

## ЗАДАЧА О ВДАВЛИВАНИИ ГЛАДКОГО ШТАМПА ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ В ПЛАНЕ В ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО

© 2013 И.А. Власова<sup>1</sup>

В статье рассматриваются общие свойства уравнений пространственной задачи теории идеальной пластичности при условии пластичности Треска и напряженном состоянии, соответствующем ребру поверхности текучести. Рассмотрены особые линии в жесткопластической среде и решения в окрестности особой линии, аналогичные разложениям в лучевые ряды.

На основе развитой теории решена краевая задача, возникающая при вдавливании штампа с гладким основанием в некоторое пластическое тело, которое в простейшем случае является полупространством.

**Ключевые слова:** вдавливание гладкого штампа, штамп произвольной формы в плане, жесткопластическое полупространство, разрывные решения пространственных задач, особые линии, особая линия, уравнение особой линии, особые поверхности, краевая задача о штампе, параболический в плане штамп, граница штампа — выпуклая линия.

Исследование пространственных задач теории идеальной пластичности связано с идеей использования условия пластичности Треска. В работах [1–3] Д.Д. Ивлева рассмотрены соотношения пространственной задачи теории идеальной пластичности в предположении, что напряженное состояние соответствует ребру призмы текучести Треска. Было установлено, что общие уравнения при этом в каждой точке имеют конус характеристических направлений.

Продолжением исследований пространственной задачи явились работы Д.Д. Ивлева и Г.И. Быковцева [3; 4], в которых было показано, что на любом ребре условия пластичности общие уравнения являются гиперболическими и имеют характеристические поверхности, совпадающие с поверхностями максимальных касательных напряжений.

В работе [5] Д.Д. Ивлевым была высказана идея разрывных решений пространственных задач теории идеальной пластичности и рассмотрены условия существования поверхностей слабого разрыва, на которых, по предположению, терпят скачок производные компонент напряжений и скоростей деформаций.

При решении задачи о вдавливании штампа в жесткопластическое полупространство на контуре штампа возникает особенность.

Решение плоской задачи о вдавливании штампа в пластическую полуплоскость было получено Прандтлем после введения особых точек, что потребовало для решения пространственной задачи введения особых линий и особых поверхностей [8].

<sup>1</sup>Власова Ираида Абрамовна (vlaira@yandex.ru), кафедра информатики и вычислительной математики Самарского государственного университета, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

Рассмотрим пространственные течения, соответствующие ребру условия пластичности Треска. При этом

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \pm 2k. \quad (1)$$

Компоненты тензора напряжений выражаются через главные значения по формулам

$$\sigma_{ij} = \sigma_1 l_i l_j + \sigma_2 m_i m_j + \sigma_3 n_i n_j, \quad (2)$$

здесь  $l_i, m_i, n_i$  — направляющие косинусы главных направлений, удовлетворяющие тождеству

$$l_i l_i + m_i m_i + n_i n_i = \sigma_{ij}, \quad l_i l_i = m_i m_i = n_i n_i = 1. \quad (3)$$

Подставляя  $\sigma_1, \sigma_2$  и (1) в (2) и используя тождество (3), находим

$$\sigma_{ij} = \sigma_3 \delta_{ij} \pm 2k. \quad (4)$$

Напряжения в статической задаче должны удовлетворять уравнению равновесия

$$\sigma_{ij,j} = 0. \quad (5)$$

Подставляя соотношения (4) в (5), находим

$$\sigma_{,i} + (n_i n_{j,j} + n_j n_{i,j}) = 0, \quad n_i n_i = 1, \quad \sigma = \pm \sigma_3/2k. \quad (6)$$

Пусть в жесткопластическом теле имеется некоторая пространственная линия  $x_i = x_i(s)$ . Рассмотрим особенности поведения решения в окрестности этой линии.

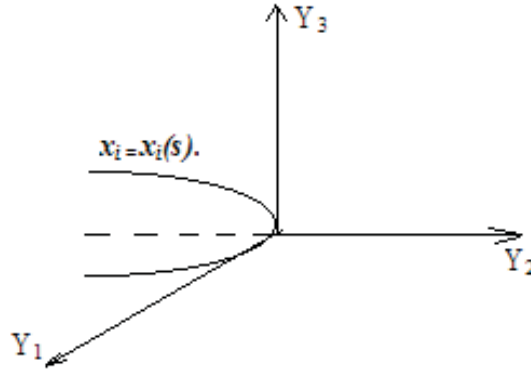


Рис. 1

В плоскости  $Y_2, Y_3$  (рис. 1) введем полярную систему координат, полагая:

$$\sigma = \sigma(Y_1, r, \varphi), \quad n_i = n_i(Y_1, r, \varphi),$$

где

$$r = \sqrt{(y_2^2 + y_3^2)}; \quad \text{tg } \varphi = y_2/y_3.$$

Тогда уравнение (6) принимает вид

$$(\tau_i \partial \sigma / \partial Y_1 + \tau_j \partial (n_i n_j) / \partial Y_1 + l_i \partial \sigma / \partial r + l_j \partial (n_i n_j) / \partial r) r + p_i \partial \sigma / \partial \varphi + p_j \partial (n_i n_j) / \partial \varphi = 0. \quad (7)$$

Здесь

$$l_i = \mu_i \sin \varphi + \nu_i \cos \varphi, \quad p_i = \mu_i \cos \varphi + \nu_i \sin \varphi, \quad (8)$$

где  $\tau_i$ ,  $\mu_i$ ,  $\nu_i$  — единичные векторы в направлении касательной, нормали и бинормали к особой линии.

Решение в окрестности особой линии представим в виде

$$\sigma^0(\varphi, y_1) + \sum_{mk=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \sigma^{(m)}(\varphi, y_1) r^m, \quad \sigma^{(m)}(\varphi, y_1) = \partial^m \sigma / \partial r^m |_{r=0}; \quad (9)$$

$$n_i = n_i^0(\varphi, y_1) + \sum_{mk=1}^{\infty} \frac{1}{m!} n_i^{(m)}(\varphi, y_1) r^m, \quad n_i^{(m)}(\varphi, y_1) = \partial^m n_i / \partial r^m |_{r=0}. \quad (10)$$

Подставляя (9), (10) в (7) и приравнивая члены при одинаковых степенях  $r$ , после алгебраических преобразований при  $n_i n_i = 1$  получаем уравнения (11):

$$\begin{aligned} p_i \partial \sigma^0 / \partial \varphi + p_j \partial (n_i^0 n_j^0) / \partial \varphi &= 0, \\ n_i^0 \partial n_i^0 / \partial \varphi &= 0, \\ n_i^0 \partial n_i^{(k)} / \partial \varphi + (\partial n_i^0 / \partial \varphi) n_i^{(k)} &= L_k. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь

$$L_k = -(1/2) \sum_{l=1}^{k-1} C_k^l \frac{\partial}{\partial \varphi} (n_i^{(k-l)} n_j^l). \quad (12)$$

Уравнения (11) для  $n_i^0$  и  $\sigma^0$  имеют тривиальное решение  $n_i^0 = const$ ,  $\sigma^0 = const$ , нетривиальное решение имеет место при условии  $p_j n_j = \frac{\sqrt{2}}{2}$  и имеет вид (13):

$$n_i^0 = \frac{\sqrt{2}}{2} p_i + \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{C \exp 2\varphi} \right) l_i + \frac{\sqrt{2} C \exp \varphi}{1 + C \exp 2\varphi} \tau_i. \quad (13)$$

Давление при этом определяется по формуле:

$$\sigma = -\varphi + \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{2d\varphi}{1 + C \exp 2\varphi} + C_1. \quad (14)$$

Система уравнений (11) для последующих членов разложения имеет особенность, так как определитель ее обращается в нуль. В работах [6; 7] было получено условие разрешимости этой системы, которое можно записать в виде

$$-k\sigma^{(k)} + (k+4) \frac{\sqrt{2}}{2} p_i n_i^{(k)} + \frac{\sqrt{2}}{2} k l_i n_i^{(k)} = (k+2)r^k - L_i^k l_i - L^k. \quad (15)$$

Таким образом, соотношения (11)–(13) позволяют последовательно определять  $n_i^{(k)}$ , а из (14) определяется значение  $\sigma^k$ .

Рассмотрим приложение развитой теории к определению напряженного состояния, возникающего при вдавливании гладкого штампа произвольной формы в плане в пластическое полупространство. Решение краевой задачи о штампе построим в виде разложений (9), (10).

Пусть на некоторой поверхности  $S$  задан вектор напряжений:

$$p_i = \sigma_{ij} N_j, \quad (16)$$

здесь  $N_j$  — единичный вектор нормали к поверхности  $S$ . Задачу нахождения распределения напряжений в окрестности поверхности  $S$ , удовлетворяющих уравнениям равновесия

$$\sigma_{ij} = \sigma_z \delta_{ij} \pm 2k(n_i n_{j,j} + n_{i,j} n_j), \quad (17)$$

условиям полной пластичности

$$\sigma_{ij} = \sigma_3 \delta_{ij} \pm 2k(\delta_{ij} - n_i n_j) \quad (18)$$

и краевым условиям (16), будем называть задачей Коши.

На ребре условия пластичности Треска напряжения выражаются через третье главное напряжение по формулам (18). Подставляя (18) в (16), сворачивая с  $N_i$  и исключая  $\sigma_3$ , получим

$$p_k p_k - (p_k N_k)^2 = 4k^2((n_k N_k)^2 - (n_k N_k)^4).$$

Откуда находим:

$$n_k N_k = \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2k} \sqrt{(k^2 - (p_k p_k - (p_k N_k)^2))}\right)}. \quad (19)$$

Если  $n_k N_k$ , подсчитанное по формуле (19), отлично от нуля, то из формул (15)–(17) вычисляются значения  $n_i$  и  $\sigma_3$ .

Предположим, что поверхность  $S$  складывается из двух частей  $S_1$  и  $S_2$  (рис. 2). Пусть на поверхности  $S_1$  и  $S_2$  заданы значения  $p_i$ , соответственно:

$$p_i^{(1)} = \sigma_{ij}^{(1)} N_j, \quad p_i^{(2)} = \sigma_{ij}^{(2)} N_j.$$

Будем предполагать также, что точки линии раздела  $L$  являются достаточно гладкими точками поверхности и  $p_i^{(1)} = p_i^{(2)}$  на линии  $L$ .

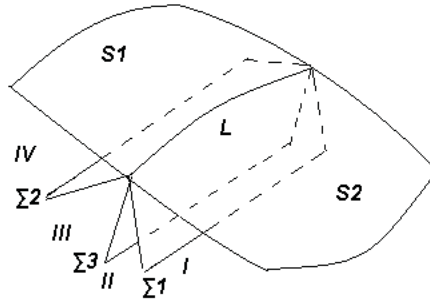


Рис. 2

Пусть в окрестности поверхности  $S$  построено решение задачи Коши и из некоторых физических соображений в формулах (17)–(19) выбраны соответствующие знаки.

Допустим также, что решение задачи Коши в окрестности линии  $L$  непрерывное, то есть линия  $L$  не является особенной.

Тогда в окрестности линии  $L$  можно построить три характеристические поверхности:

- 1)  $\Sigma_1$ , на которой  $n_i \nu_i^{(1)} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,
- 2)  $\Sigma_2$ , на которой  $n_i \nu_i^{(2)} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ,
- 3)  $\Sigma_3$ , на которой  $n_i \nu_i^{(3)} = 0$ .

Здесь:  $\nu_i^{(1)}$ ,  $\nu_i^{(2)}$ ,  $\nu_i^{(3)}$  — нормали к поверхностям  $\Sigma_1$ ,  $\Sigma_2$ ,  $\Sigma_3$ .

Векторы  $p_i^{(1)}$  и  $p_i^{(2)}$ , определенные на поверхности  $S$ , непрерывны на линии  $L$ , но их производные могут претерпевать разрыв. В работе [6] было показано, что эти разрывы могут быть продолжены вдоль поверхностей  $\Sigma_1$ ,  $\Sigma_2$ ,  $\Sigma_3$  внутрь тела. Тогда образуются четыре зоны решения задачи (см. рис. 2):

- в зону I войдут точки, лежащие между поверхностями  $S_2$  и  $\Sigma_1$ ,
- в зону II войдут точки, лежащие между поверхностями  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_3$ ,
- в зону III войдут точки, лежащие между поверхностями  $\Sigma_3$  и  $\Sigma_2$ ,
- в зону IV войдут точки, лежащие между поверхностями  $S_1$  и  $\Sigma_2$ .

В работе Д.Д. Ивлева [6] было показано, что зона влияния математической задачи Коши всегда отсекается поверхностью, огибающей характеристические конусы, на которых  $n_i \nu_i = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$  и которая ближе всего расположена к поверхности  $S$ .

Рассмотрим задачу о вдавливании гладкого штампа в жесткопластическое полупространство.

Граница штампа задана некоторой выпуклой линией, а подошва плоская. Вне штампа граница деформируемого тела предполагается свободной от напряжений.

Линия, ограничивающая контур штампа, является особой. Она разделяет границу деформируемого тела на две части, одна из которых свободна от напряжений, а на другой задано граничное условие.

В некоторой точке контура штампа введем локальную, затем полярную систему координат:

$$r = \sqrt{(y_2^2 + y_3^2)}; \quad \text{tg } \varphi = y_2/y_3.$$

На свободной поверхности при  $\varphi = \pi/2$  выполняются краевые условия:

$$\sigma_0(\pi/2, y_1) = 1, \quad n_i^0(\pi/2, y_1) N_i^0 = 0.$$

Решение задачи по определению напряженного состояния у особой линии строится в виде разложений (9), (10) в трех зонах:

$$\Sigma_1 : \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4}; \quad \Sigma_2 : \frac{3\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{4}; \quad \Sigma_3 : \frac{5\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}.$$

Выполняя краевые условия на свободной поверхности и под подошвой штампа, получаем решение для нулевого приближения:

$$\Sigma_1 : \quad \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4}, \quad \sigma^0 = 1, \quad n_i^0 = -\mu_i; \quad (20)$$

$$\Sigma_2 : \quad \frac{3\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{4}, \quad \sigma^0 = 1 + \varphi - \frac{3\pi}{4}, \quad n_i^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(p_i - l_i); \quad (21)$$

$$\Sigma_3 : \quad \frac{5\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}, \quad \sigma^0 = 1 + \frac{\pi}{2}, \quad n_i^0 = \nu_i, \quad (22)$$

здесь

$$\begin{aligned} p_i &= \mu_i \cdot \cos \varphi - \nu_i \cdot \sin \varphi, \\ l_i &= \mu_i \sin \varphi + \nu_i \cos \varphi; \end{aligned} \quad (23)$$

$\mu_i, \nu_i, \tau_i$  — единичные векторы в направлении касательной, нормали и бинормали к особой линии.

Полное решение краевой задачи будет сопрягаться из трех аналитических частей, каждая из которых представляется разложениями (9), (10).

Поверхности, разделяющие эти аналитические решения, являются поверхностями разрыва производных напряжений, проходящими через особую линию (границу штампа).

Исследуем поверхности разрывов производных напряжений. Уравнение особой линии служит начальным условием для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Ее решением являются параметрическое уравнение поверхности разрыва производных напряжений и нормаль к ней.

Применяя геометрические условия совместности для скачков производных 1-го, 2-го и 3-го порядка, определим по три члена разложения в каждой зоне:

$$\begin{aligned} \sum_1 : \sigma^{(1)}(\varphi, y_1), n_i^{(1)}(\varphi, y_1); \quad \sum_2 : \sigma^{(2)}(\varphi, y_1), n_i^{(2)}(\varphi, y_1); \\ \sum_3 : \sigma^{(3)}(\varphi, y_1), n_i^{(3)}(\varphi, y_1); \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Рекуррентные соотношения, полученные в [3; 8], позволяют отыскивать члены разложений (9), (10) до  $k$ -го порядка включительно.

Используя найденные приближения решений 0-го, 1-го, 2-го и 3-го порядка в зоне  $\frac{5\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}$ , можно записать:

$$\begin{aligned} \sigma = 2 + \pi + 2 \cdot (r/\rho) \cdot \sin \varphi - (1/(2!2^3)) \cdot (r/\rho)^2 \cdot (12 + \pi) - \\ - (1/(2!2^5)) \cdot (r/\rho)^3 \cdot \{8 \cdot \{\partial^2 \rho / \partial y_1^2 - 2 \cdot (\partial \rho / \partial y_1)^2\} + \\ + (1/2) \cdot (12 + \pi) \cdot \cos^3 \varphi + (1/512) \cdot (-\pi \cdot (16793 - 12505\pi) - 7424) \cdot \sin \varphi \cdot (2 + \cos 2\varphi)\} + \dots \end{aligned}$$

Для определения  $\sigma_3$  под штампом ( $\varphi = \pi/2$ ) проведем из некоторой точки  $A$  контура штампа нормаль к контуру. Тогда в точке  $B$ , лежащей на нормали,  $\sigma_3$  определяется по формуле (24):

$$\sigma_3 \approx 5,14 + 2 \cdot (r/\rho) - 0,95 \cdot (r/\rho)^2 + 0,74 \cdot (r/\rho)^3 + \dots \quad (24)$$

Здесь  $r$  — расстояние между точками  $A$  и  $B$ ,  $\rho$  — радиус кривизны в точке  $A$  (рис. 3).

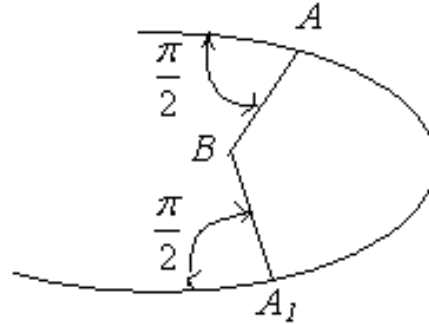


Рис. 3

Точка  $B$  может быть точкой пересечения двух и более нормалей, поэтому напряжение  $\sigma_3$  вдоль нормалей  $AB$  и  $A_1B$ , вообще говоря, будет различным.

По принципу минимума предельной нагрузки на штамп [3] распределение давления под штампом определяется однозначно.

Для штампа круглой формы в плане сравнение аналитического решения с численным решением показало, что аналитический метод дает хорошее приближение численного решения.

Рассмотрим параболический в плане штамп (рис. 4). Контур штампа является особой линией и записывается в виде

$$x_1 = \rho/2 \cdot (1 + \cos \varphi)/(1 - \cos \varphi), \quad x_2 = (\rho \cdot \sin \varphi)/(1 - \cos \varphi), \quad \varphi \neq k\pi.$$

В силу симметрии параболы линия, разделяющая решения (рис. 4), будет линией  $x_2 = 0$ .

Давление под штампом определяется по формуле (24), а суммарное давление на штамп по формуле (25):

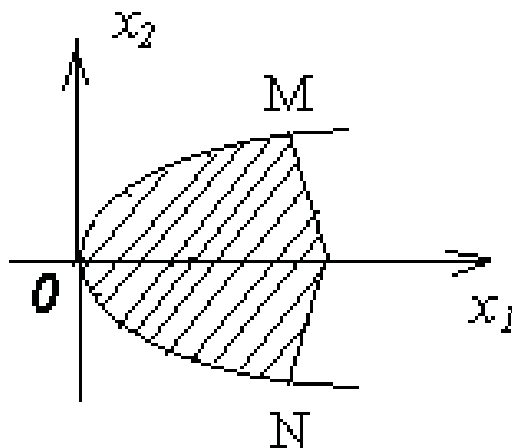


Рис. 4

$$P = \int \int \sigma_3 dx_1 dx_2 \approx \rho^2 \cdot \{0,84 \cdot \varphi + 0,14 \cdot \sin \varphi + 0,009 \cdot \sin 2\varphi + 7,14 \cdot \operatorname{ctg}(\varphi/2) + 3,426 \cdot \operatorname{ctg}^3(\varphi/2)\} \quad (25)$$

Линия, ограничивающая контур штампа, не замкнута, поэтому найдем величину давления на единицу площади. Ограничим параболу по нормали и найдем площадь сегмента  $OMN$ :

$$S = \rho^2 \cdot (5 - \cos \varphi) \cdot \sin \varphi / [3 \cdot (1 - \cos \varphi)].$$

Тогда величина давления на единицу площади вычисляется по формуле

$$P = \lim_{\varphi \rightarrow 2\pi} \frac{P}{S},$$

где  $P$  — суммарное давление,  $S$  — площадь сегмента.

## Литература

- [1] Ивлев Д.Д. Об общих уравнениях теории идеальной пластичности и статики сыпучей среды // ПММ. 1958. Т. 22. Вып. 1.
- [2] Ивлев Д.Д. О соотношениях, определяющих пластическое течение при условии пластичности Треска и его обобщениях // ДАН СССР. 1959. Т. 124. № 3.
- [3] Ивлев Д.Д., Мартынова Т.Н. О свойствах общих уравнений теории идеальной пластичности // ДАН СССР. Т. 164. № 4. 1965.
- [4] Быковцев Г.И., Ивлев Д.Д., Мартынова Т.Н. О свойствах общих уравнений теории идеальной пластичности при кусочно-линейных потенциалах // Изв. АН СССР. 1965. Сер.: Механика. № 1.
- [5] Ивлев Д.Д. О разрывных решениях пространственных задач теории идеальной пластичности // ПММ. 1958. № 4. С. 480–486.
- [6] Ивлев Д.Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. С. 67–72.
- [7] Быковцев Г.И., Власова И.А. Свойства уравнений пространственной задачи теории идеальной пластичности // Механика деформируемых сред: межвуз. сб. научн. тр. Куйбышев. 1977. Вып. 2. С. 33–68.

- [8] Быковцев Г.И., Власова И.А. Особые линии и поверхности в пространственных течениях идеально-пластических сред // Механика деформируемого твердого тела: сб. научных трудов. Новосибирск: Изд-во АН СССР. Сибирское отделение, 1979.
- [9] Жалнин В.А., Ивлев Д.Д., Мищенко О вдавливании кольцевого штампа в пластическое полупространство // ПМТФ. 1961. № 6.

Поступила в редакцию 1/V/2013;  
в окончательном варианте — 1/V/2013.

## TASK ON INDENTATION OF SMOOTH PUNCH OF AN ARBITRARY FORM IN PLANE VIEW IN HARD PLASTIC HALF-SPACE

© 2013 I.A. Vlasova<sup>2</sup>

In the work the general properties of equations of spatial problem of the theory of ideal plasticity in the condition of Treska plasticity and stressed state that correspond to the ridge of surface of fluctuation are viewed. Singular lines in hard plastic space and solutions in the neighborhood of a singular line that are similar to the expansion in beam series are viewed.

On the basis of the developed theory the boundary problem appearing at indentation of punch with smooth basis in a certain plastic body which in the simplest case is a half-space is solved.

**Key words:** indentation of smooth punch, punch of an arbitrary form in plane view, hard plastic half-space, discontinuous solution of spatial tasks, singular lines, singular line, equation of a singular line, singular spaces, boundary problem about punch, punch parabolic in plane view, boundary of punch is a convex line.

Paper received 1/V/2013.  
Paper accepted 1/V/2013.

---

<sup>2</sup>Vlasova Iraida Abramovna (vlaira@yandex.ru), the Dept. of Informatics and Calculus Mathematics, Samara State University, Samara, 443011, Russian Federation.