

## ОБЗОР ИНКРЕМЕНТАЛЬНЫХ И ПРЯМЫХ МЕТОДОВ ОПРЕДЕЛЕНИЯ АСИМПТОТИЧЕСКОГО СТАБИЛИЗИРОВАННОГО ПОВЕДЕНИЯ НЕУПРУГИХ КОНСТРУКЦИЙ<sup>1</sup>

© 2013 В.А. Туркова<sup>2</sup>

В статье представлен обзор методов определения асимптотического стабилизированного состояния неупругой конструкции, находящейся под действием циклической нагрузки. В связи с увеличением интереса к знанию асимптотического поведения тела под воздействием периодического нагружения стали развиваться инкрементальные, с использованием метода конечного элемента, и прямые методы определения состояния конструкции, к которым относятся методы теории оптимального контроля и разложения остаточных напряжений в ряд Фурье.

**Ключевые слова:** циклическое нагружение, асимптотическое поведение конструкции, прямые методы, теория оптимального контроля, приспособляемость, циклическая пластичность, рэтчеттинг, метод конечного элемента.

### 1. О поведении неупругих тел под действием периодической нагрузки

Известно [1–3], что для упругопластических тел, находящихся под действием периодической внешней нагрузки, возможны три типа асимптотического поведения (рис. 1): приспособляемость, когда конструкция ведет себя упругим образом после определенного числа циклов нагружения; циклическая пластичность (пластическая или малоцикловая усталость), когда нагрузки вызывают чередование пластических деформаций разных знаков; рэтчеттинг – прогрессирующая пластическая деформация. Рэтчеттинг постепенно ведет к разрушению конструкции вследствие явления накопления пластических деформаций и считается опасным. При проектировании элементов конструкций этого типа асимптотического поведения следует избегать. Возникновение опасного состояния зависит от характера внешней нагрузки и конфигурации тела. Наиболее предпочтительным асимптотическим режимом является приспособляемость [1; 2].

В качестве примеров конструкций, нагруженных периодически, можно привести различные сосуды, находящиеся под давлением, авиадвигатели и их составляющие, детали общего машиностроения. Среди гражданских инженерных разрабо-

<sup>1</sup>Работа поддержана РФФИ, гранты № 12-08-00390 и № 12-01-16066.

<sup>2</sup>Туркова Вера Александровна ([turkovava@samsu.ru](mailto:turkovava@samsu.ru)), кафедра математического моделирования в механике Самарского государственного университета, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

ток – это дамбы, разного рода покрытия, морские нефтедобывающие платформы, здания и мосты во время сейсмической активности [4].

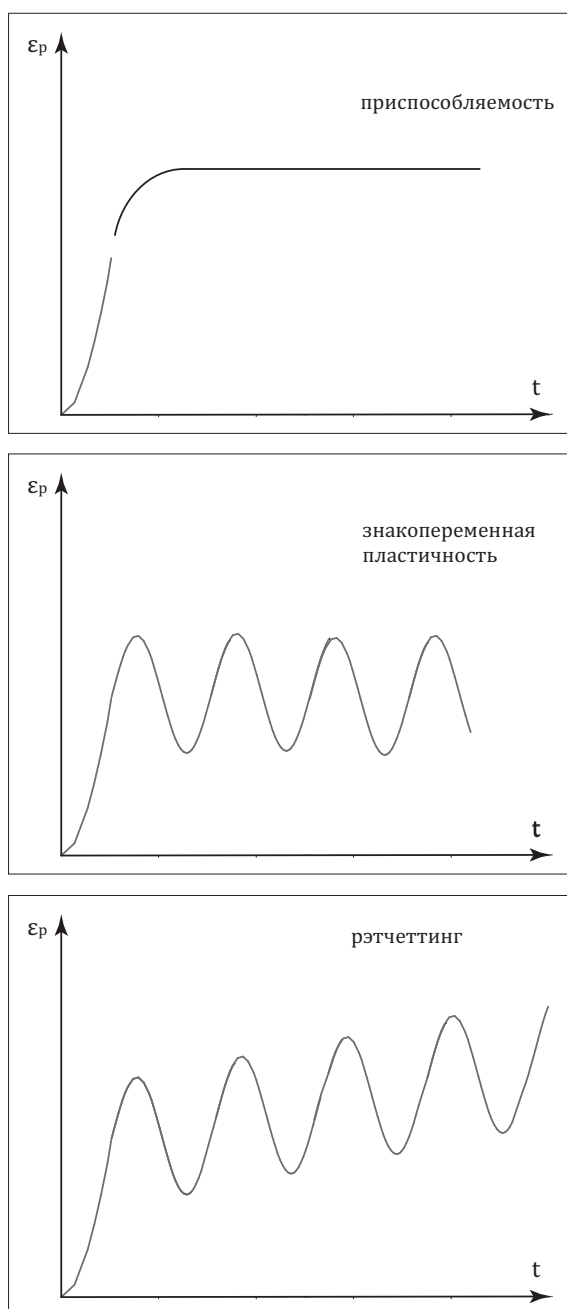


Рис. 1. Типы асимптотического поведения

Однако стоит отметить, что для описания явления усталостного нагружения знания поведения упругопластического тела под нагрузкой недостаточно. В усло-

виях приспособляемости и циклической пластичности необходима оценка поля остаточных напряжений для того, чтобы сформулировать соответствующий критерий усталостного разрушения и проверить его выполнение. Поэтому знание асимптотического поведения упругопластического или упруговязкопластического тела под нагрузкой имеет первостепенное значение.

Наиболее распространенным и применяемым путем определения асимптотических полей напряжений и перемещений в твердом теле является пошаговый или инкрементальный анализ [1]. Тем не менее этот путь сопряжен с большим количеством вычислений, которые требуют значительных временных затрат и аккуратности счета, особенно для вязкоупругих тел, для которых сходимость решения к асимптотическому является медленной [5].

Наличие вышеперечисленных трудностей ведет к повышению интереса к прямым методам, позволяющим получить необходимую информацию, не прибегая к пошаговым вычислениям всей истории нагружения [1; 3; 6–8].

## 2. Приспособляемость упругопластических тел при переменных нагрузках

В упругопластичности существует два достаточно хорошо развитых класса прямых методов. Первый класс методов, основанный на классических теоремах Койтера, позволяет найти область приспособляемости конструкции, находящейся под действием Т-периодического нагружения. Второй класс прямых методов позволяет определить асимптотическое состояние конструкции при заданном нагружении как внутри, так и вне области приспособляемости [1].

### 2.1. Статическая теорема приспособляемости

Выяснение условий приспособляемости опирается на анализ упругопластического равновесия тела, который связан с математическими трудностями и возможен только в простейших задачах. Статическая и кинематическая теоремы Койтера о приспособляемости устраняют эту трудность [2]. Эти теоремы позволяют определить область приспособляемости в пространстве параметров нагружения [1].

Нижняя граница приспособляемости определяется статической теоремой приспособляемости Мелана [2], а верхняя граница находится на основе кинематической теоремы приспособляемости Койтера [9]. Для рассматриваемого идеального упругопластического тела под действием периодического нагружения приспособляемость наступит, если возможно найти такое, не зависящее от времени поле остаточных напряжений  $\bar{\sigma}_{ij}$ , что при любых изменениях нагрузки в заданных пределах сумма этого поля с полем напряжений  $\sigma_{ij}^*$  безопасна:

$$\sigma_{ij}^S = \sigma_{ij}^* + \bar{\sigma}_{ij}, \quad (2.1)$$

$$f(\sigma_{ij}^S) < 0. \quad (2.2)$$

Это достаточное условие приспособляемости. Приспособляемость невозможна, если не существует никакого не зависящего от времени поля остаточных напряжений  $\bar{\sigma}_{ij}$ , так что сумма (2.1) допустима:

$$f(\sigma_{ij}^S) \leq 0. \quad (2.3)$$

Это необходимое условие приспособляемости [2]. Теорема была сформулирована Меланом в 1938 г. и впоследствии была дополнена Койтером в 1956 г. Теорема формулировалась для упругого идеально пластического материала, позднее была дополнена на случай обобщенных стандартных материалов класса С [1].

## 2.2. Кинематическая теорема приспособляемости

Теорема Койтера заключается в следующем [9]. Приспособляемость невозможна (т. е. конструкция разрушится), если можно найти такие внешние нагрузки  $X_i(t), p_i(t)$ , величины которых лежат в заданных пределах, и такой допустимый цикл скоростей пластической деформации  $\dot{\epsilon}''_{ij0}(t)$ , что будет справедливо неравенство:

$$\int_0^T \left\{ \int X_i \dot{u}_{i0} dv + \int_{S_p} p_i \dot{u}_{i0} dS \right\} dt > \int_0^T F(\dot{\epsilon}''_{ij0}) dv. \quad (2.4)$$

Здесь  $F(\dot{\epsilon}''_{ij0})$  — диссипативная функция для пластической энергии в цикле скоростей деформации  $\dot{\epsilon}''_{ij0}(t)$ . Конструкция приспособится, если можно найти число  $k > 1$ , обладающее тем свойством, что для любых внешних нагрузок  $X_i(t), p_i(t)$ , величины которых лежат в заданных пределах, и для любых допустимых циклов скоростей пластической деформации  $\dot{\epsilon}''_{ij0}(t)$  будет справедливо неравенство:

$$k \int_0^T \left\{ \int X_i \dot{u}_{i0} dv + \int_{S_p} p_i \dot{u}_{i0} dS \right\} dt \leq \int_0^T F(\dot{\epsilon}''_{ij0}) dv. \quad (2.5)$$

Верхняя граница таких чисел  $k$  будет коэффициентом запаса по приспособляемости [9]. Из теорем Мелана – Койтера следует, что приспособляемость не зависит от начального состояния системы. Это накладывает некоторые ограничения на использование данного метода для определения асимптотического состояния элемента конструкции, так как поле остаточных напряжений в конструкции зависит от начального состояния системы [1].

## 3. Первые аналитические результаты

По всей видимости, впервые задачи о периодическом нагружении упругопластических конструкций были рассмотрены Дж. Бри в 1967 году в статье "Упругопластическое поведение тонких труб, подверженных внутреннему давлению и высокотемпературным потокам в приложении к топливным элементам ядерных реакторов" [6].

В статье рассматривается проблема об установлении поведения материала оболочки (топливного бака) под одновременным действием внутреннего давления и переменных высокотемпературных потоков, возникающая при проектировании топливных элементов ядерных реакторов. Стенка бака подвержена действию высокой температуры во время работы реактора и нулевой температуре, когда реактор выключен. В реальных условиях эксплуатации бак подвержен высоким температурным напряжениям, которые изменяются циклически с включением и выключением реактора. Внутреннее давление создается газообразными продуктами разложения топлива, которое содержится в баке. Давление возрастает по мере сгорания топлива и соответственно со временем. В [6] в первую очередь рассматривается физическое явление, которое возникает вследствие взаимодействия циклической нагрузки и давления. Поэтому давление считается постоянным. Если

считать материал бака упругопластическим, то приложенные комбинированная температурная нагрузка и давление при превышении предела текучести материала в любой области вызовут его пластическое течение. Когда реактор выключен, в материале бака возникают остаточные напряжения, и они могут быть достаточно большими, чтобы стать причиной дальнейшего пластического течения. Таким образом, пластические деформации могут быть вызваны каждым включением — выключением реактора. Такое поведение может стать причиной разрушения бака двумя разными способами и составляет один из ограничивающих факторов при проектировании вышеназванного топливного элемента. При определенных условиях нагружения в течение каждого цикла в конструкции появляются однонаправленные пластические деформации и из-за их необратимости имеют эффект накопления, который является причиной прогрессирующего роста рэтчеттинга бака. Так как рэтчеттинг может привести к разрушению, необходимо знать об условиях нагружения, которые ведут к его возникновению, и иметь возможность оценивать деформацию на каждом цикле. Циклическая пластичность является вторым возможным способом разрушения бака. В этом случае пластическое течение возникает во время каждого температурного цикла, но там, где в одной части цикла возникает растягивающая пластическая деформация, в другой части цикла возникает сжимающая, такой же величины. Эта форма повторяющегося деформирования вызывает усталостное разрушение конструкции. Поэтому желательно было бы знать, когда возникает циклическая пластичность, и иметь возможность оценивать величину изменения пластических деформаций, которая устанавливает число циклов до разрушения. Представленная выше проблема усложняется эффектом ползучести, когда он возникает.

В [6] рассматривается простое одноосное нагружение модели бака и представлены уравнения, которые определяют решение задачи. Во втором разделе [6] исследуется задача о нагружении сферы, выполненной из упрочняющегося материала с пределом текучести, независимым от температуры. Выведены критерии начала рэтчеттинга и знакопеременной пластичности, которые впервые были получены Миллером, и сделаны оценки пластических деформаций, вызываемых каждым циклом. В третьей части такой же критерий и пластические деформации в каждом цикле определены для материала, у которого предел текучести в начале работы реактора отличается от предела текучести в конце и меняется в зависимости от температуры. Сформулированы некоторые предположения об эффекте упрочнения и критерии Миллера, а также сделана попытка включить самый худший из возможных — эффект ползучести [6].

Дж. Бри также впервые получил диаграмму для тонкой сферической оболочки, на которой типы асимптотического поведения (приспособляемость, циклическая пластичность, рэтчеттинг) представлены как функции параметров нагружения [1]. Впоследствии т. н. Бри-диаграмма получила широкое распространение и упоминается в ряде статей [1; 7; 8].

#### 4. Методы компьютерного моделирования

Наряду с численными методами для определения асимптотического состояния конструкции широко используются методы компьютерного моделирования. В свою очередь, разработчики программных комплексов для конечно-элементных прочностных расчетов, откликаясь на современные требования, предлагают ряд специализированных функций, которые реализуют циклическое нагружение и позволя-

ют вычислять асимптотическое состояние конструкций без выполнения расчетов на каждом цикле.

Применению методов компьютерного моделирования для определения асимптотического состояния конструкции под действием периодической нагрузки также посвящено несколько работ [3; 8; 10; 11].

Большинство используемых в настоящее время для отыскания асимптотического состояния конструкции численных методов основываются на теоремах приспособляемости и стандартных алгоритмах программирования и позволяют найти только состояние приспособляемости и границу области приспособляемости.

Наиболее интересной представляется работа [3], в которой авторы предлагают собственный метод отыскания асимптотического состояния конструкции с использованием МКЭ (метод конечного элемента) и сравнивают полученные результаты с результатами, полученными при помощи специализированной процедуры *direct cyclic* [4] конечно-элементного пакета Simulia Abaqus.

Для тех случаев, когда известно, что отклик на приложенную периодическую нагрузку будет также периодическим и стабилизированным, данная процедура вычисляет сразу стабилизированное состояние конструкции без вычисления промежуточных циклов, которые к этому состоянию ведут [4].

Возможности *direct cyclic* обеспечивают стабильную и вычислительно выгодную процедуру с единообразными характеристиками сходимости, которая позволяет получить стабилизированное состояние конструкции, подверженной циклическому нагружению. Метод основан на разложении остаточных напряжений в ряд Фурье внутри цикла нагружения. Коэффициенты находятся итерационным путем, интегрируя скорости остаточных напряжений в течение цикла [3]. Метод очень экономичен, особенно для больших моделей, потому что матрица жесткости вычисляется лишь однажды.

В статье рассматривается задача о поведении упругопластической квадратной пластины с вырезом под действием двухосного нагружения. Отношение диаметра  $D$  отверстия пластины к длине стороны пластины  $L$  равно 0,2. Отношение толщины пластины к длине стороны  $L$  равно 0,05. Пластина сделана из стали со следующими характеристиками: модуль Юнга  $= 0,21 \cdot 10^5$  кН/см<sup>2</sup>, коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$  и предел текучести  $\sigma_y = 36$  кН/см<sup>2</sup>. Рассматривается случай, когда длина стороны пластины  $L = 20$  см [3]. В силу симметрии достаточно моделировать четверть пластины. Конструкция разбита на 98 восьмиузловых изопараметрических элементов. Представлены различные случаи нагружения, которые были выбраны с целью получения различных типов асимптотического поведения.

1. Первый случай циклического нагружения (рис. 2):

$$P_y(t) = 0.65\sigma_y \sin^2(\pi t/T), \quad P_x(t) = 0.$$

Распределение напряжений представлено на рис. 3. Асимптотическое состояние конструкции в данном случае – приспособляемость [3].

2. Второй случай циклического нагружения (рис. 4):

$$P_y(t) = 0.65\sigma_y \sin(2\pi t/T), \quad P_x(t) = 0.$$

Величина данной нагрузки во многих точках цикла выходит за границы области приспособляемости [12]. Типом асимптотического поведения конструкции при рассмотренном нагружении будет знакопеременная пластичность (рис. 5) [3].

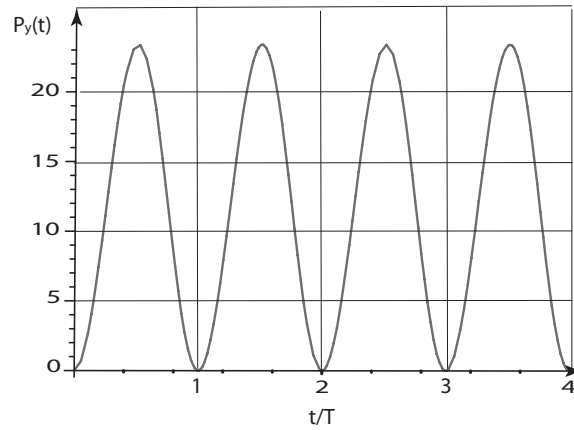


Рис. 2. Вариация нагрузки с течением времени (случай нагружения 1)

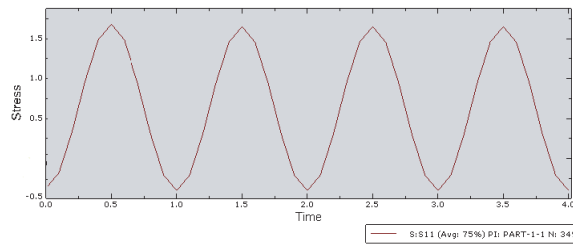


Рис. 3. Распределение напряжений (случай нагружения 1 — приспособляемость)

3. Третий случай циклического нагружения является двухосным. Одна нагрузка постоянна, а другая зависит от времени (рис. 6):

$$P_y(t) = 0.8\sigma_y \sin^2(\pi t/T), \quad P_x(t) = 0.6\sigma_y = const.$$

Комбинация двух нагрузок приводит к превышению границ области приспособляемости [12]. Распределение пластических деформаций представлено на рис. 7. Очевидно, что хотя в данном случае пластические деформации колеблются около ненулевого значения (рис. 8), тип асимптотического поведения — циклическая пластичность [3].

4. Четвертый случай циклического нагружения также является двухосным. Одна нагрузка постоянна, другая изменяется со временем (рис. 9):

$$P_y(t) = 0.5\sigma_y \sin^2(\pi t/T), \quad P_x(t) = 0.85\sigma_y = const.$$

Нагружение во многих точках циклах превышает границу, за которой наблюдается прогрессирующее пластическое течение [12]. Результат нагружения представлен на рис. 10, где отчетливо видна область высоких пластических деформаций [3].

Проведенное в [3] компьютерное имитационное моделирование периодического нагружения пластины с центральным круговым отверстием показало, что инкрементальный пошаговый анализ циклического нагружения сопряжен с большим

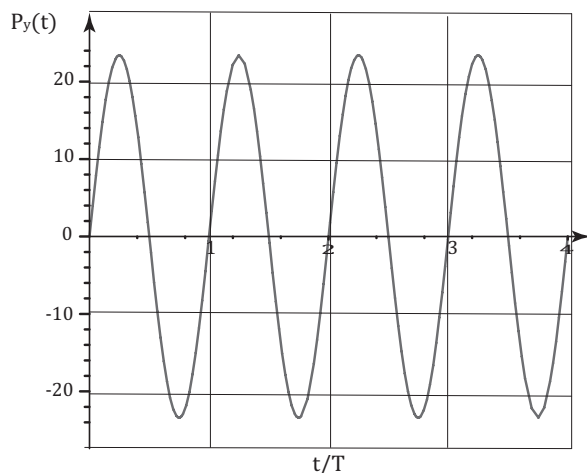


Рис. 4. Вариация нагрузки с течением времени (случай нагружения 2)

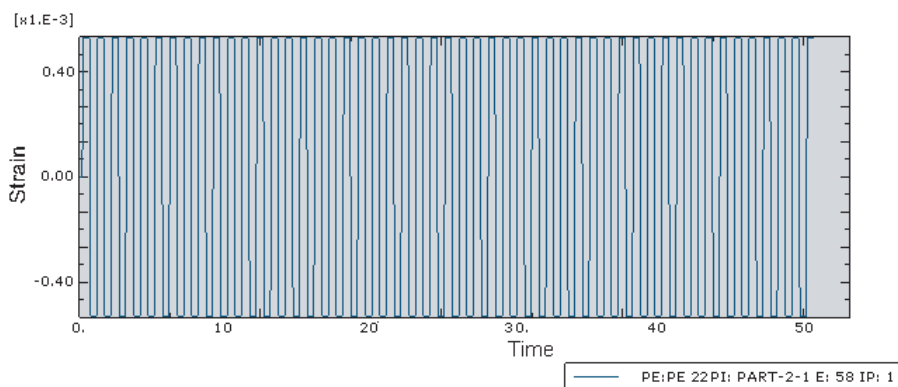


Рис. 5. Зависимость пластических деформаций от времени. Знакопеременная пластичность (случай нагружения 2)

объемом вычислений и значительными временными затратами, даже для такой простой конструкции, как пластина. Поэтому авторы [3] предлагают новый прямой метод, который имеет физическую основу и может предсказать любое асимптотическое состояние конструкции под действием заданного нагружения.

Метод задействует периодическую природу распределения остаточных напряжений в устоявшемся асимптотическом цикле (4.1) [3].

$$\rho_{ij}(\tau) = \frac{a_{0,ij}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_{k,ij} \cos 2k\pi\tau + b_{k,ij} \sin 2k\pi\tau). \quad (4.1)$$

Поэтому после уравновешивания упругой части напряжений с внешней нагрузкой неизвестная часть остаточных напряжений разлагается в ряд Фурье, чьи коэффициенты вычисляются итеративным путем в определенных временных точках внут-



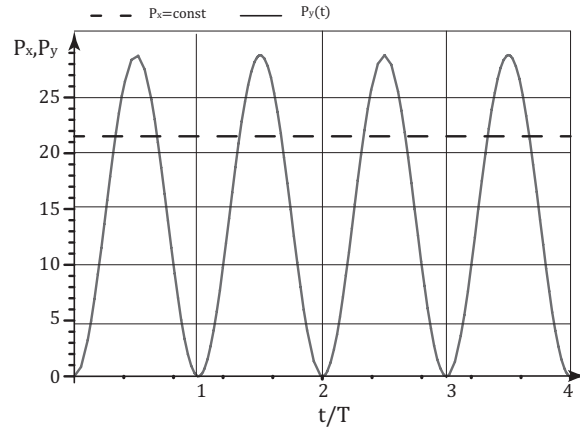


Рис. 6. Вариация нагрузки с течением времени (случай нагружения 3)

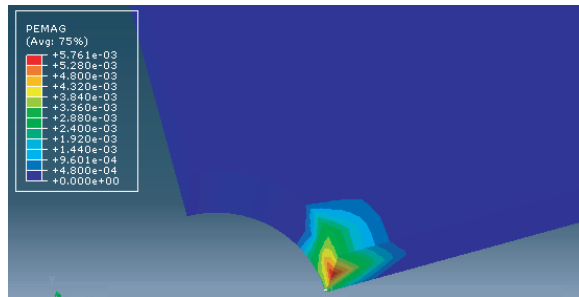


Рис. 7. Локальная область пластических деформаций (случай нагружения 3)

ри цикла, исходя из удовлетворения условиям совместности и равновесия, и затем интегрируются. Алгоритм единообразно сходится к реальным периодическим остаточным напряжениям при нагрузках, не превышающих предела текучести, или к небезопасным периодическим напряжениям, которые говорят о появлении пластических деформаций внутри цикла. Метод также устанавливает, приведет ли приложенная нагрузка конструкцию к рэтчеттингу или к циклической пластичности. Метод [3] сформулирован на основе конечноэлементного подхода и представляется перспективным.

В другой рассмотренной работе [12] теорема о верхней границе приспособляемости была расширена и применена к нагрузкам, выходящим за область приспособляемости. Теорема [13] дает возможность определить диапазон нагрузок, при которых реализуются режимы приспособляемости и циклической пластичности. Запишем кинематическую теорему приспособляемости в следующем виде:

$$J(\varepsilon_{ij}', \lambda) = \int_0^{\Delta t} \int_V (\sigma'_{ij} - \lambda \hat{\sigma}_{ij}) \varepsilon'_{ij} dt dV, \quad (4.2)$$

где  $\lambda$  – параметр нагрузки. Для заданной истории нагружения, например заданного  $\lambda$ , доказано, что  $J(\varepsilon_{ij}', \lambda) \geq 0$ , а  $J(\varepsilon_{ij}', \lambda) = 0$ , когда  $\varepsilon_{ij}' = \varepsilon_{ij}^{pr}$ , где  $\varepsilon_{ij}^{pr}$  –

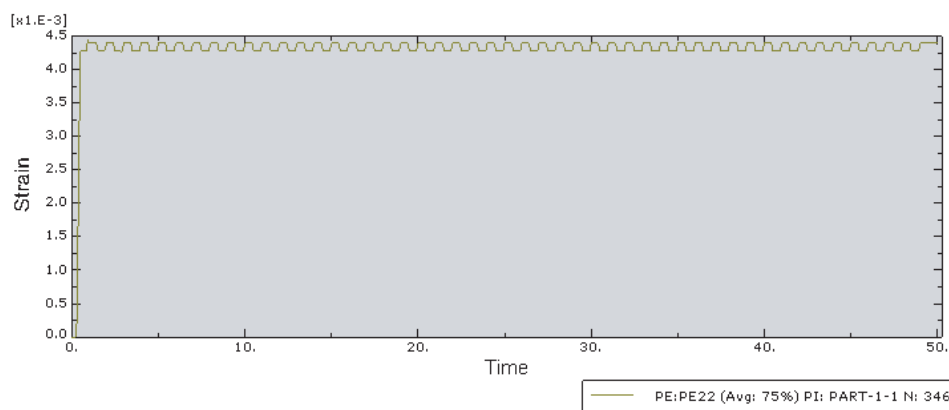


Рис. 8. Зависимость пластических деформаций от времени (случай нагружения 3)

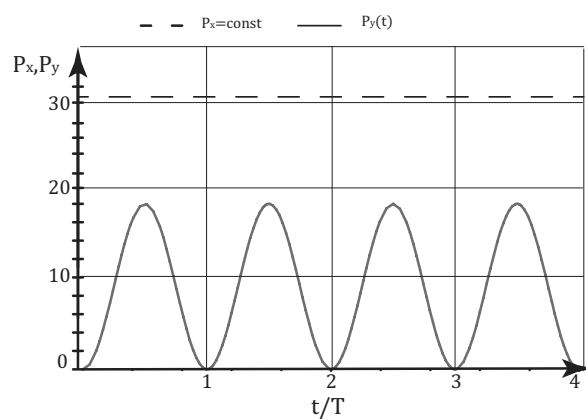


Рис. 9. Вариация нагрузки с течением времени (случай нагружения 4)

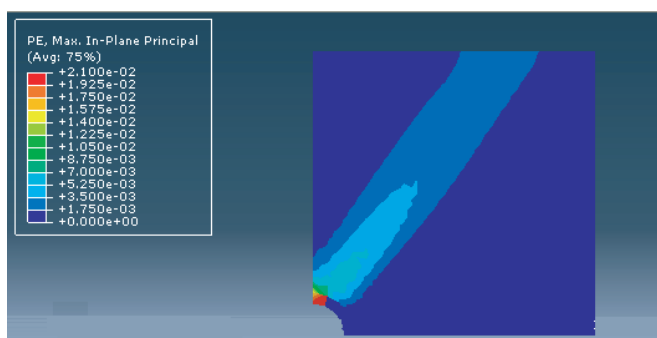


Рис. 10. Рэтчеттинг (случай нагружения 4)

добавочные пластические деформации внутри цикла, является точным периодическим решением. Исходя из этих условий, процесс нахождения асимптотического состояния конструкции может быть превращен в двухступенчатую последовательную минимизацию функционала. Первая ступень включает оценку изменяющегося поля остаточных напряжений, а второй с уже известным полем остаточных напряжений включает оценку предела рэтчеттинга. Процесс сначала оценивает вариацию максимума пластических деформаций для различной нагрузки и температуры. Потом следует оценить возможность конструкции выдерживать дополнительную нагрузку, перед тем как пластические деформации начнут прогрессировать. Граница появления рэтчеттинга в конструкции, полученная вышеописанным способом, проверяется при помощи результатов пошагового анализа [12].

## 5. Теория оптимального контроля

Французской школой механики предложен эффективный метод отыскания асимптотического состояния тела, подверженного циклическому нагружению. Он относится ко второму классу прямых методов, описанных в п. 2, позволяющих определить асимптотическое состояние при заданной нагрузке. Метод базируется на теории оптимального контроля [14] и был предложен М. Пенье и К. Штольцем в [1]. Используя теорию оптимального контроля, установление асимптотического состояния сводится к задаче минимизации [1].

### 5.1. Основные положения

Рассмотрим упруговязкопластическое тело, находящееся под действием циклической нагрузки и занимающее некоторый объем  $V$ . На части границы тела  $\Gamma^T$  заданы поверхностные силы  $T^d(t)$ , на другой части границы  $\Gamma^U$  – перемещения  $u^d(t)$ . Плотность объемных сил  $f^d(t)$  задана в объеме  $V$ . Предполагается, что функции  $T^d(t)$ ,  $u^d(t)$ ,  $f^d(t)$  являются периодическими с одним и тем же периодом  $T$ .

Рассматриваются обобщенные стандартные материалы, предложенные Хальфеном и Нгуэном в 1975 г. Переменными состояния являются общая деформация  $\varepsilon$ , пластическая деформация  $\varepsilon^p$  и некоторые внутренние параметры  $\alpha$ . Свободная энергия  $W(\varepsilon - \varepsilon^p, \alpha)$  и потенциал диссипации  $\varphi$  определяют поведение и отклик материала. Напряжение  $\sigma$  и термодинамическая сила  $A$ , связанная с  $\alpha$ , определяются следующими уравнениями [1; 2; 6; 9; 14]:

$$\sigma = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} = -\frac{\partial W^p}{\partial \varepsilon}, \quad A = -\frac{\partial W}{\partial \alpha}. \quad (5.1)$$

Далее будут рассматриваться обобщенные стандартные материалы класса  $C$ , для которых была доказана сходимости напряжений к  $T$ -периодическому решению. Свободная энергия для материалов этого класса принимает вид:

$$W(\varepsilon - \varepsilon^p, \alpha) = \frac{1}{2}(\varepsilon - \varepsilon^p):L:(\varepsilon - \varepsilon^p) + \frac{1}{2}\alpha:Z:\alpha, \quad (5.2)$$

где  $L$  и  $Z$  – положительно определенные линейные симметричные операторы.

Потенциал  $\varphi$  является положительной выпуклой функцией переменных  $(\sigma, A)$  таких, что эволюция  $\varepsilon^p$  и  $\alpha$  задается законом нормального пластического течения:

$$\dot{\varepsilon}^p = \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma}(\sigma, A), \quad \dot{\alpha} = \frac{\partial \varphi}{\partial A}(\sigma, A). \quad (5.3)$$

Разрешающая система уравнений имеет вид:  
уравнение равновесия

$$\operatorname{div} \dot{\sigma} + f^d = 0, \quad x \in V, \quad (5.4)$$

граничные условия

$$\dot{\sigma} \cdot n = \dot{T}^d, \quad x \in \Gamma^T, \quad (5.5)$$

$$u = u^d, \quad x \in \Gamma^U, \quad (5.6)$$

условия Коши

$$\dot{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \dot{u} + \nabla \dot{u})^T, \quad x \in V, \quad (5.7)$$

определяющие уравнения материала

$$\dot{\varepsilon} = L^{-1} : \dot{\sigma} + \dot{\varepsilon}^p, \quad x \in V, \quad (5.8)$$

$$\dot{A} = -Z : \dot{\alpha}, \quad x \in V, \quad (5.9)$$

$$\dot{\varepsilon}^p = \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma}(\sigma, A), \quad \dot{\alpha} = \frac{\partial \varphi}{\partial A}(\sigma, A), \quad x \in V. \quad (5.10)$$

## 5.2. Существование периодического решения

Доказано, что при действии периодической нагрузки с периодом, равным  $T$ , и поле остаточных напряжений, и пластические деформации стремятся к периодическому решению с тем же периодом с увеличением времени. Результаты сходимости напряжений к  $T$ -периодическому решению для обобщенных стандартных материалов класса  $C$ , находящихся под действием  $T$ -периодического нагружения, могут быть сформулированы следующим образом:

Для любого решения  $(\sigma, A, \dot{\varepsilon}^p, \alpha)(t)$  краевой задачи (5.4)–(5.10) на отрезке  $[0, +\infty[$  существует решение  $(\sigma_\infty, A_\infty, \dot{\varepsilon}_\infty^p, \alpha_\infty)(t)$  такое, что:

- 1) поля  $(\sigma_\infty, A_\infty)(t)$  являются периодическими,
- 2) скорости пластической деформации и внутренних параметров  $(\dot{\varepsilon}_\infty^p, \alpha_\infty)(t)$  являются периодическими,
- 3)  $(\sigma, A, \dot{\varepsilon}^p, \alpha)(t) - (\sigma_\infty, A_\infty, \dot{\varepsilon}_\infty^p, \alpha_\infty)(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Более того, все периодические решения краевой задачи отличаются только константой [1].

Существенным является вывод о том, что тип асимптотического режима работы конструкции определяется величиной скорости пластических деформаций и не зависит от начального состояния системы.

Результат о сходимости к периодическому решению доказывает, что для конструкции можно выделить асимптотические режимы: приспособляемость ( $\dot{\varepsilon}^p = 0$ ); знакопеременную пластичность (пластические деформации – периодическая функция):  $\int_0^T \dot{\varepsilon}_\infty^p(x, t) dt = 0$  и рэтчеттинг (прогрессирующая пластическая деформация) [1]:  $\int_0^T \dot{\varepsilon}_\infty^p(x, t) dt \neq 0$ .

## 5.3. Постановка задачи минимизации

Основная идея метода теории оптимального контроля – сведение определения асимптотического состояния конструкции к задаче отыскания минимума некоторой целевой функции.

Введем в рассмотрение параметры управления  $(\varepsilon_0^p, \alpha_0)$ , принадлежащие некоторому выпуклому множеству, и априори удовлетворяющие ограничениям, налагаемым разрешающей системой уравнений (5.4)–(5.10). Выбор множества должен отражать специфику объекта. Каждому множеству параметров управления ставится в соответствие история  $(\sigma(t), A(t), \varepsilon^p(t), \alpha(t))$ .

Далее введем в рассмотрение также целевую функцию (функционал) [1]:

$$J(\varepsilon_0^p, \alpha_0) = \frac{1}{2} \int_V (\Delta\sigma(x): L^{-1}: \Delta\sigma(x) + \Delta A(x): Z^{-1}: \Delta A(x)) dV, \quad (5.11)$$

где  $\Delta\sigma(x) = \sigma(x, T) - \sigma(x, 0)$  и  $\Delta A(x) = A(x, T) - A(x, 0)$ .

Переменные управления входят в функционал не явным образом, а через зависимость решения краевой задачи от начальных условий. Именно это свойство отличает задачу оптимального управления от классической задачи отыскания минимума функционала.

Функционал (5.11) имеет механическую интерпретацию: он представляет собой упругую энергию системы, связанную с периодическим изменением обобщенных напряжений [1]. Существуют разные способы минимизации функционала.

Функционал, принимающий положительные значения (5.11), равен нулю тогда и только тогда, когда  $\sigma(x, T) = \sigma(x, 0)$  и  $A(x, T) = A(x, 0)$ , что проверяется при помощи асимптотического состояния. Следовательно, любое поле  $(\varepsilon_0^p, \alpha_0)$ , минимизирующее функционал (5.11), приводит к выполнению условия о равенстве функционала нулю  $J(\varepsilon_0^p, \alpha_0) = 0$ . Таким образом, асимптотическое состояние находится в результате решения задачи минимизации:

$$\min_{(\varepsilon_0^p, \alpha_0) \in PA} J(\varepsilon_0^p, \alpha_0). \quad (5.12)$$

Для любого решения  $(\varepsilon_0^p, \alpha_0)$  задачи (4.12)  $J(\varepsilon_0^p, \alpha_0)$  равен нулю, поэтому состояние  $(\sigma(t), A(t), \alpha(t))$  является  $T$ -периодическим для обобщенных напряжений. И, соответственно, асимптотические скорости  $(\dot{\sigma}_\infty, \dot{A}_\infty, \dot{\varepsilon}_\infty^p, \dot{\alpha}_\infty)$ , полученные из (5.12), позволяют установить тип асимптотического поведения в каждой точке рассматриваемого тела в соответствии со следующим правилом [1]:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dot{\varepsilon}_\infty^p(x, t) = 0 & \text{на } [0, T] \Rightarrow \text{приспособляемость,} \\ \int_0^T \dot{\varepsilon}_\infty^p(x, t) dt = 0 & \Rightarrow \text{циклическая пластичность,} \\ \int_0^T \dot{\varepsilon}_\infty^p(x, t) dt \neq 0 & \Rightarrow \text{рэтчеттинг.} \end{array} \right.$$

## Выводы

В настоящее время существует достаточно большое количество методов как аналитических, так и численных, позволяющих с определенной степенью точности определять или предсказывать асимптотическое состояние конструкции, находящейся под действием внешней периодической нагрузки. Однако часть методов позволяет найти только область приспособляемости, часть действительна только для конструкций, для которых достоверно известно наличие стабилизированного состояния при данных нагрузках и т. д. Методы пошагового анализа сопряжены с большим количеством вычислений, их аккуратностью и требуют много времени даже при моделировании малоциклового усталости.

Необходим универсальный прямой метод, который бы позволил получать асимптотическое состояние тела при любых конфигурациях нагрузки, для материалов с различными свойствами, для конструкций с поврежденностью. При этом временные затраты должны стремиться к минимуму.

Наиболее многообещающим и перспективным в этом плане представляется метод теории оптимального контроля.

Возможная область применения прямых методов представляется весьма широкой: от обратных задач механики деформируемого твердого тела [15] до задач нелинейной механики разрушения и связанных задач механики поврежденности (с инкорпорированием мер поврежденности в определяющие уравнения неупругого материала [16; 17]).

## Литература

- [1] Peigney M., Stolz C. An optimal control approach to the analysis of inelastic structures under cyclic loading // *J. of Mechanics and Physics of Solids*. 2003. V. 51. P. 575–605.
- [2] Качанов Л.М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с.
- [3] Spiliopoulos K. V., Panagiotou K.D. A direct method to predict cyclic steady state of elastoplastic structures // *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 2012. V. 223–224. P. 186–198.
- [4] Rebelo N. Finite Element Analysis on the Cyclic Properties of Superelastic Nitinol // *Abaqus User's Conference*. May, 2004, Boston, USA.
- [5] Методы прикладной вязкоупругости / А.А. Адамов [и др.]. Пермь: УрО РАН, 2003. 412 с.
- [6] Bree J. Elastic-plastic behaviour of thin tubes subjected to internal pressures and intermittent high-heat fluxes with application to fast-nuclear-reactor fuel elements // *J. Strain Anal.* 1967. V. 2. P. 226–238.
- [7] Peigney M. Approche par controle optimal des structure anelastiques sous chargement cyclique. These de docteur de l'ecole polytechnique. 2003.
- [8] Du Z., Wang J., Fan X. Direct cyclic method for solder joint reliability analysis // *Proceedings of IMECE 2006: ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition*. November 5–10, 2006, Chicago, USA.
- [9] Koiter W.T. General theorems for elastic-plastic solids. *Prog. Solids mechanics*. 1960. V. 1. P. 165–221.
- [10] Low-cycle Thermal Fatigue of a Surface-mount Electronics Assembly // *Simulia. Abaqus Technology Brief*. 2009. URL: <http://www.3ds.com>.
- [11] Nguyen-Tajan T.M.L. Determination of the stabilized response of a structure undergoing cyclic thermal-mechanical loads by a direct cyclic method // *Abaqus User's Conference*. May, 2003, Munich, Germany.
- [12] Chen H., Ponter A.R.S. A method for the evaluation of a ratchet limit and the amplitude of plastic strain for bodies subjected to cyclic loading // *Eur. J. Mech. A. Solids*. 2001. V. 20. P. 555–571.
- [13] Ponter A.R.S., Chen H. A minimum theorem for cyclic load in excess of shakedown, with application to the evaluation of a ratchet limit // *Eur. J. Mech. A. Solids*. 2001. V. 20. P. 539–553.
- [14] Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин [и др.]. М.: Наука, 1983. 392 с.
- [15] Бьюи Х.Д. Механика разрушения: обратные задачи и решения. М.: Физматлит, 2011. 409 с.
- [16] Астафьев В.И., Шестериков С.А., Степанова Л.В. Асимптотика напряженно-деформированного состояния в окрестности вершины трещины в условиях ползучести // *Вестник СамГУ*. 1995. Специальный выпуск. С. 59–64.

- [17] Степанова Л.В. Уточненный расчет напряженно-деформированного состояния у вершины трещины в условиях циклического нагружения в среде с поврежденностью // Вестник СамГУ. 2011. № 2(83). С. 105–115.

Поступила в редакцию 11/VI/2013;  
в окончательном варианте — 11/VI/2013.

## REVIEW OF INCREMENTAL AND DIRECT METHODS OF DETERMINING ASYMPTOTIC STABILIZED BEHAVIOUR OF INELASTIC STRUCTURES

© 2013 V.A. Turkova<sup>3</sup>

The review of methods that can be used to define the asymptotic stabilized state of an inelastic structure under cyclic loading is given in the paper. Due to the growth of interest for the knowledge of the asymptotic behaviour of the structure under cyclic loading, incremental (with the use of finite element method) and direct methods (methods of optimal control theory and decomposition of residual stresses in Fourier series) began to develop.

**Key words:** cyclic loading, asymptotic behaviour of a structure, direct methods, optimal control theory, shakedown, cyclic plasticity, ratchetting, finite element method.

Paper received 11/VI/2013.

Paper accepted 11/VI/2013.

---

<sup>3</sup>Turkova Vera Alexandrovna ([turkovava@samsu.ru](mailto:turkovava@samsu.ru)), the Dept. of Mathematical Modelling in Mechanics, Samara State University, Samara, 443011, Russian Federation.