

АСИМПТОТИКА ПОЛЕЙ НАПРЯЖЕНИЙ И СПЛОШНОСТИ У ВЕРШИНЫ УСТАЛОСТНОЙ ТРЕЩИНЫ В ПОВРЕЖДЕННОЙ СРЕДЕ В УСЛОВИЯХ ПЛОСКОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ¹

© 2013 С.А. Игонин, Л.В. Степанова²

В статье дано асимптотическое решение задачи о продвижении трещины в условиях циклического нагружения в поврежденной среде в рамках связанной постановки задачи в связке "упругость-поврежденность" в условиях плоского напряженного состояния. Выведены асимптотические разложения полей напряжений и сплошности, в которых удержаны два слагаемых в асимптотическом представлении. Обсуждаются вопросы определения амплитудных коэффициентов построенных асимптотических разложений.

Ключевые слова: повреждаемость, усталостный рост трещины, усталостное разрушение, связанная постановка задачи, накопление повреждений у вершины трещины, метод разложения по собственным функциям.

Введение

Предметом настоящего исследования является асимптотический анализ полей напряжений, деформаций и сплошности в окрестности вершины трещины в образце, находящемся в условиях циклического нагружения, и взаимное влияние эволюции напряженно-деформированного состояния и накопления повреждений, что является одной из актуальных задач современной механики деформируемого твердого тела [1; 2] и требует разработки методов решения нелинейных задач на собственные значения, к которым приводит метод разложения по собственным функциям, обычно используемый при решении данного класса задач. Оригинальная постановка задачи о росте трещины в поврежденной среде с кинетическим уравнением, рассматриваемым ниже, была предложена в работе [3], где построено численное решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений, к которой сводится построение асимптотического решения проблемы распространения усталостной трещины в среде с поврежденностью, базирующееся на применении метода разложения по собственным функциям. Позднее результаты асимптотического решения, полученного в [3], цитировались в многочисленных публикациях, например [4], и было найдено уточненное численное решение и аналитическое

¹Работа финансово поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект 12-08-00390-а).

²Игонин Сергей Александрович (sergejigonin@yandex.ru), Степанова Лариса Валентиновна (stepanova1v@samsu.ru), кафедра математического моделирования в механике Самарского государственного университета, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

представление механических полей у вершины усталостной трещины в среде с поврежденностью [5], а также аналитическое решение нелинейной задачи на собственные значения, следующей из проблемы определения напряженно-деформированного состояния у вершины усталостной трещины для случая плоского деформированного состояния [6].

В настоящей статье рассмотрено асимптотическое решение задачи о росте усталостной трещины в среде с поврежденностью, где, в отличие от [5], решение основано на двучленных асимптотических разложениях функции напряжений Эри и параметра сплошности в окрестности вершины трещины в предположении реализации плоского напряженного состояния:

$$\begin{aligned}\chi(r, \theta) &= \alpha_0 r^{\lambda_0+2} f_0(\theta) + \alpha_1 r^{\lambda_1+2} f_1(\theta) + \dots, \\ \psi(r, \theta) &= \beta_0 r^{\mu_0} g_0(\theta) + \beta_1 r^{\mu_1} g_1(\theta) + \dots\end{aligned}$$

Ниже получено аналитическое представление решения: найдены аналитические зависимости для угловых распределений коэффициентов асимптотических разложений компонент тензора напряжений $\sigma_{ij}^{(1)}(\theta)$ и параметра сплошности $g_1(\theta)$.

1. Математическая постановка задачи. Основные уравнения для случая плоского напряженного состояния

Основываясь на классических гипотезах континуальной механики поврежденности [4; 7; 8], можно принять, что накопление рассеянных повреждений описывается скалярным параметром ψ , эволюционное уравнение для которого постулирует степенной закон накопления повреждений [3]

$$\frac{d\psi}{dN} = \begin{cases} -c\sigma_e^m \psi^{-n}, & (\sigma_e \geq \sigma_{th} \psi^\gamma) \\ 0, & (\sigma_e < \sigma_{th} \psi^\gamma), \end{cases} \quad (1.1)$$

где N – число циклов нагружения; c, m, n, γ и σ_{th} – положительные постоянные материала, определяемые экспериментально; $\sigma_e = \sqrt{\sigma_{rr}^2 + \sigma_{\theta\theta}^2 - \sigma_{rr}\sigma_{\theta\theta} + 3\sigma_{r\theta}^2}$ – интенсивность касательных напряжений в случае плоского напряженного состояния.

Уравнения равновесия в полярной системе координат с полюсом в вершине растущей трещины имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + 2 \frac{\sigma_{r\theta}}{r} = 0. \quad (1.2)$$

Условие совместности в полярной системе координат принимает форму

$$2 \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varepsilon_{r\theta}}{\partial \theta} \right) = \frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial \theta^2} - r \frac{\partial \varepsilon_{rr}}{\partial r} + r \frac{\partial^2 (r \varepsilon_{\theta\theta})}{\partial r^2}. \quad (1.3)$$

Определяющие уравнения формулируются на основе закона Гука для изотропного линейно-упругого материала

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1 + \nu}{E} \frac{\sigma_{ij}}{\psi} - \frac{\nu}{E} \frac{\sigma_{kk}}{\psi} \delta_{ij}, \quad (1.4)$$

где ν, E – коэффициент Пуассона и модуль Юнга соответственно. Определяющие уравнения (1.4) для случая плоского напряженного состояния принимают вид

$$\varepsilon_{rr} = \frac{1}{E} \frac{\sigma_{rr} - \nu \sigma_{\theta\theta}}{\psi}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{E} \frac{\sigma_{\theta\theta} - \nu \sigma_{rr}}{\psi}, \quad \varepsilon_{r\theta} = \frac{1 + \nu}{E} \frac{\sigma_{r\theta}}{\psi}. \quad (1.5)$$

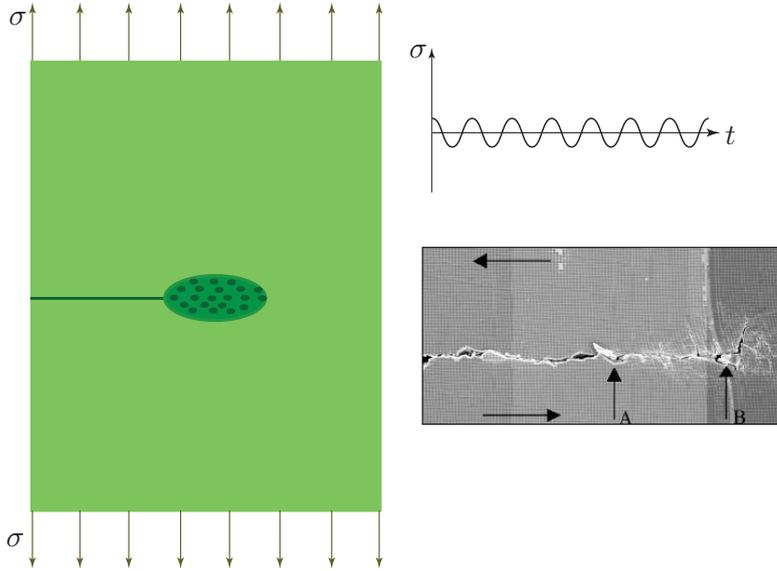


Рис. 1. Область активного накопления повреждений и экспериментальные данные по усталостному распространению трещины [9]

Краевые условия являются традиционными для механики трещин и представляют собой условия отсутствия поверхностных усилий на берегах трещины

$$\sigma_{\theta\theta}(r, \theta = \pm\pi) = 0, \quad \sigma_{r\theta}(r, \theta = \pm\pi) = 0. \quad (1.6)$$

2. Асимптотическое решение задачи об усталостном росте трещины в поврежденной среде.

Построение высших приближений асимптотических разложений полей напряжений и сплошности

В двумерной постановке задачи удобно обратиться к функции напряжений Эри, связанной с компонентами тензора напряжений соотношениями

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2}, \quad \sigma_{rr} = \Delta \chi - \sigma_{\theta\theta}, \quad \sigma_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \right). \quad (2.1)$$

Двучленное асимптотическое представление функции напряжений Эри и параметра сплошности в окрестности вершины трещины ($r \rightarrow 0$) (где формируется область активного накопления повреждений (рис. 1) и параметр сплошности эволюционирует в соответствии с (1.1)) разыскиваются в форме

$$\chi(r, \theta) = \alpha_0 r^{\lambda_0+2} f_0(\theta) + \alpha_1 r^{\lambda_1+2} f_1(\theta) + \dots, \quad (2.2)$$

$$\psi(r, \theta) = \beta_0 r^{\mu_0} g_0(\theta) + \beta_1 r^{\mu_1} g_1(\theta) + \dots \quad (2.3)$$

На рис. 1 справа показаны результаты эксперимента на усталостное разрушение, точки А и В показывают участок продвижения трещины под действием на-

гружения, отвечающего типу II, до точки А действует растягивающая периодическая нагрузка.

Двучленные асимптотические разложения компонент тензора напряжений в непосредственной окрестности вершины трещины в силу (2.1) и (2.2) имеют следующую структуру:

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \alpha_0 r^{\lambda_0} \sigma_{ij}^{(0)}(\theta) + \alpha_1 r^{\lambda_1} \sigma_{ij}^{(1)}(\theta) + \dots \quad (2.4)$$

или

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta}(r, \theta) &= \alpha_0 r^{\lambda_0} (\lambda_0 + 2)(\lambda_0 + 1) f_0(\theta) + \alpha_1 r^{\lambda_1} (\lambda_1 + 2)(\lambda_1 + 1) f_1(\theta) + \dots \\ \sigma_{rr}(r, \theta) &= \alpha_0 r^{\lambda_0} [(\lambda_0 + 2) f_0(\theta) + f_0''(\theta)] + \alpha_1 r^{\lambda_1} [(\lambda_1 + 2) f_1(\theta) + f_1''(\theta)] + \dots \\ \sigma_{r\theta}(r, \theta) &= -\alpha_0 r^{\lambda_0} (\lambda_0 + 1) f_0'(\theta) - \alpha_1 r^{\lambda_1} (\lambda_1 + 1) f_1'(\theta) + \dots \end{aligned}$$

Следует отметить, что в последнее время в механике разрушения (как в механике хрупкого разрушения, так и в нелинейной механике разрушения) сложилось понимание о необходимости удержания в асимптотических разложениях высших приближений, которые дают существенный вклад в решение: в зависимости от конфигурации образца, системы приложенных нагрузок этот вклад может составлять десять процентов и более [10–16]. В настоящее время активно разрабатываются методы определения коэффициентов асимптотических разложений (амплитудных множителей, зависящих от геометрии образцов и системы приложенных нагрузок) [16] и способы решения нелинейных задач на собственные значения, к которым приводит применение метода разложения по собственным функциям [5; 11; 17; 18]. Например, асимптотический анализ напряжений и перемещений в окрестности углового выреза является предметом обсуждения в [13], где также были рассмотрены эффекты несингулярных членов асимптотических разложений. Результаты асимптотического анализа [13] ясно показывают, что пренебрежение несингулярными членами асимптотических разложений может вести к значительным ошибкам в оценке параметров разрушения элементов конструкций с угловыми вырезами.

Структура асимптотических разложений компонент тензора деформаций в окрестности вершины трещины задается соотношениями

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\theta\theta}(r, \theta) &= \frac{\alpha_0}{E\beta_0} r^{\lambda_0 - \mu_0} \varepsilon_{\theta\theta}^{(0)}(\theta) + \frac{\alpha_1}{E\beta_0} r^{\lambda_1 - \mu_0} \varepsilon_{\theta\theta}^{(1)}(\theta) + \dots \\ \varepsilon_{rr}(r, \theta) &= \frac{\alpha_0}{E\beta_0} r^{\lambda_0 - \mu_0} \varepsilon_{rr}^{(0)}(\theta) + \frac{\alpha_1}{E\beta_0} r^{\lambda_1 - \mu_0} \varepsilon_{rr}^{(1)}(\theta) + \dots \\ \varepsilon_{r\theta}(r, \theta) &= \frac{1 + \nu}{E} \frac{\alpha_0}{\beta_0} r^{\lambda_0 - \mu_0} \varepsilon_{r\theta}^{(0)}(\theta) + \frac{1 + \nu}{E} \frac{\alpha_1}{\beta_0} r^{\lambda_1 - \mu_0} \varepsilon_{r\theta}^{(1)}(\theta) + \dots, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где функции $\varepsilon_{ij}^{(k)}(\theta)$, $k = 0, 1$ определяются формулами

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\theta\theta}^{(0)}(\theta) &= \left(\sigma_{\theta\theta}^{(0)} - \nu \sigma_{rr}^{(0)} \right) (g_0)^{-1}, & \varepsilon_{rr}^{(0)}(\theta) &= \left(\sigma_{rr}^{(0)} - \nu \sigma_{\theta\theta}^{(0)} \right) (g_0)^{-1}, \\ \varepsilon_{r\theta}^{(0)}(\theta) &= \sigma_{r\theta}^{(0)} (g_0)^{-1}, \\ \varepsilon_{\theta\theta}^{(1)}(\theta) &= \frac{\sigma_{\theta\theta}^{(1)} - \nu \sigma_{rr}^{(1)}}{g_0} - \frac{g_1}{g_0^2} \left[\sigma_{\theta\theta}^{(0)} - \nu \sigma_{rr}^{(0)} \right], \\ \varepsilon_{rr}^{(1)}(\theta) &= \frac{\sigma_{rr}^{(1)} - \nu \sigma_{\theta\theta}^{(1)}}{g_0} - \frac{g_1}{g_0^2} \left[\sigma_{rr}^{(0)} - \nu \sigma_{\theta\theta}^{(0)} \right], & \varepsilon_{r\theta}^{(1)} &= \frac{\sigma_{r\theta}^{(1)}}{g_0} - \frac{g_1}{g_0^2} \sigma_{r\theta}^{(0)}. \end{aligned}$$

Двучленные асимптотические разложения упругих деформаций (2.5) и условия совместности (1.3) позволяют вывести два обыкновенных дифференциальных

уравнения относительно коэффициентов нулевого $f_0(\theta), g_0(\theta)$ и первого приближений $f_1(\theta), g_1(\theta)$. Подстановка (2.5) в условие совместности деформаций (1.3) и выделение коэффициентов при одинаковых степенях r приводят к системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$2(1+\nu)(\lambda_0 - \mu_0 + 1) \frac{d\varepsilon_{r\theta}^{(0)}}{d\theta} = \frac{d^2\varepsilon_{rr}^{(0)}}{d\theta^2} - (\lambda_0 - \mu_0)\varepsilon_{rr}^{(0)} + (\lambda_0 - \mu_0 + 1)(\lambda_0 - \mu_0)\varepsilon_{\theta\theta}^{(0)}, \quad (2.6)$$

$$2(1+\nu)(\lambda_1 - \mu_0 + 1) \frac{d\varepsilon_{r\theta}^{(1)}}{d\theta} = \frac{d^2\varepsilon_{rr}^{(1)}}{d\theta^2} - (\lambda_1 - \mu_0)\varepsilon_{rr}^{(1)} + (\lambda_1 - \mu_0 + 1)(\lambda_1 - \mu_0)\varepsilon_{\theta\theta}^{(1)}. \quad (2.7)$$

Асимптотический анализ кинетического уравнения накопления повреждений (1.1) позволит вывести обыкновенные дифференциальные уравнения

$$g'_0 \sin \theta - \mu_0 g_0 \cos \theta = -f_e^m g_0^{-n}, \quad (2.8)$$

$$g'_1 \sin \theta - \mu_1 g_1 \cos \theta = -f_e^m g_0^{-n} \left[\frac{m}{2} \frac{f_1}{f_e^2} - n \frac{g_1}{g_0} \right], \quad (2.9)$$

где $f_e = \sqrt{(\sigma_{rr}^{(0)})^2 + (\sigma_{\theta\theta}^{(0)})^2 - \sigma_{rr}^{(0)}\sigma_{\theta\theta}^{(0)} + 3(\sigma_{r\theta}^{(0)})^2}$, $f_1 = 2\sigma_{rr}^{(0)}\sigma_{rr}^{(1)} + 2\sigma_{\theta\theta}^{(0)}\sigma_{\theta\theta}^{(1)} - \sigma_{rr}^{(0)}\sigma_{\theta\theta}^{(1)} - \sigma_{rr}^{(1)}\sigma_{\theta\theta}^{(0)} + 6\sigma_{r\theta}^{(0)}\sigma_{r\theta}^{(1)}$.

При выводе уравнений (2.6)–(2.9) найдено, что показатели степеней асимптотических разложений функции напряжений Эри и параметра сплошности связаны соотношениями $\lambda_1 - \lambda_0 = \mu_1 - \mu_0$, откуда легко установить, что $\lambda_1 - \mu_1 = \lambda_0 - \mu_0$. Поскольку $\lambda_0 = \mu_0$, то $\lambda_1 = \mu_1$. Также асимптотический анализ позволяет установить связь между коэффициентами $\alpha_1/\alpha_0 = \beta_1/\beta_0$.

Численный анализ системы уравнений (2.6) и (2.8) с краевыми условиями

$$f_0(\theta = 0) = 1, \quad f'_0(\theta = 0) = 0, \quad g_0 = (f_e^m)^{1/(n+1)}, \quad g'_0(\theta = 0) = 0, \quad (2.10)$$

$$f_0(\theta = \pi) = 0, \quad f'_0(\theta = \pi) = 0, \quad (2.11)$$

позволивший найти аналитическое решение системы уравнений (2.6) и (2.8), был выполнен в [5], где было установлено, что

$$f_0(\theta) = \kappa(\cos \theta)^{\mu_0+2}/((\lambda_0 + 2)(\lambda_0 + 1)), \quad g_0(\theta) = \kappa^{m/(n+1)}(\cos \theta)^{\mu_0}, \quad (2.12)$$

$$\lambda_0 = \mu_0 = 1/(1 + n - m), \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2. \quad (2.13)$$

Поэтому интерес представляет решение системы двух нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (2.7), (2.9) с краевыми условиями

$$\begin{aligned} f_1(\theta = 0) = 0, \quad f_1'''(\theta = 0) = 0, \quad g_1'(\theta = 0) = 0, \\ f_1(\theta = \pi) = 0, \quad f_1'(\theta = \pi) = 0, \quad g_1(\theta = \pi) = 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Сформулированная двухточечная краевая задача редуцировалась к начальной задаче. В силу найденного ранее аналитического решения системы уравнений нулевого приближения (2.13) решение задачи Коши разыскивалось на отрезке $[0, \pi/2]$. Начальные условия, которым должно удовлетворять решение системы уравнений (2.7), (2.9), имеют вид

$$f_1(\theta = 0) = A_1, \quad f_1'(\theta = 0) = 0, \quad f_1''(\theta = 0) = A_2, \quad f_1'''(\theta = 0) = 0, \quad (2.15)$$

$$g_1(\theta = 0) = \frac{\mu_0^{1-1/m}}{2(\mu_1 + n\mu_0)} \frac{f_1(\theta = 0)}{(g_0(\theta = 0))^{(n+1)/m}}, \quad g_1'(\theta = 0) = 0. \quad (2.16)$$

Результаты численного решения системы уравнений (2.7), (2.9) для различных значений параметров кинетического уравнения приведены на рис. 2, 3.

Тщательный анализ системы уравнений (2.7) и (2.9) позволил найти аналитическое представление решения

$$\sigma_{rr}^{(1)} = \kappa r^{\mu_1} \sin^2 \theta (\cos \theta)^{\mu_1}, \quad \sigma_{\theta\theta}^{(1)} = \kappa r^{\mu_1} (\cos \theta)^{\mu_1+2}, \quad (2.17)$$

$$\sigma_{r\theta}^{(1)} = \kappa r^{\mu_1} \sin \theta (\cos \theta)^{\mu_1+1}, \quad g_1(\theta) = \frac{1}{2} \kappa^{m/(n+1)} r^{\mu_1} (\cos \theta)^{\mu_1} \quad \mu_1 = 2\mu. \quad (2.18)$$

На рис. 2, 3 сплошной линией показано аналитическое решение, определяемое формулами (2.17), (2.18), и численное решение системы уравнений, полученное методом Рунге — Кутты — Фельберга. Из представленных графиков видно совпадение результатов, поэтому можно заключить, что развитый подход позволяет найти аналитические выражения для угловых распределений компонент тензора напряжений и параметра сплошности — коэффициентов двучленных асимптотических разложений функции напряжений Эри и параметра сплошности в непосредственной окрестности вершины трещины.

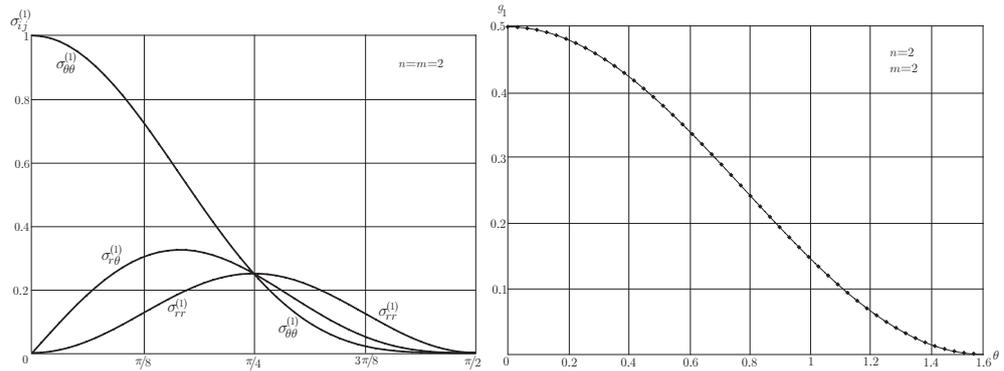


Рис. 2. Угловые распределения коэффициентов второго члена в асимптотических разложениях компонент тензора напряжений: функции $\sigma_{ij}^{(1)}(\theta)$ (слева) и параметра сплошности $g_1(\theta)$ (справа) $n = 2, m = 2$. Сплошной линией показано точное аналитическое решение, точками отображены результаты численного решения

3. Метод возмущений (метод малого параметра)

Аналитические решения (2.12), (2.13), (2.17), (2.18) построены на основе скрупулезного анализа численного решения систем уравнений (2.6)–(2.9). Возникает естественный вопрос: можно ли построить аналитическое решение, не прибегая к численному анализу? Одним из эффективных методов построения замкнутых решений является метод малого параметра. С целью получения аналитического решения нелинейной задачи на собственные значения, сформулированной выше, обратимся к методу малого параметра.

Нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка (2.6) может быть представлено в форме

$$f_0^{IV} - 2\bar{E}f_0''' + (a_1 + \bar{G})f_0 - a_2\bar{E}f_0' + (a_3\bar{G} + a_4)f_0 = 0, \quad (3.1)$$

где для краткости приняты следующие обозначения:

$$a_1 = 2(1 + \nu)(\lambda_0 - \mu_0 + 1)(\lambda_0 + 1) + (\lambda_0 + 2)[1 - \nu(\lambda_0 + 1)] -$$

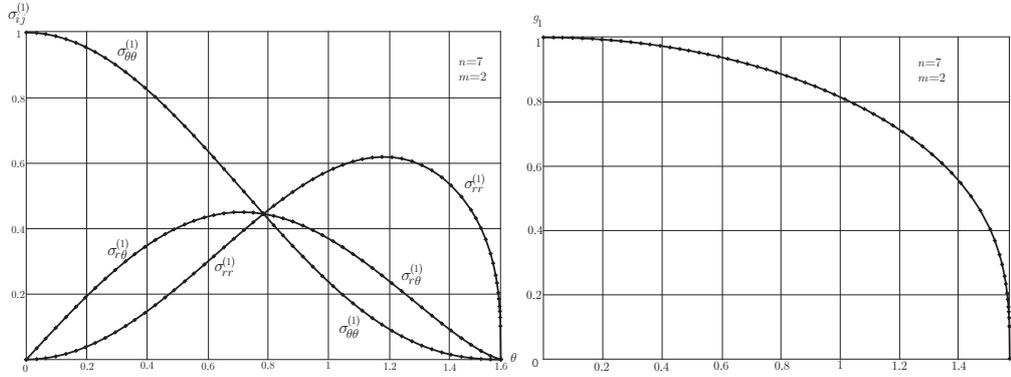


Рис. 3. Угловые распределения коэффициентов второго члена в асимптотических разложениях компонент тензора напряжений: функции $\sigma_{ij}^{(1)}(\theta)$ (слева) и параметра сплошности $g_1(\theta)$ (справа) $n = 7, m = 2$. Сплошной линией показано точное аналитическое решение, точками отображены результаты численного решения

$$\begin{aligned}
 & -(\lambda_0 - \mu_0) [1 + \nu(\lambda_0 - \mu_0 + 1)], \\
 a_2 &= 2(1 + \nu)(\lambda_0 - \mu_0 + 1)(\lambda_0 + 1) + 2(\lambda_0 + 2) [1 - \nu(\lambda_0 + 1)], \\
 a_3 &= (\lambda_0 + 2) [1 - \nu(\lambda_0 + 1)], \\
 a_4 &= (\lambda_0 - \mu_0)(\lambda_0 + 2) [(\lambda_0 - \mu_0 + 1)(\lambda_0 + 1 - \nu) - 1 - \nu(\lambda_0 + 1)],
 \end{aligned}$$

$$\bar{E} = g'_0/g_0, \quad \bar{G} = \bar{E}^2 - g''_0/g_0. \quad (3.2)$$

Уравнения (3.1), (2.8) вместе с краевыми условиями

$$f_0(\theta = 0) = 0, \quad f_0'''(\theta = 0) = 0, \quad g'_0(\theta = 0) = 0, \quad (3.3)$$

$$f_0(\theta = \pi) = 0, \quad f_0'(\theta = \pi) = 0, \quad g_0(\theta = \pi) = 0 \quad (3.4)$$

образуют нелинейную задачу на собственные значения: необходимо найти такие значения μ_0 , которые давали бы нетривиальные решения системы уравнений (3.1), (2.8), удовлетворяющие краевым условиям (3.3), (3.4).

Одним из эффективных методов построения решения нелинейных задач на собственные значения является метод малого параметра [10; 12; 17; 18], в соответствии с которым решение системы уравнений (2.8), (3.1) разыскивается в виде разложения по степеням искусственного малого параметра $\varepsilon = \mu_0 - \mu_0^{(0)}$, представляющего собой отклонение собственного значения нелинейной "возмущенной" задачи μ_0 от собственного значения линейной "невозмущенной" задачи $\mu_0^{(0)}$ (с кинетическим уравнением, постулирующим линейный закон накопления повреждений). Искомые функции раскладываются в ряд по степеням малого параметра

$$f_0(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k f_0^{(k)}(\theta), \quad g_0(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k g_0^{(k)}(\theta), \quad \lambda_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \lambda_0^{(k)}, \quad (3.5)$$

$$n = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k n_k, \quad m = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k m_k, \quad n_0 = m_0 = 1. \quad (3.6)$$

Подстановка асимптотических разложений (3.5), (3.6) в систему нелинейных дифференциальных уравнений (2.8), (3.1) дает возможность получить бесконечную последовательность краевых задач для дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \varepsilon^0 : \quad & \left(f_0^{(0)}\right)^{IV} - 2E_0 \left(f_0^{(0)}\right)''' + (a_1^{(0)} + G_0) \left(f_0^{(0)}\right)'' - a_2^{(0)} E_0 \left(f_0^{(0)}\right)' + \\ & + (a_3^{(0)} G_0 + a_4^{(0)}) f_0^{(0)} = 0, \\ & \left(g_0^{(0)}\right)' \sin \theta - \mu_0^{(0)} g_0^{(0)} \cos \theta = - \left(f_0^{(0)}\right)^m \left(g_0^{(0)}\right)^{-n}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^1 : \quad & \left(f_0^{(1)}\right)^{IV} - 2E_0 \left(f_0^{(1)}\right)''' + (a_1^{(0)} + G_0) \left(f_0^{(1)}\right)'' - a_2^{(0)} E_0 \left(f_0^{(1)}\right)' + \\ & + (a_3^{(0)} G_0 + a_4^{(0)}) f_0^{(1)} = 2E_1 \left(f_0^{(0)}\right)''' - (a_1^{(1)} + G_1) \left(f_0^{(0)}\right)'' + \\ & + (a_2^{(1)} E_0 + a_2^{(0)} E_1) \left(f_0^{(0)}\right)' - (a_3^{(1)} G_0 + a_3^{(0)} G_1 + a_4^{(0)}) f_0^{(0)}, \\ & \left(g_0^{(1)}\right)' \sin \theta - \mu_0^{(0)} g_0^{(1)} \cos \theta = - \left(f_0^{(0)}\right)^m \left(g_0^{(0)}\right)^{-n} \left[m \frac{f_e^{(1)}}{f_e^{(0)}} - n \frac{f_0^{(1)}}{g_0^{(0)}} \right] + \\ & + \mu_0^{(1)} g_0^{(0)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 : \quad & \left(f_0^{(2)}\right)^{IV} - 2E_0 \left(f_0^{(2)}\right)''' + (a_1^{(0)} + G_0) \left(f_0^{(2)}\right)'' - a_2^{(0)} E_0 \left(f_0^{(2)}\right)' + \\ & + (a_3^{(0)} G_0 + a_4^{(0)}) f_0^{(2)} = 2E_1 \left(f_0^{(1)}\right)''' - (a_1^{(1)} + G_1) \left(f_0^{(1)}\right)'' + \\ & + (a_2^{(2)} E_0 + a_2^{(1)} E_1 + a_2^{(0)} E_2) \left(f_0^{(0)}\right)' - (a_3^{(1)} G_0 + a_3^{(0)} G_1 + a_4^{(1)}) f_0^{(1)} - \\ & - (a_3^{(0)} G_2 + a_3^{(1)} G_1 + a_3^{(2)} G_0) f_0^{(0)} + 2E_2 \left(f_0^{(0)}\right)''' + (a_2^{(1)} E_0 + a_2^{(0)} E_1) \left(f_0^{(1)}\right)', \\ & \left(g_0^{(2)}\right)' \sin \theta - \mu_0^{(0)} g_0^{(2)} \cos \theta = \mu_0^{(2)} g_0^{(0)} + \mu_0^{(1)} g_0^{(1)} - \\ & - \left(f_0^{(0)}\right)^m \left(g_0^{(0)}\right)^{-n} \left\{ \frac{m}{2} \left[(m-1) \left(\frac{f_e^{(1)}}{f_e^{(0)}}\right)^2 + 2 \frac{f_e^{(2)}}{f_e^{(0)}} \right] - \right. \\ & \left. - nm \frac{f_e^{(1)}}{f_e^{(0)}} \frac{g_0^{(1)}}{g_0^{(0)}} - \frac{n}{2} \left[2 \frac{g_0^{(2)}}{g_0^{(0)}} - (n+1) \left(\frac{g_0^{(1)}}{g_0^{(0)}}\right)^2 \right] \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^3 : \quad & \left(f_0^{(3)}\right)^{IV} - 2E_0 \left(f_0^{(3)}\right)''' + (a_1^{(0)} + G_0) \left(f_0^{(3)}\right)'' - a_2^{(0)} E_0 \left(f_0^{(3)}\right)' + \\ & + (a_3^{(0)} G_0 + a_4^{(0)}) f_0^{(3)} = 2E_1 \left(f_0^{(2)}\right)''' + 2E_2 \left(f_0^{(1)}\right)''' + \\ & + (a_2^{(3)} E_0 + a_2^{(2)} E_1 + a_2^{(1)} E_2 + a_2^{(0)} E_3) \left(f_0^{(0)}\right)' - (a_3^{(1)} G_0 + a_3^{(0)} G_1 + a_4^{(1)}) f_0^{(2)} + \\ & + 2E_3 \left(f_0^{(0)}\right)''' - (a_1^{(1)} + G_1) \left(f_0^{(2)}\right)'' - (a_2^{(2)} + G_2) \left(f_0^{(0)}\right)'' + \\ & + (a_2^{(1)} E_0 + a_2^{(0)} E_1) \left(f_0^{(2)}\right)' + (a_2^{(2)} E_0 + a_2^{(1)} E_1 + a_2^{(0)} E_2) \left(f_0^{(1)}\right)' - \\ & - (a_3^{(0)} G_3 + a_3^{(1)} G_2 + a_3^{(2)} G_1 + a_3^{(3)} G_0) f_0^{(0)} - \\ & - (a_3^{(0)} G_2 + a_3^{(1)} G_1 + a_3^{(2)} G_0) f_0^{(1)}, \\ & \left(g_0^{(2)}\right)' \sin \theta - \mu_0^{(0)} g_0^{(2)} \cos \theta = \mu_0^{(1)} g_0^{(2)} + \mu_0^{(2)} g_0^{(1)} + \mu_0^{(3)} g_0^{(0)} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \left(f_0^{(0)} \right)^m \left(g_0^{(0)} \right)^{-n} \left\{ \frac{m}{2} \left[(m-1)(m-2) \left(\frac{f_e^{(1)}}{f_e^{(0)}} \right)^3 + 6(m-1) \frac{f_e^{(1)} f_e^{(2)}}{(f_e^{(0)})^2} + \frac{f_e^{(3)}}{f_e^{(0)}} \right] - \right. \\
 & - \frac{nm}{2} \frac{g_0^{(1)}}{g_0^{(0)}} \left[(m-1) \left(\frac{f_e^{(1)}}{f_e^{(0)}} \right)^2 + 2 \frac{f_e^{(2)}}{f_e^{(0)}} \right] - \frac{nm}{2} \frac{f_e^{(1)}}{f_e^{(0)}} \left[-(m+1) \left(\frac{g_0^{(1)}}{g_0^{(0)}} \right)^2 + 2 \frac{g_0^{(1)}}{g_0^{(0)}} \right] - \\
 & \left. - \frac{n}{6} \left[(n+1)(n+2) \left(\frac{g_0^{(3)}}{g_0^{(0)}} \right)^3 - 6(n+1) \frac{g_e^{(1)} g_e^{(2)}}{(g_0^{(0)})^2} + \frac{g_0^{(3)}}{g_0^{(0)}} \right] \right\}. \quad (3.7)
 \end{aligned}$$

Краевые условия для приведенных систем уравнений имеют вид

$$\left(f_0^{(k)} \right)'(\theta = 0) = 0, \quad \left(f_0^{(k)} \right)'''(\theta = 0) = 0, \quad \left(g_0^{(k)} \right)'(\theta = 0) = 0, \quad (3.8)$$

$$\left(f_0^{(k)} \right)'(\theta = \pi/2) = 0, \quad \left(f_0^{(k)} \right)'(\theta = \pi/2) = 0, \quad \left(g_0^{(k)} \right)'(\theta = \pi/2) = 0. \quad (3.9)$$

Краевая задача нулевого порядка (относительно функций $f_0^{(0)}(\theta)$ и $g_0^{(0)}(\theta)$) имеет нетривиальное решение

$$f_0^{(0)}(\theta) = \frac{1}{6} \cos \theta, \quad g_0^{(0)} = \cos \theta, \quad \mu_0^{(0)} = 1. \quad (3.10)$$

Поэтому неоднородная задача не будет иметь решения, если только не окажется удовлетворенным условие разрешимости. Для формулировки условия разрешимости обычно прибегают к сопряженной краевой задаче. Для каждой из полученных неоднородных краевых задач была сформулирована сопряженная краевая задача и было найдено соответствующее условие разрешимости (подробное описание процедуры решения можно найти в [6]). Условие разрешимости позволило найти коэффициенты асимптотических разложений показателей степеней, входящих в кинетическое уравнение, и, применяя аппроксимацию Паде, вычислить

$$n - m = -\frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}.$$

Исключая малый параметр $\varepsilon = \mu_0 - \mu_0^{(0)}$, можно найти аналитическое выражение для собственного значения

$$n - m = \frac{1 - \mu_0}{\mu_0} \quad \text{или} \quad \mu_0 = \frac{1}{1 + n - m}. \quad (3.11)$$

Подобная техника была использована для рассмотрения краевой задачи относительно функций $f_1(\theta)$ и $g_1(\theta)$, что позволило найти решение в замкнутой форме

$$f_1(\theta) = \kappa \frac{1}{(\mu_1 + 2)(\mu_1 + 1)} (\cos \theta)^{\mu_1}, \quad g_1(\theta) = \kappa^{m/(n+1)} (\cos \theta)^{\mu_1} \quad (3.12)$$

и окончательно компоненты тензора напряжений и параметр сплошности

$$\sigma_{rr}^{(1)} = \kappa r^{\mu_1} \sin^2 \theta (\cos \theta)^{\mu_1}, \quad \sigma_{\theta\theta}^{(1)} = \kappa r^{\mu_1} (\cos \theta)^{\mu_1+2}, \quad (3.13)$$

$$\sigma_{r\theta}^{(1)} = \kappa r^{\mu_1} \sin \theta (\cos \theta)^{\mu_1+1}, \quad g_1(\theta) = \frac{1}{2} \kappa^{m/(n+1)} r^{\mu_1} (\cos \theta)^{\mu_1}, \quad \mu_1 = 2\mu. \quad (3.14)$$

Выводы и обсуждение результатов

В работе даны асимптотический анализ напряженно-деформированного состояния и поля сплошности у вершины усталостной трещины отрыва в среде с поврежденностью в связанной постановке задачи (связка "упругость — поврежденность") в предположении плоского напряженного состояния и оценка взаимного

влияния процесса накопления рассеянных повреждений и эволюции напряженно-деформированного состояния вблизи вершины трещины. Выполнено асимптотическое исследование полей напряжений, деформаций и сплошности у вершины растущей трещины нормального отрыва (трещины типа I), находящейся под действием циклической нагрузки, в связанной формулировке задачи (в связке "упругость — поврежденность"). Построены двучленные асимптотические представления компонент тензора напряжений и скалярного параметра сплошности вблизи вершины растущей трещины и найдены аналитические представления угловых распределений компонент тензора напряжений и параметра сплошности — коэффициентов двучленных асимптотических разложений функции напряжений Эри и параметра сплошности.

Показано, что асимптотический анализ уравнений рассматриваемой задачи является особенно эффективным, поскольку прямые компьютерные вычисления распределений напряжений и сплошности в окрестности вершины трещины встречают серьезные трудности, поскольку изученная в настоящей работе система нелинейных дифференциальных уравнений является сингулярно возмущенной, что приводит к необходимости отступа от левого конца отрезка интегрирования и обоснованию выбора величины отступа.

Показано, что в рамках асимптотического анализа полностью определяются степени в асимптотических разложениях, коэффициенты асимптотических разложений — угловые распределения полей напряжений и параметра сплошности. Однако остаются неизвестными амплитудные множители — коэффициенты $\alpha_k, k = 0, 1$. Очевидно, что масштабные (амплитудные) множители должны отражать влияние приложенной нагрузки и геометрии образца на ближнее поле напряжений — на поле напряжений вблизи кончика распространяющейся трещины. Амплитудные множители, как правило, не могут быть найдены в ходе асимптотического анализа, и их определение влечет за собой необходимость решения задачи в целом — определение механических полей для реального образца или элемента конструкции, находящегося под действием реальной системы нагрузок. В силу этой причины нахождение амплитудных множителей требует привлечения либо конечно-элементного анализа [19], либо применения процедуры сращивания двух решений: ближнего и дальнего поля напряжений, если известно решение задачи для дальнего поля напряжений [16]. Каждая из описанных процедур требует самостоятельного рассмотрения и является предметом дальнейшего изучения.

Литература

- [1] Lee Y.L., Barkey M.E., Kang H.T. Metal Fatigue Analysis Handbook Practical Problem-Solving Techniques for Computer-Aided Engineering. Boston: Elsevier, 2012. 633 p.
- [2] Zehnder A. T. Fracture Mechanics. Dordrecht: Springer, 2012. 238 p.
- [3] Zhao J., Zhao X. The asymptotic study of fatigue crack growth based on damage mechanics // Engn. Fracture Mechanics. 1995. V. 50. № 1. P. 131–141.
- [4] Степанова Л.В. Математические методы механики разрушения. М.: Физматлит, 2009. 336 с.
- [5] Степанова Л.В. Уточненный расчет напряженно-деформированного состояния у вершины трещины в условиях циклического нагружения // Вестник Самарского государственного университета. 2011. № 2(83). С. 105–115.

- [6] Адылина Е.М., Игонин С.А., Степанова Л.В. О нелинейной задаче на собственные значения, следующей из анализа напряжений у вершины усталостной трещины // Вестник Самарского государственного университета. 2012. № 3/1(94). С. 83–102.
- [7] Murakami S. Continuum Damage Mechanics. A continuum mechanics approach to the analysis of damage and fracture. Dordrecht: Springer, 2012. 423 p.
- [8] Voyiadjis G.Z, Kattan P.I. A comparative study of damage variables in continuum damage mechanics // Int. J. Damage Mech. 2009. V. 18. P. 315–340.
- [9] Pinna Ch., Doquet V. The preferred fatigue crack propagation mode in a M250 maraging steel loaded in shear // Fatigue Fract. Eng. Mater. Structure. 1999. V. 23. P. 173–183.
- [10] Степанова Л.В. О собственных значениях в задаче о трещине антиплоского сдвига в материале со степенными определяющими уравнениями // Прикладная механика и техническая физика. 2008. Т. 49. № 1. С. 173–180.
- [11] Степанова Л.В. Анализ собственных значений в задаче о трещине в материале со степенным определяющим законом // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2009. № 8. С. 1332–1347.
- [12] Адылина Е.А., Степанова Л.В. О построении многомасштабных моделей неупругого разрушения // Вестник Самарского государственного университета. 2012. № 9(100). С. 70–83.
- [13] Ayatollahi M.R., Dehgany M., Nejati M. Fracture analysis of V-notched components – Effects of first non-singular stress term // International Journal of Solids and Structures. 2011. V. 48. P. 1579–1589.
- [14] Степанова Л.В., Федина М.Е. О геометрии области полностью поврежденного материала у вершины трещины антиплоского сдвига в связанной постановке (связка "ползучесть – поврежденность") // Вестник Самарского государственного университета. 2001. № 2. С. 87–113.
- [15] Астафьев В.И., Шестериков С.А., Степанова Л.В. Асимптотика напряженно-деформированного состояния в окрестности вершины трещины в условиях ползучести // Вестник Самарского государственного университета. 1995. Спец. выпуск. С. 59–64.
- [16] Hello G., Tahar M.B., Roelandt J.M. Analytical determination of coefficients in crack-tip stress expansions for a finite crack in an infinite plane medium // Int. J. of Solids and Structures. 2012. V. 49. P. 556–566.
- [17] Nonlinearity, bifurcation and chaos – theory and applications / eds. J. Awrejcewicz and P. Hagedorn. Rijeka: InTech, 2012. 355 p.
- [18] Андриянов И.В., Данишевский В.В., Иванков А.О. Асимптотические методы в теории колебаний пластин и оболочек. Днепропетровск: Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры. 2010. 216 с.
- [19] Rao S.S. The finite element methods in engineering. Oxford: Elsevier, 2011. 727 p.

Поступила в редакцию 15/VI/2013;
в окончательном варианте — 4/VII/2013.

ASYMPTOTICS OF STRESS AND CONTINUITY FIELDS NEAR A FATIGUE GROWING CRACK IN A DAMAGED MEDIUM IN CONDITIONS OF STATE OF PLANE STRESS

© 2013 S.A. Igonin, L.V. Stepanova³

In the paper asymptotic solution to the problem of growth of fatigue crack in conditions of repeated loading in a damaged medium in the coupled elasticity-damage statement of the problem is given. Asymptotic expansions of stress fields and continuity fields in which two summands are retained in asymptotic representation are derived. The problems of determination of amplitude coefficients of obtained asymptotic expansions are discussed.

Key words: damaging, fatigue crack growth, fatigue damage, coupled formulation of the problem, damage accumulation near the crack tip, eigenfunction expansion method.

Paper received 15/*VI*/2013.

Paper accepted 4/*VII*/2013.

³Igonin Sergey Alexandrovich (sergejigonin@yandex.ru), Stepanova Larisa Valentinovna (stepanova1v@samsu.ru), the Dept. of Mathematical Modelling in Mechanics, Samara State University, Samara, 443011, Russian Federation