УДК 517.946

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ СИСТЕМЫ БИЦАДЗЕ – ЯНУШАУСКАСА

© 2012 А.М. Абдрахманов[1], Р.П. Абдрахманова[2]

В полупространстве решена краевая задача для многомерной вырождающейся эллиптической системы Бицадзе – Янушаускаса.

Ключевые слова: эллиптические системы, краевая задача.

Как известно, любая эллиптическая система уравнений второго порядка с двумя искомыми функциями от двух переменных с постоянными коэффициентами приводится к одному из комплексных уравнений [1] $W_{z\bar z} = 0$ или $W_{\bar z\bar z} = 0$, где $W = u + iv$, $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$.

Класс, составляющий первое уравнение, хорошо изучен. Второе уравнение в вещественной форме записывается в виде системы

$$\begin{aligned} -\Delta u + 2\tfrac{\partial}{\partial x}(u_x - v_y) = 0;\\ -\Delta v + 2\tfrac{\partial}{\partial x}(u_y + v_x) = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Если вместо $W = u+iv$ взять $\overline{W} = u - iv$, то система $\overline{W}_{\bar z\bar z} = 0$ в вещественной форме запишется

$$\begin{aligned} -\Delta u + 2\tfrac{\partial}{\partial x}(u_x + v_y) = 0;\\ -\Delta v + 2\tfrac{\partial}{\partial x}(u_x + v_y) = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Системы (1) и (2) схожи по своей структуре. Система (1) была рассмотрена А.В. Бицадзе [2], который показал, что однородная задача Дирихле в круге имеет бесконечное число линейно независимых решений, а для разрешимости неоднородной задачи Дирихле требуется бесконечное число условий разрешимости.

А.И. Янушаускас [5] рассмотрел многомерный аналог системы (2)

$$-\Delta u_j + 2\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right) = 0, j = 1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

Далее в работе [6] им же была рассмотрена система

$$-\Delta u_j + \lambda\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right) = 0,\ \ j = 1, 2, \ldots, n, \tag{4}$$

которая совпадает с системой (3) при $\lambda = 2$.

[1]Абдрахманов Айдар Максутович (abdrai@mail.ru), кафедра математики Уфимского государственного технического университета, 450000, Российская Федерация, г. Уфа, ул. Карла Маркса, 12.

[2]Абдрахманова Римма Петровна (abdrai@mail.ru), кафедра вычислительной математики и кибернетики Уфимского государственного технического университета, 450000, Российская Федерация, г. Уфа, ул. Карла Маркса, 12.

Поэтому систему (4) будем называть многомерной системой Бицадзе – Янушаускаса.

Будем рассматривать систему n-дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с n искомыми функциями от n переменных с постоянными коэффициентами и действительным параметром λ

$$-x_n \Delta u_j + \lambda \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) = 0, \ \ j = 1, 2, \ldots, n. \tag{5}$$

Система (5) на плоскостях $x_n = 0$ и $x_n = \lambda$ вырождается. Продифференцируем j-ое уравнение системы (5) по x_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ и получим

$$-x_n \Delta \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \lambda \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) = 0, \ \ j = 1, 2, \ldots, n-1,$$

$$-\Delta u_n - x_n \Delta \frac{\partial u_n}{\partial x_n} + \lambda \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) = 0.$$

Сложим полученные соотношения и получим

$$(\lambda - x_n)\, \Delta \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) = \Delta u_n.$$

Умножим обе части последнего равенства на x_n и с учетом n-го уравнения системы (5) получим

$$x_n (\lambda - x_n)\, \Delta \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) = \lambda \frac{\partial}{\partial x_n} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right). \tag{6}$$

Обозначим через $H = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\partial u_k}{\partial x_k}$, тогда (6) примет вид

$$x_n (\lambda - x_n)\, \Delta H = \lambda \frac{\partial H}{\partial x_n}. \tag{7}$$

А система (5) примет вид

$$x_n \Delta u_j = \lambda \frac{\partial H}{\partial x_j}, j = 1, 2, \ldots, n. \tag{8}$$

Рассмотрим ограниченную область $D \subset \Re^n$ с границей $\Gamma = \Gamma_0 \bigcup \Gamma_1 \bigcup \Gamma_\lambda$, где Γ_0 — часть плоскости $x_n = 0$ с границей $\delta\Gamma_0$, Γ_λ — часть плоскости $x_n = \lambda$, а Γ_1 — боковая граница.

Для системы (5) рассмотрим следующие краевые условия:

$$u_j \Big|_{\Gamma} = f_j(x_1, \ldots, x_n), \ \ j = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{9}$$

$$H \Big|_{\Gamma_0 \bigcup \Gamma_1} = f_n(x_1, \ldots, x_n), \tag{10}$$

$$u_n \Big|_{\delta\Gamma_0} = f_{n+1}(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0), \tag{11}$$

где $f_j(x_1, \ldots, x_n)$, $j = 1, 2, \ldots, n-1$ — заданные дважды непрерывно дифференцируемые функции.

Будем изучать следующую задачу: найти регулярное в области D решение системы (5), удовлетворяющее условиям (9)–(11).

1. Решим сначала первую краевую задачу для вырождающегося дифференциального уравнения с частными производными (7) при условии (10).

При решении этой задачи будем следовать М.И. Вишику [4].

Перепишем уравнение (7) в виде:

$$L(H) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(x_n (\lambda - x_n) \frac{\partial H}{\partial x_i} \right) + 2 (x_n - \lambda) \frac{\partial H}{\partial x_n} = 0. \tag{12}$$

Уравнение (12) эллиптично при $0 < x_n < \lambda$.

Обозначим через Ω^0 множество всех непрерывных в D функций, имеющих ограниченные кусочно-непрерывные первые производные и обращающихся в ноль в некоторой граничной полоске области D. Через Gv обозначим градиент функции $v(x_1, x_2, ..., x_n)$: $Gv = \left(\frac{\partial v}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial v}{\partial x_n} \right)$, а множество, составленное из элементов $Gv, v \in \Omega^0$, через $\Re^0$. Введем в $\Re^0$ скалярное произведение

$$(Gu, Gv) = \int\limits_D \sum_{i,k=1}^{n} x_n (\lambda - x_n) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_k} dD.$$

Обозначим $\dot{\Re}$ — замыкание $\Re^0$ в норме (Gu, Gv). Обозначим через $\dot{\Omega}$ множество всех функций $v(X) : Gv \in \dot{\Omega}$. Ясно, что $G\dot{\Omega} = \dot{\Re}$, т. е. $\dot{\Omega}$ — область определения оператора градиента.

Обозначим Ω_1 — множество, состоящее из градиентов функции f, имеющих в области D обобщенные первые производные и $(Gf, Gf) < \infty$.

Пусть $f \in \Omega_1$, определим билинейную форму

$$B(f, v) = -(Gf, Gv) + \left(2 (x_n - \lambda) \frac{\partial f}{\partial x_n}, v \right), \;\; v \in \overline{\Omega}^0.$$

Билинейная форма $B(f, v)$ непрерывно зависит от элемента v, измеряемого в метрике $||v||^2 = (Gv, Gv)$.

Обобщенным решением уравнения (12) назовем функцию $H \in \Omega_1$, для которой $B(H, v) = 0$ для любой функции $v \in \overline{\Omega}^0$. Коэффициенты уравнения (12) — гладкие функции, поэтому все его обобщенные решения являются дважды непрерывно дифференцируемыми в D решениями уравнения (12).

Первая краевая задача (10), (12) состоит в нахождении решения H уравнения (12), принимающего на $\Gamma_0 \bigcup \Gamma_1$ те же значения, что и заданная функция $f_n \in \Omega_1 \, : \, f_n - H = w \in \dot{\Omega}$, и остающегося ограниченным при $x_n \to \lambda$. При сделанных допущениях эта задача имеет единственное решение [4]

$$H = f_n - w,$$

где $w = G^{-1} \left(-E + K^* \right)^{-1} g$, оператор K^* сопряженный с оператором

$$K : (Gu, KGv) = -2 \left(u, (x_n - \lambda) \frac{\partial v}{\partial x_n} + v \right).$$

Действительно, при $f_n \in \Omega_1$ в пространстве градиентов $\dot{\Re}$ уравнение (12) можно реализовать в виде

$$B(f, v) = (g, Gv),$$

где $g \in \dot{\Re}$, и найти такую функцию $w \in \dot{\Omega}$, чтобы

$$B(f - w, v) = 0, \;\; v \in \overline{\Omega}^0$$

или

$$B(f_n, v) = B(w, v).$$

2. Определим $n-1$ компоненты решения задачи.

По известной функции H определим функции $u_j, j = 1, 2, \ldots, n-1$ из уравнений (8) и краевых условий (9). Уравнения (8) запишем в виде:

$$M(u_j) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(x_n \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - \frac{\partial u_j}{\partial x_n} = \lambda \frac{\partial H}{\partial x_j},$$
$$j = 1, 2, \ldots, n.$$

Для доказательства того, что решения уравнений (8) принимают наперед заданные значения при $x_n = 0$, покажем, что существует барьер А.В. Бицадзе [3].

Барьер будем искать в виде

$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left(x_1 - x_1^0\right)^2 + \left(x_2 - x_2^0\right)^2 + \ldots + \left(x_{n-1} - x_{n-1}^0\right)^2 + x_n^\beta,$

$0 < \beta < 1$.

Покажем, что так выбранная функция является барьером.

1. Рассмотрим полушаровую окрестность точки $Q\left(x_1^0, x_2^0, \ldots x_{n-1}^0, 0\right)$

$$\left(x_1 - x_1^0\right)^2 + \left(x_2 - x_2^0\right)^2 + \ldots + \left(x_{n-1} - x_{n-1}^0\right)^2 + x_n^2 < \rho^2, \;\; x_n \geqslant 0.$$

Понятно, что $v\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ непрерывна в этой окрестности.

2. $v(Q) = 0$.

3. $v\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) > 0$ во всех точках окрестности, отличных от Q.

4. $M(v) = 2x_n(n-1) + \beta(\beta-1)x_n^{\beta-1} < 0$ для достаточно малых x_n.

Так как решения уравнений (8) как функции переменного x_n при $x_n \to 0$ ведут себя как решения обыкновенного дифференциального уравнения $x_n \frac{d^2\varphi_j(x_n)}{dx_n^2} = \lambda \frac{\partial H}{\partial x_j}$, то

$$\varphi_j(x_n) = \lambda \int_0^{x_n}\int_0^{x_n} \frac{1}{x_n}\frac{\partial H}{\partial x_j} dx_n dx_n, \;\; j = 1, 2, \ldots, n$$

ограничены при условии $H\big|_{x_n=0} = 0$.

Следовательно, существует решение задачи (8), (9).

3. Найдем u_n по известным H и $u_j, j = 1, 2, \ldots, n-1$ из соотношений

$$\Delta u_n = \frac{\lambda}{x_n}\frac{\partial H}{\partial x_n}, \tag{13}$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_n} = H - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \varphi(x_1, ..., x_n). \tag{14}$$

Аналогично пункту 2 решение уравнения (13) принимает наперед заданные значения при $x_n = 0$.

Проинтегрируем равенство (14)

$$u_n = \int_0^{x_n} \varphi\left(x_1, \ldots, x_n\right) dx_n + \psi(x_1, \ldots, x_{n-1}). \tag{15}$$

Подставив (15) в (13), имеем

$$\Delta u_n = \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} + \int\limits_0^{x_n} \Delta_1 \varphi dx_n + \Delta_1 \psi, \tag{16}$$

где $\Delta_1 = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} = \Delta - \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$.

Откуда

$$\Delta u_n = \Delta_1 \psi + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} + \int\limits_0^{x_n} \Delta \varphi dx_n - \int\limits_0^{x_n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_n^2} dx_n,$$

$$\Delta u_n = \Delta_1 \psi + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}\Big|_{x_n=0} + \int\limits_0^{x_n} \Delta \varphi dx_n.$$

А так как

$$\Delta \varphi = \Delta H - \Delta \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = \Delta H - \frac{\lambda}{x_n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial^2 H}{\partial x_k^2},$$

получим

$$\Delta u_n = \Delta_1 \psi + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}\Big|_{x_n=0} + \int\limits_0^{x_n} \left(\Delta H - \frac{\lambda}{t} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial^2 H}{\partial x_k^2} \right) dt.$$

Преобразуем подынтегральное выражение, используя формулу (7)

$$\Delta H - \frac{\lambda}{x_n} \Delta H + \frac{\lambda}{x_n} \frac{\partial^2 H}{\partial x_n^2} = \frac{x_n - \lambda}{x_n} \Delta H + \frac{\lambda}{x_n} \frac{\partial^2 H}{\partial x_n^2} =$$

$$= -\frac{\lambda}{x_n^2} \frac{\partial H}{\partial x_n} + \frac{\lambda}{x_n} \frac{\partial^2 H}{\partial x_n^2} = \lambda \frac{\partial}{\partial x_n} \left(\frac{1}{x_n} \frac{\partial H}{\partial x_n} \right).$$

Итак,

$$\Delta u_n = \Delta_1 \psi + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}\Big|_{x_n=0} + \lambda \int\limits_0^{x_n} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{t} \frac{\partial H}{\partial t} \right) dt =$$

$$= \frac{\lambda}{x_n} \frac{\partial H}{\partial x_n} + \Delta_1 \psi + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\lambda}{t} \frac{\partial H}{\partial t} \right)\Big|_{t=0}$$

Следовательно, функция $\psi(x_1, \ldots, x_{n-1})$ определяется из уравнения

$$\Delta_1 \psi + \lim_{t \to 0} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\lambda}{t} \frac{\partial H}{\partial t} \right) = 0. \tag{17}$$

Теорема. Краевая задача (9), (10) для системы (8), где $H, f_j, j = 1, 2, \ldots, n$ — дважды непрерывно дифференцируемые функции, H — ограничена при $x_n \to \lambda$ и равна нулю при $x_n = 0$, разрешима, ее решения $u_j, j = 1, 2, \ldots, n-1$ единственны, а компонента u_n находится по формуле (15) с точностью до функции $\psi(x_1, \ldots, x_{n-1})$, определяемой уравнением (17).

Литература

[1] Фролов П.С. О компонентах связности вещественных эллиптических систем на плоскости // Доклады АН СССР. 1968. Т. 181. № 6. С. 1350–1353.

[2] Бицадзе А.В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М.: Наука, 1966.
[3] Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981.
[4] Вишик М.И. Краевые задачи для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области // Математический сборник, 1954. Т. 35 (77), № 3. С. 513–568.
[5] Янушаускас А.И. О многомерном аналоге системы А.В. Бицадзе // Доклады АН СССР, 1978. Т. 238, № 4. С. 816–819.
[6] Янушаускас А.И. Задача о наклонной производной теории потенциала. Новосибирск, 1985.

Поступила в редакцию 16/*III*/2012;
в окончательном варианте — 16/*III*/2012.

A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR DEGENERATIVE SYSTEM OF EQUATIONS OF BITSADZE –YANUSHAUSKAS

 I.M. Abdrakhmanov[3] R.P. Abdrakhmanova[4]

In the article, a boundary value problem for a singular many-dimensional system of elliptic type equations in half-space is considered.

Key words: elliptic system, boundary value problem.

Paper received 16/*III*/2012.
Paper accepted 16/*III*/2012.

[3]Abdrakhmanov Idar Maksutovich (abdrai@mail.ru), the Dept. of Mathematics, Ufa State Aviation Technical University, Ufa, 450000, Russian Federation.
[4]Abdrakhmanova Rimma Petrovna (abdrai@mail.ru), the Dept. of Calculus Mathematics and Cybernetics, Ufa State Aviation Technical University, Ufa, 450000, Russian Federation.