

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАСТОЙНОЙ ЗОНЫ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ МИКРОСТРУКТУРНОЙ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ КОАКСИАЛЬНЫМИ ЦИЛИНДРАМИ ПРИ НАЛИЧИИ ГРАДИЕНТА ДАВЛЕНИЯ

© 2013 М.В. Егоров<sup>1</sup>

В настоящей работе приводится математическое моделирование течения вязкой жидкости между коаксиальными цилиндрами при наличии однородной микроструктуры и градиента давления. Сформулирована постановка задачи в скоростях движения. Получена конечно-разностная схема. Проведен численный расчет. Показаны геометрические размеры зоны течения жидкости с малой скоростью.

**Ключевые слова:** застойная зона, микроструктура, вязкая жидкость.

### Введение

В настоящее время существует потребность уточнения расчетов напряженно-деформированного состояния технологических материалов однородной микроструктуры при использовании кинематического подхода механики сплошных сред. Основная проблема возникает в результате того, что математические модели механики сплошных сред не учитывают влияние характерного размера микроструктуры сплошной среды  $h/L < 1$  ( $h$  — характерный размер представительного элемента объема  $\Delta V = h^3$ ,  $L$  — характерный размер изучаемого явления). Под представительным объемом понимается такой объем  $\Delta V$ , в котором содержится достаточное количество микроструктуры, что механические свойства среды в этом объеме и механические свойства среды в целом совпадают.

Отличительная особенность данного подхода состоит в том, что при расчете учитываются микроповороты и скорости микроповоротов частиц, а эти кинематические характеристики влияют уже на силовые характеристики элемента: тензор напряжений, тензор моментных напряжений.

С учетом вышеизложенного тензор скоростей деформации примет вид:

$$e_{ij} = e_{ij}^c + \frac{h^2}{6} \cdot \Delta e_{ij}^c \quad (1)$$

где  $e_{ij}^c = \frac{1}{2}(\nabla_j v_i + \nabla_i v_j)$  — тензор скоростей деформации Коши,  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$  — оператор Лапласа.

<sup>1</sup>Егоров Михаил Валерьевич (egorovmv89@mail.ru), кафедра теоретической и прикладной механики Воронежского государственного университета, 394006, Российская Федерация, г. Воронеж, Университетская пл., 1.

Введение таких уточнений приводит к повышению порядка производных высшего порядка при характерном размере, и уравнения приобретают характер сингулярности, их можно именовать квазигидродинамическими уравнениями.

## 1. Течение жидкости между коаксиальными цилиндрами

Рассматривается область течения между цилиндрами с радиусами  $R_-$  и  $R_+$  соответственно (рис. 1). Для описания движения была выбрана цилиндрическая система координат  $O_{r\phi z}$ .

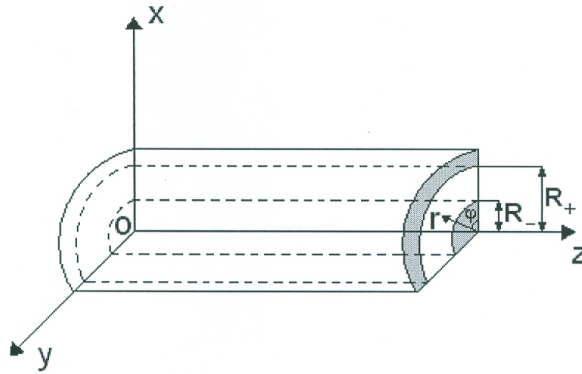


Рис. 1. Графическое представление области течения

Выберем направление линейного градиента давления:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\Delta p}{L} = \text{const} < 0. \quad (2)$$

Полагая, что движение жидкости происходит в результате сдвига слоев, будем иметь:

$$v_r \equiv v_\phi \equiv 0, \quad v_z = v_z(r). \quad (3)$$

Для однородной несжимаемой жидкости  $\rho = \text{const}$  уравнение неразрывности выполняется автоматически, а выражение для скоростей деформации примет вид:

$$e_{rr} = e_{\phi\phi} = e_{zz} = e_{r\phi} = e_{\phi z}, \quad e_{rz} = \frac{1}{2} \cdot \frac{dv_z}{dr} + \frac{h^2}{12} \cdot \frac{d^3 v_z}{dr^3}. \quad (4)$$

Подставляя скорости деформации в реологические соотношения, получим:

$$p_{rr} = p_{\phi\phi} = p_{zz} = -p, \quad p_{r\phi} = p_{\phi z} = 0, \quad p_{rz} = 2 \cdot \mu \cdot e_{rz} = \mu \cdot \left( \frac{dv_z}{dr} + \frac{h^2}{6} \cdot \frac{d^3 v_z}{dr^3} \right). \quad (5)$$

Запишем уравнения импульсов, пренебрегая действием массовых сил ( $f_r = f_\phi = f_z = 0$ ), а также используя условие стационарности ( $\partial v_r / \partial t = \partial v_\phi / \partial t = \partial v_z / \partial t$ ) и условие (3):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial p_{r\phi}}{\partial \phi} + \frac{\partial p_{rz}}{\partial z} + \frac{p_{rr} - p_{\phi\phi}}{r} &= 0, \\
\frac{\partial p_{r\phi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial p_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{\partial p_{\phi z}}{\partial z} + 2 \cdot \frac{p_{r\phi}}{r} &= 0, \\
\frac{\partial p_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial p_{\phi z}}{\partial \phi} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} + \frac{p_{rz}}{r} &= 0.
\end{aligned} \tag{6}$$

Подстановка в выражения (6) значения напряжений (5) дает:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial \phi} = 0, \quad \frac{dp_{rz}}{dr} + \frac{p_{rz}}{r} = -\frac{\Delta p}{L}. \tag{7}$$

Первые два равенства (7) показывают, что давление меняется только по оси  $z$ . Решая третье из уравнений (7), получим:

$$p_{rz} = -\frac{\Delta p}{2L} \cdot r + \frac{c}{r}. \tag{8}$$

Постоянная  $c$  свидетельствует о значении касательного напряжения на оси. Приравнявая значения в выражениях (8) и (5), получим:

$$(h^2/6) \cdot v_z''' + v_z' = \frac{1}{2\mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} \cdot r + \frac{c}{\mu} \cdot \frac{1}{r}, \tag{9}$$

$$(h^2/6) \cdot v_z''' + v_z' = -q \cdot r + \frac{c}{\mu} \cdot \frac{1}{r}, \tag{10}$$

где  $q = (-\partial p/\partial z)/2\mu$ .

Умножим обе части уравнения (10) на  $r$ :

$$(h^2/6) \cdot v_z''' \cdot r + v_z' \cdot r = -q \cdot r^2 + \frac{c}{\mu}. \tag{11}$$

Продифференцируем по  $r$ :

$$(h^2/6) \cdot v_z^{IV} \cdot r + (h^2/6) \cdot v_z''' + v_z'' \cdot r + v_z' + 2q \cdot r = 0. \tag{12}$$

Умножим обе части уравнения на  $r$ :

$$(h^2/6) \cdot v_z^{IV} \cdot r^2 + (h^2/6) \cdot v_z''' \cdot r + v_z'' \cdot r^2 + v_z' \cdot r + 2q \cdot r^2 = 0. \tag{13}$$

## 2. Граничные условия

Определим граничные условия таким образом, чтобы жидкость двигалась в результате сдвига одного из цилиндров (случай простого сдвига):

$$v_z(R_+) = V_0, \quad v_z(R_-) = 0. \tag{14}$$

В этом случае условия качения на нижней и верхней границах примут вид:

$$v_z''(R_+) - (d/3) \cdot v_z'''(R_+) = 0, \quad v_z''(R_-) + (d/3) \cdot v_z'''(R_-) = 0, \tag{15}$$

где  $d$  представляет собой характерный диаметр частицы.

### 3. Приведение к безразмерному виду

Введем следующие обозначения:

$$\bar{v} = \frac{v}{V_0}, \quad \bar{H} = \frac{R_+ - R_-}{R_-}, \quad \bar{h} = \frac{h}{R_-}, \quad \bar{r} = \frac{r}{R_-}, \quad \bar{d} = \frac{d}{R_-}, \quad \bar{q} = \frac{qR_-^2}{V_0}.$$

Последнее соотношение вводится в силу того, что  $q = -\frac{\partial p}{\partial z} \cdot \frac{1}{2\mu} = \frac{\Delta p}{L} \cdot \frac{1}{2\mu}$ , где  $\mu$  — коэффициент динамической вязкости.

Исходя из последних замен, перепишем уравнение вместе с граничными условиями:

$$\begin{aligned} & \left(\bar{h}^2/6\right) \cdot \bar{v}_z^{IV} \cdot \bar{r}^2 + \left(\bar{h}^2/6\right) \cdot \bar{v}_z''' \cdot \bar{r} + \bar{v}_z'' \cdot \bar{r}^2 + \bar{v}_z' \cdot \bar{r} + 2\bar{r}^2 \cdot \bar{q} = 0, \\ & \bar{v}_z(R_-) = 0, \quad \bar{h}^2 \cdot \bar{v}_z''(R_-) + \bar{h}^2 \cdot (d/3) \cdot \bar{v}_z'''(R_-) = 0, \quad \bar{v}_z(R_- + H) = V_0, \\ & \bar{h}^2 \cdot \bar{v}_z''(R_- + H) - \bar{h}^2 \cdot (d/3) \cdot \bar{v}_z'''(R_- + H) = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

В дальнейшем знак безразмерности опустим:

$$\begin{aligned} & (h^2/6) \cdot v_z^{IV} \cdot r^2 + (h^2/6) \cdot v_z''' \cdot r + v_z'' \cdot r^2 + v_z' \cdot r + 2r^2 \cdot q = 0, \\ & v_z(R_-) = 0, \quad h^2 \cdot v_z''(R_-) + h^2 \cdot (d/3) \cdot v_z'''(R_-) = 0, \quad v_z(R_- + H) = V_0, \\ & h^2 \cdot v_z''(R_- + H) - h^2 \cdot (d/3) \cdot v_z'''(R_- + H) = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

### 4. Конечно-разностная схема

Заменяем отрезок  $[1; 1+H]$  — область непрерывного изменения аргумента  $r$  — множеством, которое состоит из конечного числа точек. Данное множество будем называть сеткой, точки  $r_i$  — узлами сетки. Для упрощения нахождения численного решения уравнения будем рассматривать равномерную сетку с шагом  $p = \frac{H}{N}$ , где  $N$  — количество узлов в сетке.

Значение производной аппроксимируем по следующим формулам:

$$\begin{aligned} f^k(x) &= \frac{\Delta^k y_i}{p^k}, \\ \Delta^k y_i &= \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \cdot C_k^i \cdot y_{i+1}, \\ \Delta^2 y_i &= y_{i+2} - 2 \cdot y_{i+1} + y_i, \\ \Delta^3 y_i &= y_{i+3} - 3 \cdot y_{i+2} + 3 \cdot y_{i+1} - y_i, \\ \Delta^4 y_i &= y_{i+4} - 4 \cdot y_{i+3} + 6 \cdot y_{i+2} - 4 \cdot y_{i+1} + y_i. \end{aligned} \quad (18)$$

В результате получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} y_0 = 0, \\ y_0 \cdot \frac{d \cdot h^2}{3 \cdot p^3} + y_2 \cdot \left( \frac{h^2}{p^2} + \frac{d \cdot h^2}{p^3} \right) - y_1 \cdot \left( \frac{2 \cdot h^2}{p^2} + \frac{d \cdot h^2}{p^3} \right) + y_0 \cdot \left( \frac{h^2}{p^2} - \frac{d \cdot h^2}{3 \cdot p^3} \right) = 0, \\ y_{i+2} \cdot \left( \frac{h^2 \cdot r^2}{6 \cdot p^4} \right) + y_{i+1} \cdot \left( \frac{h^2 \cdot r}{6 \cdot p^3} - \frac{2 \cdot h^2 \cdot r^2}{3 \cdot p^4} \right) + y_i \cdot \left( \frac{h^2 \cdot r^2}{p^4} - \frac{h^2 \cdot r}{2 \cdot p^3} + \frac{r^2}{p^2} \right) + \\ + y_{i-1} \cdot \left( \frac{h^2 \cdot r}{2 \cdot p^3} - \frac{2 \cdot h^2 \cdot r^2}{p^4} - \frac{2 \cdot r^2}{p^2} + \frac{r}{p} \right) + y_{i-2} \cdot \left( \frac{h^2 \cdot r^2}{6 \cdot p^4} - \frac{h^2 \cdot r}{6 \cdot p^3} + \frac{r^2}{p^2} - \frac{r}{p} \right) + 2 \cdot q \cdot r = 0, \\ y_N \cdot \left( \frac{h^2}{p^2} - \frac{h^2 \cdot d}{3 \cdot p^3} \right) + y_{N-1} \cdot \left( \frac{h^2 \cdot d}{p^3} - \frac{2 \cdot h^2}{p^2} \right) + y_{N-2} \cdot \left( \frac{h^2}{p^2} - \frac{h^2 \cdot d}{p^3} \right) + y_{N-3} \cdot \frac{h^2 \cdot d}{3 \cdot p^3} = 0, \\ y_N = V_0. \end{cases}$$

Полученная система уравнений имеет пятидиагональную матрицу. Доступным и простым способом ее решения является метод прогонки. Для его реализации была разработана программа в среде Delphi на языке Pascal.

## 5. Результаты численного расчета

Анализ полученных численных результатов показал наличие области с малой скоростью движения (застойной зоны). Этот факт заставил сделать предположение о наличии застойной зоны с границами  $[R_-, r_0]$ , где граница  $r_0$  заранее неизвестна. Поиск требуемой точки проводился путем введения требований одновременной малости скорости и первой производной от скорости до величины порядка  $\epsilon$  (рис. 2). Эта точка соответствует приближенной неподвижности, недеформируемости края зоны покоя. Для данного случая начальных условий  $r_0 = 1,53$ .

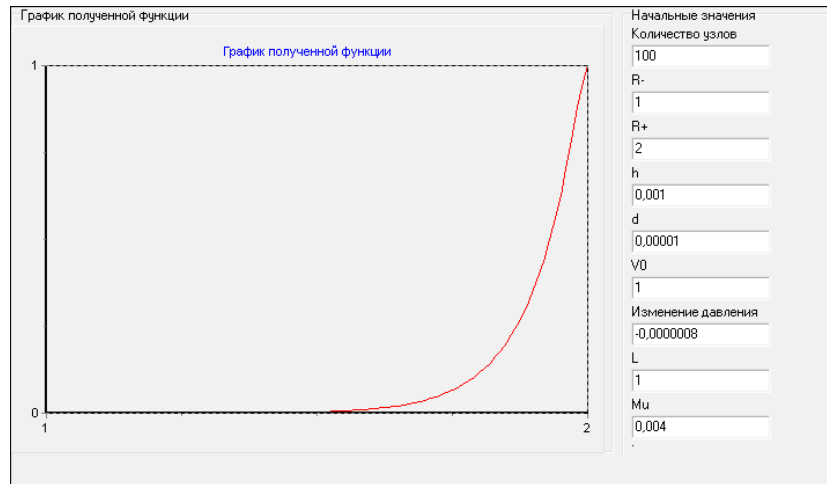


Рис. 2. Распределение осевой скорости по ширине зазора

## Заключение

В настоящей статье представлено математическое моделирование течения вязкой жидкости с микроструктурой между концентрическими цилиндрами при наличии перепада давления. Данный анализ показал наличие зоны течения с малой

скоростью, что влияет на интегральные характеристики течения (массовый расход). Предложен алгоритм нахождения геометрических размеров данной зоны.

## Литература

- [1] Четверушкин Б.Н. Минимальные размеры в задачах механики сплошной среды // Математическое моделирование. 2005. Т. 17. № 4. С. 27-39.
- [2] Течение и деформирование материалов однородной микроструктуры / М.И. Быкова [и др.]. Воронеж: ИПЦ Воронежского государственного университета. 2010. № 4. С. 132–166.
- [3] Елизарова Т.Г. Лекции. Математическое моделирование и численные методы в динамике жидкости и газа. М: Изд-во МГУ, 2005. С. 224.
- [4] Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа: учебник для вузов. 7-е изд., испр. М.: Дрофа, 2003. С. 840.

Поступила в редакцию 10/VII/2013;  
в окончательном варианте — 10/VII/2013.

## DEFINITION OF STAGNANT ZONE OF FLOW OF VISCIOUS INCOMPRESSIBLE MICROSTRUCTURAL LIQUID BETWEEN COAXIAL CYLINDERS IN THE PRESENCE OF PRESSURE GRADIENT

© 2013 M.V. Egorov<sup>2</sup>

In this work mathematical modeling of flow of viscous liquid between coaxial cylinders in the presence of homogeneous structure and pressure gradient. Problem definition in the rate of movement is formulated. Finite — difference scheme is received. Numerical computation is received. The geometrical dimensions of zone of liquid flow with low speed are shown.

**Key words:** stagnant zone, microstructure, viscous liquid.

Paper received 10/VII/2013.  
Paper accepted 10/VII/2013.

---

<sup>2</sup>Egorov Mikhail Valeryevich (egorovmv89@mail.ru), the Dept. of Theoretical and Applied Mechanics, Voronezh State University, Voronezh, 394006, Russian Federation.