2-c_1g\nu+c_3g\nu)sin\left(\tfrac{2\nu}{\varepsilon}t\right)+\tfrac{1}{2}((g^2-\nu^2)(c_1-c_3)+\\+4c_2g\nu)cos\left(\tfrac{2\nu}{\varepsilon}t\right));\\f_2=e^{\left(2+\frac{\rho}{\varepsilon}\right)t}(\tfrac{1}{2}g(c_1+c_3)+\\+\left(c_2g-\tfrac{1}{2}c_1\nu+\tfrac{1}{2}c_3\nu\right)sin\left(\tfrac{2\nu}{\varepsilon}t\right)+\\+\left(c_2\nu+\tfrac{1}{2}c_1g-\tfrac{1}{2}c_3g\right)cos\left(\tfrac{2\nu}{\varepsilon}t\right));\\f_3=e^{\left(2+\frac{\rho}{\varepsilon}\right)t}(\tfrac{1}{2}(c_1+c_3)+c_2sin\left(\tfrac{2\nu}{\varepsilon}t\right)+\tfrac{1}{2}(c_1-c_3)cos\left(\tfrac{2\nu}{\varepsilon}t\right)),\end{gathered}$$

где

$$g=\varepsilon-\rho/2, \tag{28}$$

а c_1–c_3 и u_1–u_2 — элементы матриц C_1, U_1 и вычисляют по следующим выражениям:

$$\begin{gathered}u_1=-\tfrac{\varepsilon(\rho^2+4\rho\varepsilon+8\varepsilon^2+2)}{2r(\rho^3+6\rho^2\varepsilon+8\rho\varepsilon^2+2\rho+4\varepsilon)},\\u_2=-\tfrac{2\varepsilon^2}{r(\rho+2\varepsilon)(\rho^2+4\varepsilon\rho+2)},\\u_3=-\tfrac{\varepsilon}{r(\rho+2\varepsilon)(\rho^2+4\varepsilon\rho+2)},\end{gathered} \tag{29}$$

$$\begin{gathered}c_1=-\tfrac{2\varepsilon(\rho^2+2\rho\varepsilon+2)}{r\rho(\rho^2+4\varepsilon\rho+4)}-u_1,\\c_2=\tfrac{2\varepsilon}{r(\rho^2+4\varepsilon\rho+4)}-u_2,\\c_3=-\tfrac{4\varepsilon}{r\rho(\rho^2+4\varepsilon\rho+4)}-u_3.\end{gathered} \tag{30}$$

Определитель матрицы равен

$$|F(t)C_1F(t)^T+U_1|=|F(t)C_1F(t)^T|+|U_1|+f_1u_3+u_1f_3-2f_2u_2. \tag{31}$$

Элементы матрицы $(F(t)C_1F(t)^T+U_1)^{-1}$ представляют собой выражения вида:

$$\frac{a_1+b_1cos(2at)+d_1sin(2at)}{a_2+b_2cos(2at)+d_2sin(2at)}.$$

Члены, содержащие быстро осциллирующие тригонометрические функции, представляют собой быстрые движения системы, поэтому медленную составляющую в решении следует искать, отбросив в выражениях для матрицы $(F(t)C_1F(t)^T+$ $+U_1)^{-1}$ и для определителя (31) все члены, содержащие тригонометрические функции. Тогда выражение для медленной составляющей определителя (31) имеет вид:

$$\begin{gathered}d(t)=|F(t)C_1F(t)^T+U_1|_M=\nu^2e^{\left(4+\frac{2\rho}{\varepsilon}\right)t}(c_1c_3-c_2^2)+\\+u_1u_3-u_2^2+\tfrac{1}{2}(g^2+\nu^2)(c_1+c_3)e^{\left(2+\frac{\rho}{\varepsilon}\right)t}u_3+\\+\tfrac{1}{2}(c_1+c_3)e^{\left(2+\frac{\rho}{\varepsilon}\right)t}u_1+g(c_1+c_3)e^{\left(2+\frac{\rho}{\varepsilon}\right)t}u_2,\end{gathered}$$

а итоговое решение системы на интегральном многообразии:

$$P_M(t)=\begin{pmatrix}p_1(t)&p_2(t)\\p_2(t)&p_3(t)\end{pmatrix},$$

$$p_1(t)=\frac{(c_1+c_3)e^{\left(2+\frac{\rho}{\varepsilon}\right)t}+2u_3}{2d(t)}+\frac{r\rho}{\varepsilon},$$

$$p_2(t)=-\frac{g(c_1+c_3)e^{\left(2+\frac{\rho}{\varepsilon}\right)t}+2u_2}{2d(t)}+\frac{r\rho^2}{2\varepsilon},$$

$$p_3(t) = \frac{(g^2+\nu^2)(c_1+c_3)e^{\left(2+\frac{\rho}{\varepsilon}\right)t} + 2u_1}{2d(t)} + \frac{r\rho}{\varepsilon} + r\rho^2 + \frac{r\rho^3}{2\varepsilon},$$

где u_1–u_2 и c_1–c_3 — элементы матриц (29)–(30), g определяется выражением (28), ρ формулой (26), а ν — выражением (27). Мы получили явные выражения для расчета элементов ковариационной матрицы фильтра на интегральном многообразии, что позволяет построить скорректированный фильтр Калмана–Бьюси для системы (24). На рис. 3 приведены графики сравнения работы полного фильтра и фильтра на многообразии с постоянной ковариационной матрицей. Аналогично предыдущим результатам фильтр на многообразии может быть использован взамен полного при получении оценки состояния системы.

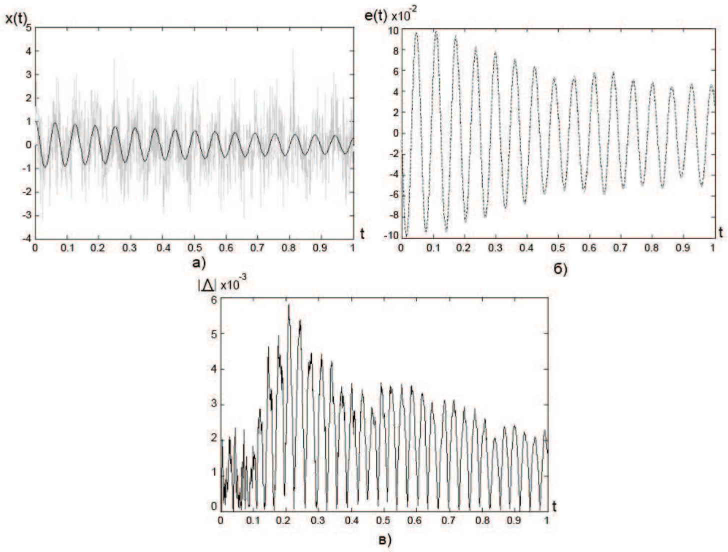

Рис. 3. Результаты численного моделирования динамики системы, полного фильтра Калмана–Бьюси и фильтра на интегральном многообразии: *а* — динамика системы (черным), значения выходной функции, поступающие на вход фильтров; *б* — ошибки полного фильтра (черный пунктир) и фильтра на интегральном многообразии (серый пунктир); *в* — модуль разницы между ошибками фильтров

Заключение

В работе рассмотрено сингулярно возмущенное уравнение Ланжевена. При определенных предположениях о величине коэффициентов в безразмерном уравнении (1) выделены три различных случая в решении задачи оптимального оценивания. В каждом случае имеются различные системы сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений Риккати для ковариационной матрицы фильтра Калмана–Бьюси. Для понижения размерности этих систем применен метод теории интегральных многообразий, с помощью которого из точного решения системы дифференциальных уравнений Риккати выделено решение, описывающее поведение коэффициентов ковариационной матрицы на интегральном многообразии медленных движений. Таким образом, в каждом случае получено решение уравнений Риккати, в котором отсутствуют быстрые переменные, что позволяет построить фильтр Калмана–Бьюси, обладающий важным свойством: для таких фильтров отсутствует необходимость получения выходного сигнала исследуемой системы с высокой частотой. Этот факт позволяет говорить о том, что подобные фильтры могут использоваться при условии ограниченных вычислительных ресурсов, что особенно важно в решении прикладных задач. Для сравнения работы полных фильтров с фильтрами, ковариационная матрица которых вычисляется на интегральном многообразии медленных движений, написана программа в математическом пакете MATLAB. Результаты численного моделирования работы фильтров показывают, что фильтры на интегральном многообразии могут эффективно использоваться взамен полных. При этом точность работы фильтров на интегральном многообразии сравнима с точностью работы полных фильтров.

Литература

[1] Papoulis A. Probability, random variables, and stochastic processes. New York: McGraw Hill, 1965. 583 p.

[2] Kokotovic P., Khalil H.K., O'Reilly J. Singular perturbation methods in control: analysis and design. New York: SIAM, 1999. 372 p.

[3] Singular Perturbation and Hysteresis, SIAM / M.P. Mortell [et. al.]. Philadelphia, 2005. P. 344.

[4] Горелова Е.Я. Устойчивость сингулярно возмущенных стохастических систем // Автомат. и телемех. 1997. № 7. 112–121.

[5] Osintsev M. and Sobolev V. Global Invariant Manifolds in a Problem of Kalman Filtering for Gyroscopic Systems, Global and Stochastic Analysis. V. 1. № 1, June 2011, 101–122.

[6] Соболев В.А. Сингулярные возмущения в линейно-квадратичной задаче оптимального управления // Автоматика и телемеханика. М.: Наука, 1991. С. 53–64.

[7] Воропаева Н.В., Соболев В.А. Геометрическая декомпозиция сингулярно возмущенных систем. М.: Физматлит, 2009. 256 с.

Поступила в редакцию 12/*III*/2012;
в окончательном варианте — 12/*III*/2012.

ORDER REDUCTION OF OPTIMAL ESTIMATION PROBLEM FOR LANGEVIN EQUATION

© 2012 M.S. Osintsev[2]

The question under discussion in this paper is the optimal estimation for singular perturbed Langevin equation. On the basis of assumptions about parameters and conditions where the movement is performed, we choose three cases which have curtain peculiarities during the reduction of the optimal estimation problem. For order reduction task the theoretical method of integral manifolds is used. It allows to get the solution of Riccati equations for covariance matrix of the filter and build the corrected Kalman–Bucy filter of a lower dimension.

Key words: Langevin equation, integral manifolds, ordinary differential equations, optimal estimation problem, order redustion, matrix Riccati equation.

Paper received 12/*III*/2012.
Paper accepted 12/*III*/2012.

[2]Osintsev Mikhail Sergeevich (`mishaosintsev@gmail.com`), Dept. Technical Cybernetics, Samara State Aerospace University (National Research University), Samara, 443011, Russian Federation.