

УДК 539.379

## УСЛОВИЕ ПЛАСТИЧНОСТИ, СВЯЗАННОЕ С ЛИНИЯМИ УРОВНЯ ПОВЕРХНОСТИ ДЕФОРМАЦИОННЫХ СОСТОЯНИЙ, ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ ПРОЦЕССОВ ДЕФОРМИРОВАНИЯ<sup>1</sup>

© 2013 А.А. Буханько<sup>2</sup>

В рамках теории пластического течения рассматриваются особенности приложения условия пластичности, связанного с линиями уровня поверхности деформационных состояний упрочняющегося несжимаемого жесткопластического тела, при различных напряженных состояниях, реализуемых в рамках плоской и осесимметричной деформациях, плоского напряженного состояния. Сравнение предлагаемого условия с условиями пластичности Мизеса и Треска проводится на основе построения кривых текучести в девиаторной плоскости и в плоскостях, соответствующих определенному напряженному состоянию. Показано, что предлагаемое условие пластичности описывает пластическое течение на ребре призмы Треска в условиях осесимметричной деформации.

**Ключевые слова:** упрочняющееся несжимаемое жесткопластическое тело, условие пластичности, плоская деформация, осесимметричная деформация, плоское напряженное состояние.

### Введение

В механике деформируемого твердого тела для описания поведения материала при сложном напряженном состоянии вводится условие текучести (пластичности), которое для изотропного тела должно являться функцией главных напряжений или инвариантов девиатора напряжения, [1–3 и др.]:

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = K \quad \text{или} \quad f(II_{D_\sigma}, III_{D_\sigma}) = K,$$

где  $\sigma_i (i = \overline{1, 3})$  — главные значения тензора напряжения;  $II_{D_\sigma}, III_{D_\sigma}$  — второй и третий инвариант девиатора напряжения;  $K$  — константа материала, связанная с пределом текучести. При этом в работах [4; 5 и др.] эти функции определяют критерии прочности, характеризующие достижение материалом предельного состояния. Для описания определенного напряженного состояния материала очевидна

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект РФФИ № 11-08-00580).

<sup>2</sup>Буханько Анастасия Андреевна ([abukhanko@mail.ru](mailto:abukhanko@mail.ru)), кафедра высшей математики Самарского государственного аэрокосмического университета (Национального исследовательского университета), 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

необходимость отражения общих механических свойств материала в используемом критерии.

Классическими среди критериев пластичности считаются критерии Мизеса и Треска, достаточно хорошо согласующиеся с экспериментальными данными для пластичных материалов с равными пределами текучести при растяжении и сжатии. Однако в [4] отмечается, что "предельная поверхность механического критерия прочности должна представлять собой равнонаклоненную к главным осям пространственную фигуру, имеющую в сечении, перпендикулярном к ее оси, не окружность (поверхности вращения), а более сложную замкнутую кривую, инвариантную к направлениям  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ".

В работах Г.С. Писаренко, А.А. Лебедева [4] и Г.А. Гениева, В.Н. Киссюка [6] вводятся в рассмотрение предельные поверхности, имеющие в сечениях девиаторной плоскостью вид замкнутого криволинейного треугольника с тремя осями симметрии в пространстве главных напряжений и достаточно хорошо совпадающие с экспериментальными данными для определенных материалов. Критерий предельного состояния в работе [4] рассматривается как совмещение условий пластичности и разрушения; при этом параметр, характеризующий степень ответственности за микроразрушение сдвиговой деформации, определяется отношением пределов прочности на растяжение и сжатие. Коэффициенты, входящие в обобщенное условие прочности в [6], выражаются через пределы прочности при растяжении, сжатии и чистом сдвиге; и обобщение связано с введением в это условие третьего инварианта девиатора напряжения.

В работах Е.В. Ломакина [7] условие пластичности рассматривается в обобщенном виде, зависящем от параметра вида напряженного состояния, характеризующего в среднем соотношение между нормальными и касательными напряжениями в точке сплошной среды.

В настоящей работе рассматривается условие пластичности, связанное с линиями уровня поверхности деформационных состояний упрочняющегося несжимаемого жесткопластического тела [8; 9], приводится его геометрическое сравнение в условиях плоской и осесимметричной деформаций, плоского напряженного состояния с традиционно используемыми критериями Мизеса и Треска. На девиаторной плоскости условие определяется замкнутым криволинейным треугольником, вид которого был предсказан на основе экспериментальных данных в работах [4; 6]. Коэффициенты, характеризующие напряженное состояние материала и оказывающие влияние на вид кривой текучести, связаны с первым инвариантом тензора конечных деформаций Альманси (модуль которого выбран за параметр упрочнения), относительным удлинением и пределом текучести материала (определяемых из эксперимента на одноосное растяжение цилиндрического образца).

## 1. Линии уровня поверхности деформационных состояний и поверхность нагружения

В работах [8; 10; 11] рассматривается гиперболическая поверхность  $\Sigma$  третьего порядка в пространстве главных деформаций, определяемая условием несжимаемости, в частности в компонентах тензора конечных деформаций Альманси  $\mathbf{E}$ :

$$(1 - 2E_1)(1 - 2E_2)(1 - 2E_3) = 1.$$

Проекция поверхности  $\Sigma$  на плоскости, параллельные девиаторной  $E_1 + E_2 + E_3 = = I_E$ , предложено называть "линиями уровня". Уравнение линий уровня в инва-

риантах девиатора для тензора конечных деформаций Альманси принимает следующий вид:

$$6III_{D_E} + (3 - 2I_E)II_{D_E} = \frac{1}{36} [(3 - 2I_E)^3 - 27]. \quad (1.1)$$

При этом модуль первого инварианта тензора Альманси  $I_E$  характеризует уровень деформаций относительно поверхности  $\Sigma$  деформационных состояний упрочняющегося несжимаемого жесткопластического тела и в работе выбирается за параметр упрочнения материала. С учетом геометрического характера линий уровня (замкнутые криволинейные треугольники) и предположения при определении критериев прочности в [4; 6] было предложено кривые текучести связывать именно с линиями уровня поверхности  $\Sigma$ .

Для того чтобы связать поверхность деформационных состояний  $\Sigma$  и поверхность нагружения, вводится коэффициент пропорциональности между девиаторами для тензоров напряжения и конечных деформаций Альманси:

$$D_\sigma = h_E D_E, \quad (1.2)$$

откуда следует связь между инвариантами рассматриваемых девиаторов:

$$II_{D_\sigma} = h_E^2 II_{D_E}, \quad III_{D_\sigma} = h_E^3 III_{D_E}. \quad (1.3)$$

Отметим, что из пропорциональности девиаторов (1.2) следует пропорциональность компонент тензоров напряжения и конечных деформаций Альманси.

Учитывая (1.3), из (1.1) получаем уравнение поверхности нагружения в инвариантах девиатора напряжения:

$$6III_{D_\sigma} + h_E(3 - 2I_E)II_{D_\sigma} = \frac{h_E^3}{36} [(3 - 2I_E)^3 - 27]. \quad (1.4)$$

Поверхность (1.4) представляет собой цилиндрическую поверхность, проекции которой на девиаторной плоскости имеют вид замкнутого криволинейного треугольника с тремя осями симметрии, и удовлетворяет основным требованиям [2]: является выпуклой, гладкой и симметричной.

Для определения коэффициента пропорциональности  $h_E$  предлагается использовать диаграмму нагружения, построенную в координатах предела текучести  $\sigma_S$  и модуля первого инварианта  $|I_E|$  тензора конечных деформаций Альманси. При этом используется связь между  $I_E$  и относительным удлинением образца  $\delta$  согласно [12]:

$$E_1 = \frac{\delta(2 + \delta)}{2(1 + \delta)^2}, \quad E_2 = E_3 = -\frac{1}{2}\delta, \quad (1.5)$$

$$I_E = E_1 + E_2 + E_3 = \frac{1}{2} \left[ \frac{\delta(2 + \delta)}{(1 + \delta)^2} - 2\delta \right].$$

Коэффициент  $h_E$  предлагается определять из эксперимента на одноосное растяжение цилиндрического образца, когда  $\sigma_1 = \sigma_S$ ,  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ . Согласно (1.2) и (1.5), получаем:

$$h_E(\delta) = \frac{2\sigma_S(\delta)}{3 \left( E_1(\delta) - \frac{1}{3}I_E(\delta) \right)} = \frac{\delta(1 + \delta)^2}{\delta(\delta^2 + 3\delta + 3)} \sigma_S > 0. \quad (1.6)$$

## 2. Особенности условия пластичности при различных напряженных состояниях

Классические условия пластичности выражаются следующими поверхностями текучести:

– круговым цилиндром в условии Мизеса:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_S^2; \quad (2.1)$$

– шестигранной призмой в условии Треска:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \pm\sigma_S \quad \text{или} \quad \sigma_2 - \sigma_3 = \pm\sigma_S \quad \text{или} \quad \sigma_3 - \sigma_1 = \pm\sigma_S; \quad (2.2)$$

где  $\sigma_S$  — предел текучести при одноосном растяжении цилиндрического образца.

Согласно (1.4), рассматриваемое в работе условие пластичности в главных значениях тензора напряжения имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} & (2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3)(2\sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_1)(2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2) + \\ & + \frac{3}{4}h_E(3 - 2I_E) [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = \\ & = \frac{h_E^3}{8} [(3 - 2I_E)^3 - 27]. \end{aligned} \quad (2.3)$$

На рис. 1 представлено графическое сравнение кривых текучести для условий Мизеса (2.1), Треска (2.2) и условия пластичности (2.3) при фиксированном значении  $\sigma_S$ . Очевидно, что при малых значениях относительного удлинения  $\delta$  условие (2.3) практически совпадает с линией, определяющей условие (2.1). На положительных направлениях проекций осей главных напряжений линии текучести для рассматриваемых условий совпадают в точках  $\sigma'_i = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_S$ . Линия (2.3) пересекает проекции осей напряжений на отрицательных частях в точках

$$\sigma'_i = 2\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{2(\delta + 1)^3 + 1}{\delta[(3 + 2\delta)^2 + 3]} \left[ 2 \cos\left(\frac{\xi + 4\pi}{3}\right) - 1 \right] \sigma_S,$$

$$\text{где } \xi = \arccos \left[ 1 - \frac{54}{(3 - 2I_E)^3} \right].$$

### 2.1. Плоская деформация

Известно, что при плоской деформации  $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ . Подставляя в (2.3)

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} \left[ (\sigma_x + \sigma_y) + \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \right],$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{2} \left[ (\sigma_x + \sigma_y) - \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \right],$$

$$\sigma_3 = \sigma_z,$$

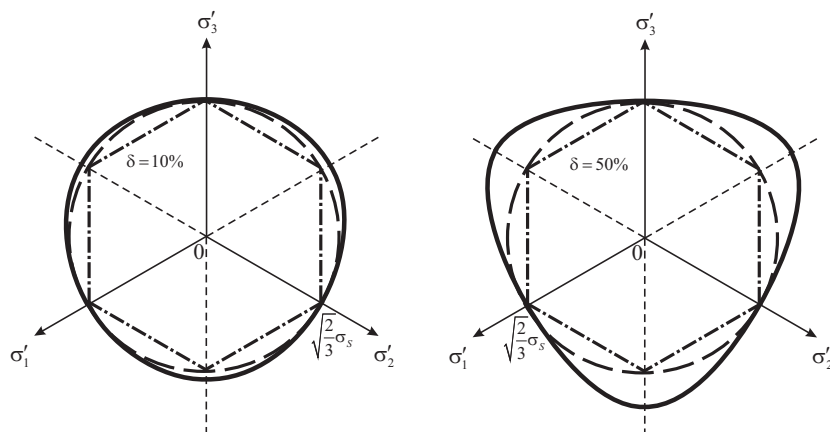


Рис. 1. Кривые текучести на девиаторной плоскости для условий (2.1) — пунктирная линия, (2.2) — штрихпунктирная линия и (2.3) — сплошная линия при  $\delta = 10\%$  и  $\delta = 50\%$

получим условие пластичности в компонентах тензора напряжений при плоской деформации:

$$\begin{aligned} & [(2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z)(2\sigma_y - \sigma_z - \sigma_x) - 9\tau_{xy}^2] (2\sigma_z - \sigma_x - \sigma_y) + \\ & + \frac{3}{4}h_E(3 - 2I_E) [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6\tau_{xy}^2] = \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$= \frac{h_E^3}{8} [(3 - 2I_E)^3 - 27].$$

Компоненты тензора скоростей деформации могут быть получены из (2.4) согласно ассоциированному закону пластического течения  $\varepsilon_{ij} = \lambda' \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$ . В частности, из условия равенства нулю третьего главного значения тензора скоростей деформации в условиях плоской деформации

$$\begin{aligned} \varepsilon_z = -3\lambda' [2(\sigma_x - \sigma_y)^2 - (\sigma_z - \sigma_x)^2 - (\sigma_y - \sigma_z)^2 + 6\tau_{xy}^2] + \\ + \frac{3}{2}h_E(3 - 2I_E) [2\sigma_z - \sigma_x - \sigma_y] = 0 \end{aligned}$$

определяется значение внеплоского главного напряжения  $\sigma_z = \sigma_3$ , промежуточность которого (т. е. выполнение условий  $\sigma_1 \geq \sigma_3 \geq \sigma_2$ ) устанавливается с помощью параметра Лоде—Надаи [13], записанного в виде

$$\mu = \frac{2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2}.$$

Известно, что параметр  $\mu$  не превосходит по абсолютному значению единицы. Тогда третье главное напряжение в условиях плоской деформации будет определяться выражением

$$\sigma_z = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{4}h_E(3 - 2I_E) + \frac{1}{4}\sqrt{12 [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2] + h_E^2(3 - 2I_E)^2}. \quad (2.5)$$

Подставляя (2.5) в условие (2.3) и выполняя определенные математические действия, получим условие пластичности, связанное с линиями уровня поверхности

деформационных состояний упрочняющегося несжимаемого жесткопластического тела при плоской деформации:

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = K(\delta)\sigma_S^2, \quad (2.6)$$

где

$$K(\delta) = \frac{4}{27} \frac{(3 - 2I_E)^2}{(E_1 - \frac{1}{3}I_E)^2} \cos\left(\frac{\xi + 4\pi}{3}\right) \left[ \cos\left(\frac{\xi + 4\pi}{3}\right) + 1 \right],$$

$$E_1 = \frac{\delta(2 + \delta)}{2(1 + \delta)^2}, \quad I_E(\delta) = -\frac{\delta^2(3 + 2\delta)}{2(1 + \delta)^2}, \quad \xi = \arccos\left[\frac{27}{(3 - 2I_E)^3} - 1\right].$$

Известно, что для условия (2.1) справедливы соотношения:

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = \frac{4}{3}\sigma_S^2, \quad \sigma_z = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y). \quad (2.7)$$

Коэффициент  $K(\delta)$  при  $\sigma_S^2$  в (2.6) выбирается в решении при сравнении с соответствующим коэффициентом в условии (2.7). На рис. 2 показан вид кривых текучести в плоскости относительных напряжений  $\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_S}, \frac{\sigma_2}{\sigma_S}\right)$ ; для наглядности сплошная линия, соответствующая условию (2.3), построена при  $\delta = 50\%$ . Очевидно, что при  $\delta \rightarrow 0$  условие (2.6) совпадает с условием (2.7).

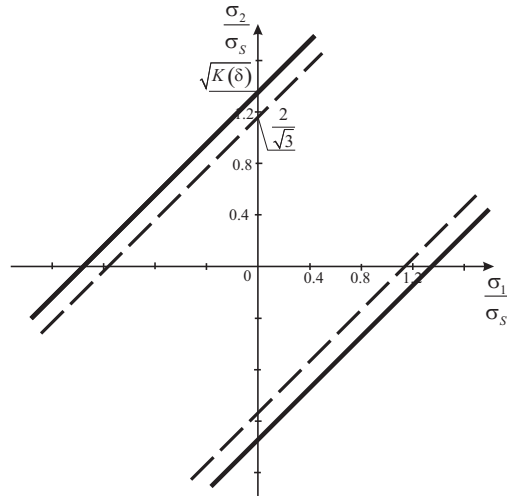


Рис. 2. Критерии текучести (2.3) — сплошная линия, (2.1) — пунктирная линия в плоскости относительных напряжений при плоской деформации

Таким образом, вид нового условия пластичности (2.6) при плоской деформации совпадает с известным условием Мизеса, отличие заключается в определении третьего главного значения тензора напряжений (2.5) и в величине коэффициента при  $\sigma_S^2$  в правой части полученного условия.

## 2.2. Осесимметричная деформация

Согласно А. Надаи [13, с. 263], закон пластичности на ребре призмы Треска ("третий закон пластичности") может быть записан в виде

$$\frac{2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2} = \frac{2\varepsilon_3 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}, \quad (2.8)$$

где  $\sigma_i$  — главные значения тензора напряжения,  $\varepsilon_i$  — главные значения тензора скоростей деформации. Согласно ассоциированному закону пластического течения  $\varepsilon_i = \lambda' \frac{\partial f}{\partial \sigma_i}$  в главных компонентах и условию (2.3), главные значения тензора скоростей деформации определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= -3\lambda' [2(\sigma_2 - \sigma_3)^2 - (\sigma_1 - \sigma_2)^2 - (\sigma_3 - \sigma_1)^2] + \\ &\quad + \frac{3}{2}h_E(3 - 2I_E)[2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3], \\ \varepsilon_2 &= -3\lambda' [2(\sigma_3 - \sigma_1)^2 - (\sigma_2 - \sigma_3)^2 - (\sigma_1 - \sigma_2)^2] + \\ &\quad + \frac{3}{2}h_E(3 - 2I_E)[2\sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_1], \\ \varepsilon_3 &= -3\lambda' [2(\sigma_1 - \sigma_2)^2 - (\sigma_3 - \sigma_1)^2 - (\sigma_2 - \sigma_3)^2] + \\ &\quad + \frac{3}{2}h_E(3 - 2I_E)[2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2]. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Подставляя компоненты (2.9) в правую часть (2.8) и вычитая полученное выражение из левой части (2.8), получим, что равенство (2.8) будет удовлетворяться, когда

$$\frac{12(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_2 - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_2)[2(2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2) - h_E(3 - 2I_E)]} = 0, \quad (2.10)$$

т. е. при

$$\sigma_3 = \sigma_1 \quad \text{или} \quad \sigma_3 = \sigma_2, \quad (2.11)$$

что определяет условие "так называемой полной пластичности, когда два главных напряжения равны" [2, с. 260]. Кроме того, из равенства (2.10) следует, что

$$\sigma_1 \neq \sigma_2 \quad \text{и} \quad \sigma_3 \neq \frac{(\sigma_1 + \sigma_2) + h_E(3 - 2I_E)}{4}.$$

В [2, с. 260] также отмечается, что "Условие  $\sigma_1 = \sigma_2$  приводит к очень частному случаю напряженного состояния (см. § 59, режим А)...".

Полученный результат позволяет сделать вывод, что в предлагаемом условии пластичности (2.3) содержится условие полной пластичности, фундаментальное значение которого для всей теории пластичности обосновывается в работах Д.Д. Ивлева [14; 15].

Подставляя условия (2.11) в (2.3) при  $\sigma_1 \geq \sigma_2$ , получаем систему соотношений<sup>3</sup>:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \pm K_1(\delta)\sigma_S \approx \mp \sigma_S, \quad \sigma_1 - \sigma_2 = \pm K_2(\delta)\sigma_S, \quad (2.12)$$

<sup>3</sup>Учитывая, что уравнение (2.3) является кубическим, очевидно наличие еще одного коэффициента  $K_3$ , который в результате анализа получаемых результатов в дальнейших рассуждениях не рассматривается.

где

$$K_1(\delta) = \frac{(3 - 2I_E)}{6(E_1 - \frac{1}{3}I_E)} \left[ 2 \cos \left( \frac{\xi + 2\pi}{3} \right) + 1 \right] \approx -1,$$

$$K_2(\delta) = \frac{(3 - 2I_E)}{6(E_1 - \frac{1}{3}I_E)} \left[ 2 \cos \left( \frac{\xi + 4\pi}{3} \right) + 1 \right],$$

$$\xi = \arccos \left[ \frac{54}{(3 - 2I_E)^3} - 1 \right].$$

Аналогично получаются соотношения

$$\sigma_2 - \sigma_3 = \pm K_1(\delta)\sigma_S \approx \mp \sigma_S, \quad \sigma_2 - \sigma_3 = \pm K_2(\delta)\sigma_S; \quad (2.13)$$

$$\sigma_3 - \sigma_1 = \pm K_1(\delta)\sigma_S \approx \mp \sigma_S, \quad \sigma_3 - \sigma_1 = \pm K_2(\delta)\sigma_S.$$

Уравнения (2.12) и (2.13) определяют два шестиугольника, изображенных на рис. 3. Очевидно, что внутренний шестиугольник совпадает с условием Треска (2.2), а положение внешнего шестиугольника определяется деформационным упрочнением материала. Эти шестиугольники ассоциированы с новым условием пластичности (2.3) так, как показано на рис. 1.

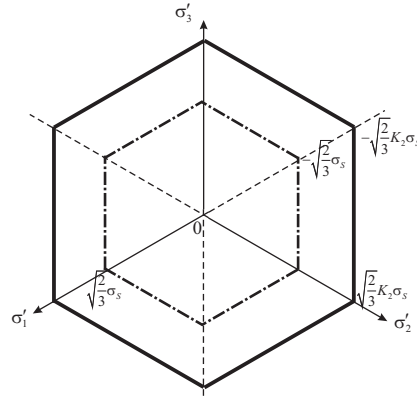


Рис. 3. Кривые текучести (2.12), (2.13), (2.2) на девиаторной плоскости при осесимметричной деформации

Отметим, что в общем случае условие (2.3) при осесимметричной деформации принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} & [(2\sigma_r - \sigma_z - \sigma_\varphi)(2\sigma_z - \sigma_r - \sigma_\varphi) - 9\tau_{rz}^2] (2\sigma_\varphi - \sigma_r - \sigma_z) + \\ & + \frac{3}{4}h_E(3 - 2I_E) [(\sigma_r - \sigma_\varphi)^2 + (\sigma_\varphi - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 + 6\tau_{rz}^2] = \\ & = \frac{h_E^3}{8} [(3 - 2I_E)^3 - 27]. \end{aligned}$$

### 2.3. Плоское напряженное состояние

Известно, что при плоском напряженном состоянии  $\sigma_z = 0$ , а условия (2.1) и (2.2) на плоскости  $\sigma_1, \sigma_2$  определяются соответствующими линиями:



– эллипс при условии Мизеса:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2 = \sigma_S^2; \quad (2.14)$$

– шестиугольник при условии Треска:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \pm\sigma_S, \quad \sigma_1 \pm \sigma_S, \quad \sigma_2 = \pm\sigma_S. \quad (2.15)$$

Подставляя  $\sigma_z = 0$  в условие (2.3), получим уравнение линии в главных значениях  $\sigma_1, \sigma_2$  тензора напряжения, характеризующей предлагаемое в работе условие пластичности при плоском напряженном состоянии:

$$\begin{aligned} (2\sigma_1 - \sigma_2)(2\sigma_2 - \sigma_1)(-\sigma_1 - \sigma_2) + \frac{3}{2}h_E(3 - 2I_E)(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2) = \\ = \frac{h_E^3}{8} [(3 - 2I_E)^3 - 27]. \end{aligned} \quad (2.16)$$

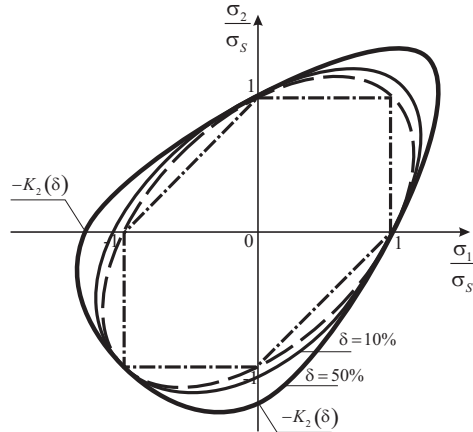


Рис. 4. Кривые текучести (2.14) – пунктирная линия, (2.15) – шрихпунктирная линия, (2.16) – сплошная линия при плоском напряженном состоянии

На рис. 4 кривые текучести (2.14), (2.15) и (2.16) при плоском напряженном состоянии представлены в плоскости относительных напряжений  $\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_S}, \frac{\sigma_2}{\sigma_S}\right)$ . Как и в рассмотренных выше случаях, при  $\delta \rightarrow 0$  линия (2.16) приближается к линии (2.14).

## 2.4. Растяжение с кручением

Плоское напряженное состояние, соответствующее осевому растяжению  $\sigma$  и касательному напряжению кручения  $\tau$ , определяется в компонентах тензора напряжения как  $\sigma_x = \sigma$ ,  $\tau_{xy} = \tau$ , и все остальные компоненты равны нулю. В этом случае условие Мизеса (2.1) в плоскости  $\sigma, \tau$  определяется эллипсом:

$$\sigma^2 + 3\tau^2 = \sigma_S^2; \quad (2.17)$$

а условие Треска (2.2) – линией:

$$\sigma^2 + 4\tau^2 = \sigma_S^2. \quad (2.18)$$

Подставляя в условие (1.4)  $\sigma_x = \sigma$ ,  $\tau_{xy} = \tau$ , получим линию, определяющую критерий текучести в рассматриваемом напряженном состоянии:

$$\sigma(2\sigma^2 + 9\tau^2) + \frac{3}{2}h_E(3 - 2I_E)(\sigma^2 + 3\tau^2) = \frac{h_E^3}{8} [(3 - 2I_E)^3 - 27]. \quad (2.19)$$

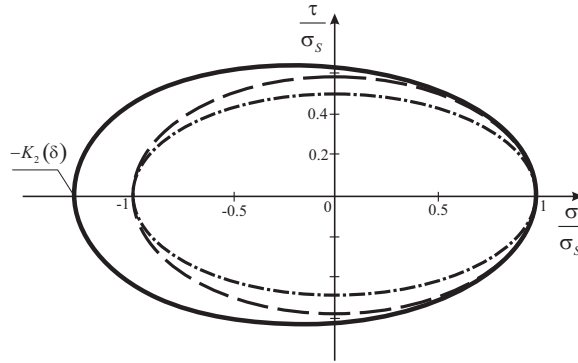


Рис. 5. Кривые текучести (2.17) — пунктирная линия, (2.18) — штрихпунктирная линия, (2.19) — сплошная линия при растяжении и кручении

На рис. 5 представлены кривые текучести в плоскости относительных напряжений  $\left(\frac{\sigma}{\sigma_S}, \frac{\tau}{\sigma_S}\right)$ , определяемые уравнениями (2.17)–(2.19), сравнение которых показывает, что при  $\delta \rightarrow 0$  линия (2.16) приближается к линии (2.14).

## Заключение

Ассоциированный закон пластического позволяет установить, что из условия пластичности (2.3) следуют условия несжимаемости и соосности тензора скоростей деформации и дивергента напряжения, но не выполняется условие пропорциональности компонент этих тензоров (т. е. не выполняются уравнения теории пластичности Сен-Венана–Мизеса [2]).

Возможность описания пластических свойств материала условием (2.3) определяется следующими моментами:

- условие (2.3) представляет собой аппроксимацию перехода материала в состояние пластичности однородной функцией третьего порядка (аппроксимация этого состояния условием пластичности Мизеса соответствует аппроксимации однородной функцией второго порядка), и эта аппроксимация может быть минимизирована;

- отличие условия (2.3) от условия Мизеса (2.1) определяется отношением  $\frac{\sigma_S^+}{\sigma_S^-}$  (пределов текучести на растяжение и на сжатие); это отношение для конструктивных материалов мало по сравнению с разбросом экспериментальных данных;

- условие (2.3) позволяет описывать напряженные состояния материалов, у которых пределы текучести на растяжение и сжатие различны, т. е. условие позволяет учитывать эффект Баушингера;

- для циклически стабилизирующихся материалов при немонотонном нагружении увеличение предела текучести на растяжение всегда приводит к понижению

предела текучести на сжатие [16]; этот экспериментальный факт делает условие (2.3) более предпочтительным.

Количественное подтверждение свойств материала требует дополнительных экспериментальных исследований.

## Литература

- [1] Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: Гостехтеорет-издат, 1956. 420 с.
- [2] Качанов Л.М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 407 с.
- [3] Быковцев Г.И., Ивлев Д.Д. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998. 528 с.
- [4] Писаренко Г.С., Лебедев А.А. Деформирование и прочность материалов при сложном напряженном состоянии. К.: Наукова думка, 1976. 415 с.
- [5] Гольденблат И.И., Кошнов В.А. Критерии прочности и пластичности конструкционных материалов. М.: Машиностроение, 1968. 192 с.
- [6] Гениев Г.А., Кисюк В.Н., Тюпин Г.А. Теория пластичности бетона и железобетона. М.: Стройиздат, 1974. 316 с.
- [7] Ломакин Е.В. Механика сред с зависящими от вида напряженного состояния свойствами // Физическая мезомеханика. 2007. Т. 10. № 5. С. 41–52.
- [8] Деформационно-энергетический критерий разрушения жесткопластических тел / А.А. Буханько [и др.] // Изв. РАН. МТТ. 2009. №6. С. 178–186.
- [9] Буханько А.А. Условие пластичности, связанное с линиями уровня поверхности деформационных состояний, и особенности его приложения в теории идеальной пластичности // Вестник СамГТУ. Сер.: Физ.-мат. науки. 2013. №1(30). С. 199–206.
- [10] Хромов А.И., Кочеров Е.П., Григорьева А.Л. Поверхность нагружения, связанная с линиями уровня поверхности деформаций несжимаемого жесткопластического тела // Вестник СамГТУ. Сер.: Физ.-мат. науки. 2006. №43. С. 88–91.
- [11] Хромов А.И., Кочеров Е.П., Григорьева А.Л. Деформационные состояния и условия разрушения жесткопластических тел // Доклады Академии наук. 2007. V. 413. № 4. С. 481–485.
- [12] Хромов А.И., Козлова О.В. Разрушение жесткопластических тел. Константы разрушения. Владивосток: Дальнаука, 2005. 159 с.
- [13] Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. М.: Изд-во иностр. лит., 1954. 647 с.
- [14] Ивлев Д.Д. Механика пластических сред: в 2 т. Т. 1. Теория идеальной пластичности. М.: Физматлит, 2001. 448 с.
- [15] Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д. Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2003. 704 с.
- [16] Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Справочник по сопротивлению материалов. К.: Изд-во Дельта, 2008. 816 с.

Поступила в редакцию 18/XI/2013;  
в окончательном варианте — 19/XII/2013.

## PLASTICITY CONDITION CONNECTED WITH LEVEL LINES OF STRAIN STATE SURFACE FOR DIFFERENT DEFORMATION PROCESSES

© 2013 A.A. Bukhanko<sup>4</sup>

On the basis of the theory of plastic flow the peculiarities of application of plasticity condition connected with level lines of strain state surface for work-hardening incompressible rigid-plastic body at different stressed states realized in the context of plane and axisymmetric strain, plane stressed state are considered. Comparison of the proposed condition with plasticity conditions of Mises and Tresca is carried out on the basis of construction of yield curves in deviatoric plane and in planes corresponding to certain stressed states. It is shown that the proposed plasticity condition describes plastic flow on the edge of Tresca prism in conditions of axisymmetric deformation.

**Key words:** work-hardening incompressible rigid-plastic body, plasticity condition, plane strain, axisymmetric strain, plane stress.

Paper received 18/*XI*/2013.

Paper accepted 19/*XII*/2013.

---

<sup>4</sup>Bukhanko Anastasiya Andreevna ([abukhanko@mail.ru](mailto:abukhanko@mail.ru)), the Dept. of Higher Mathematics, Samara State Aerospace University, Samara, 443086, Russian Federation.