УДК 004.021

РАЗВИТИЕ МЕТОДА ε-СЛОЯ ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ ИНТЕРВАЛЬНЫХ ОЦЕНОК ПАРАМЕТРОВ КВАЗИДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ ПРОЦЕССОВ

© 2013 Л.И. Сучкова, А.Г. Якунин[1]

В статье приводятся основные положения метода ε-слоя и на его базе рассматривается вычисление интервальных оценок параметров модельных функций квазидетерминированных процессов. В качестве примеров модельных функций выбраны полиномы первого и второго порядков. Показано уменьшение ε-области в пространстве параметров при обработке отсчетов в реализации сигнала.

Ключевые слова: интервальная оценка, модельная функция, квазидетерминированный процесс, пространство параметров, метод ε-слоя.

Сигнал, формируемый и обрабатываемый информационно-измерительными системами, в общем случае представляет собой квазидетерминированную функцию времени, пространственных координат и параметров сопровождения. Эти параметры могут изменяться во времени, создавая неаддитивный шум, не являющийся стационарным эргодическим случайным процессом [1]. Будем полагать, что сигнал в общем случае является функцией пространственно-временных координат $r^T = \{x, y, z, t\}$ и вектора параметров λ. Одним из наиболее простых методов непосредственного нахождения интервальной оценки многопараметрических квазидетерминированных сигналов в условиях априорной неопределенности является метод, основанный на применении модели ε-слоя [2; 3]. В соответствии с этой моделью предполагается, что каждая точка r сигнала $Y(r, \lambda)$ может быть определена с точностью до некоторого интервала $(Y(r_0, \lambda) - \varepsilon^-(r_0), Y(r_0, \lambda) + \varepsilon^+(r_0))$, то есть наблюдаемый сигнал имеет слой неопределенности, причем в общем случае толщина ε-слоя неодинакова для положительных и отрицательных отклонений и является функцией пространственно-временных координат. Действительно, любой сколь угодно сложный сигнал всегда можно представить в виде суммы $E_m(r, \lambda) + \Phi(r)$, где относительно функции сопровождения $\Phi(r)$ можно достоверно утверждать, что ее значения лежат в пределах ε-слоя, а $E_m(r, \lambda)$ – достаточно простая модельная функция, описывающая сигнал. Очевидно, модель ε-слоя не предполагает возможности сужения интервала неопределенности наблюдаемых значений сигнала по мере увеличения числа выборок, и применение модели позволяет получать лишь интервальные оценки с единичными квантилями. Для нахождения таких оценок представим сигнал в виде:

$$Y(r, \lambda) = Y(r, \lambda_0) + \delta Y(r, \lambda, \lambda_0), \tag{1}$$

[1]Сучкова Лариса Иннокентьевна (`lis@agtu.secna.ru`), Якунин Алексей Григорьевич (`yakunin@agtu.secna.ru`), кафедра вычислительных систем и информационной безопасности Алтайского государственного технического университета им. И.И. Ползунова, 656038, Российская Федерация, г. Барнаул, пр. Ленина, 46.

где δY — вариация сигнала, обусловленная отклонением вектора параметров λ относительно его фиксированного значения λ_0. Очевидно, такие вариации будут неразличимы в пространстве наблюдений до тех пор, пока соблюдается условие:

$$-\varepsilon^-(r) \leqslant \delta Y(r, \lambda, \lambda_0) \leqslant \varepsilon^+(r). \tag{2}$$

Полагая, что толщина ε-слоя достаточно мала, для представления $\delta Y(r, \lambda, \lambda_0)$ можно воспользоваться линейным приближением:

$$\delta Y(r, \lambda, \lambda_0) = \left\langle \frac{dY(r, \lambda)}{d\lambda}|_{\lambda=\lambda_0}, \lambda - \lambda_0 \right\rangle.$$

Если вектор λ содержит n компонент, выражение (2) может быть записано в виде:

$$\delta Y(r, \lambda, \lambda_0) = \sum_{i=1}^{n} S_i(r, \lambda_0)\Delta\lambda_i,$$

где $\Delta\lambda_i = \lambda_i - \lambda_{0i}$ — отклонение i-го параметра от его фиксированного значения λ_{0i}, а $S_i(r, \lambda) = \partial Y(r, \lambda)/\partial\lambda_i|_{\lambda=\lambda_0}$ — функция чувствительности по i-му параметру. Тогда, подставляя (3) в (2), можно получить выражение относительно области допустимых отклонений для любого i-го параметра.

Рассмотренную модель сигнала можно использовать для определения состояния объекта контроля по интервальным значениям параметров модельной функции. Для компонент вектора λ в общем случае не выполняется условие независимости, и их интервальные оценки формируют область в пространстве параметров, которая должна изменяться в процессе обработки данных реализации сигнала. Определение области Λ допустимых текущих интервальных значений параметров λ модельной функции осуществляется в соответствии с ее типом.

Так, для линейной функции $E_1(r, \lambda) = \lambda_1 \cdot r + \lambda_0$ будем определять интервальные оценки параметров λ итерационным методом, на каждом шаге которого осуществляется уточнение границ области допустимых значений интервальных оценок в пространстве параметров. Для простоты рассуждений вектор r представим единственной временной компонентой t.

На первом шаге по реализации сигнала в точках $r = 0$ и $r = dr$ с учетом того, что значения функции сопровождения $(\Phi(r))$ находятся в границах ε-слоя вида (2), вычисляется интервал для параметра λ_0, при этом верхняя λ^{max} и нижняя λ^{min} границы оценки параметра λ_0 равны

$$\hat\lambda_0^{\max 1} = Y(0, \lambda) + \varepsilon_0^-, \hat\lambda_0^{\min 1} = Y(0, \lambda) - \varepsilon_0^+. \tag{4}$$

Оценки верхней и нижней границ параметра λ_1 вычисляются в точках, где параметр λ_0 принимает минимально и максимально возможные значения (рис. 1):

$$\begin{aligned} \hat\lambda_1^{\min 1}\Big|_{\hat\lambda_0^{\max 1}} &= \frac{Y(dr, \lambda) - Y(0, \lambda) - wid[-\varepsilon_0^-, \varepsilon_0^+]}{dr}, \\ \hat\lambda_1^{\max 1}\Big|_{\hat\lambda_0^{\max 1}} &= \hat\lambda_1^{\min 1}\Big|_{\hat\lambda_0^{\min 1}} = \frac{Y(dr, \lambda) - Y(0, \lambda)}{dr}, \\ \hat\lambda_1^{\max 1}\Big|_{\hat\lambda_0^{\min 1}} &= \frac{Y(dr, \lambda) - Y(0, \lambda) + wid[-\varepsilon_0^-, \varepsilon_0^+]}{dr}. \end{aligned} \tag{5}$$

Вычисленные на первой итерации интервальные оценки компонент вектора параметров λ формируют в пространстве параметров четырехугольник с вершинами, соответствующими минимальным и максимальным значениям параметров. Будем называть область допустимых интервальных оценок компонент вектора параметров при нахождении функции сопровождения в границах ε-слоя ε-областью.

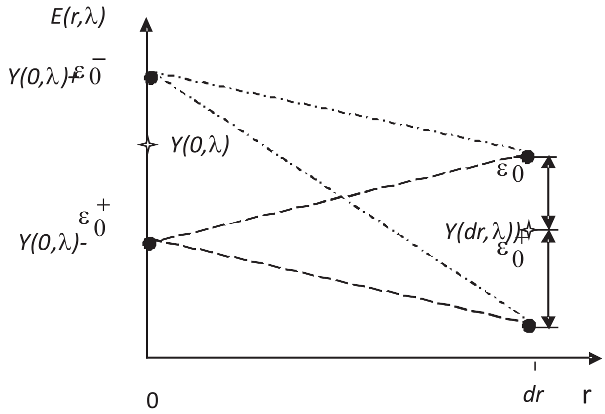

Рис. 1. Оценка параметров модельной функции E₁(r,λ) на первой итерации метода ε-областей

Обозначим ε-область, полученную на первой итерации работы алгоритма, через OE_1, она же на первом шаге будет результирующей областью OR допустимых значений параметров. На последующих итерациях по реализации сигнала в точках $r = i * dr$ и $r = (i+1) * dr$ для $i \geqslant 1$ по формулам, аналогичным (4) и (5), вычисляются нижние и верхние границы оценок параметров λ_0 и λ_1, являющиеся координатами вершин четырехугольника, образующего ε-область OE_{i+1} в пространстве параметров. Для формирования результирующей ε-области OR допустимых значений параметров модельной функции на каждой итерации определяется пересечение текущей области OR и ε-области $OE^{'}_{i+1}$, координаты вершин которой получены из координат вершин ε-области OE_{i+1}путем переноса начала координат из точки $(i * dr, 0)$ в точку (0,0) (рис. 2).

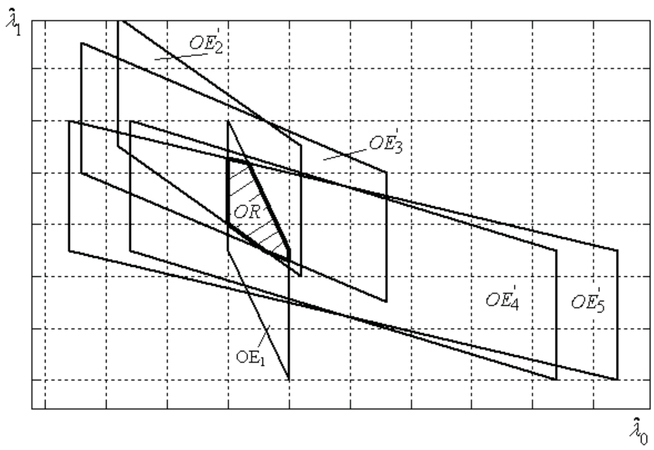

Рис. 2. Результирующая ε-область OR оценки параметров модельной функции $E_1(r, \lambda)$

Если модельная функция представляет собой полином второго порядка вида $E_2(r, \lambda) = \lambda_2 \cdot r^2 + \lambda_1 \cdot r + \lambda_0$, то граничные значения параметров λ_0 и λ_1 на первой итерации метода вычисляются по (4) и (5). Оценка граничных значений параметров λ_2 и λ_1 осуществляется при условии невыхода модельной функции за границы слоя неопределенности на рассматриваемом интервале наблюдения и фиксации граничных интервальных значений параметра λ_0.

Если $\lambda_1 = \hat{\lambda}_1^{\min 1}\Big|_{\hat{\lambda}_0^{\min 1}}$, то минимальное значение λ_2 равно нулю, так как при выполнении условия невыхода за границы слоя соответствующее слагаемое может только увеличивать значения модельной функции. Максимальная величина, на которую может быть увеличено значение модельной функции, не должна превышать $\varepsilon_0^+ + \varepsilon_0^- = wid[\varepsilon_0^-, \varepsilon_0^+]$, то есть $\hat{\lambda}_2^{\max 1}\Big|_{\hat{\lambda}_0^{\min 1}, \hat{\lambda}_1^{\min 1}} = \frac{wid[\varepsilon_0^-, \varepsilon_0^+]}{(dr)^2}$. Если $\lambda_0 = \hat{\lambda}_0^{\max 1}$ и $\lambda_1 = \hat{\lambda}_1^{\max 1}\Big|_{\hat{\lambda}_0^{\max 1}}$, то максимальное значение оценки параметра λ_2 равно нулю, так как значения модельной функции при выполнении условия невыхода за границы слоя увеличиваться не могут, а должны уменьшаться. Максимальная величина, на которую может быть уменьшено значение модельной функции, не должна превышать $\varepsilon_0^+ + \varepsilon_0^- = wid[\varepsilon_0^-, \varepsilon_0^+]$, то есть $\hat{\lambda}_2^{\min 1}\Big|_{\hat{\lambda}_0^{\max 1}, \hat{\lambda}_1^{\max 1}} = -\frac{wid[\varepsilon_0^-, \varepsilon_0^+]}{(dr)^2}$.

По сравнению с линейным приближением модельной функции при фиксации параметра λ_0 для функции $E_2(r, \lambda)$ наблюдается расширение области допустимых значений в пространстве параметров λ_1 и λ_2. Найдем верхние и нижние границы интервальных оценок параметров λ_1 и λ_2 при фиксированных значениях параметра λ_0. Предположим, $\lambda_0 = \hat{\lambda}_0^{\min 1}$. Если $\lambda_1 = \lambda_1^* \in \Big]\hat{\lambda}_1^{\min 1}\Big|_{\hat{\lambda}_0^{\min 1}}, \hat{\lambda}_1^{\max 1}\Big|_{\hat{\lambda}_0^{\min 1}}\Big]$, то есть наклон прямой $\hat{\lambda}_1 \cdot r + \hat{\lambda}_0^{\min 1}$ не превышает $\hat{\lambda}_1^{\max 1}\Big|_{\hat{\lambda}_0^{\min 1}} = \lambda_1^{up}$, возможны как положительные, так и отрицательные значения λ_2, при этом касательная к модельной функции в точке $r = 0$ проходит через λ_1.

При увеличении λ_1 по сравнению с ${\lambda_1}^{up}$ границы интервала для λ_2 будут отрицательны. При условии невыхода модельной функции за границы слоя неопределенности минимальное значение оценки параметра λ_2 $\hat{\lambda}_2^{\min 1}\Big|_{\hat{\lambda}_0^{\min 1}, \hat{\lambda}_1^1}$ (и максимальное по модулю) достигается при касании вершины параболы верхней границы ε-слоя, а максимальное значение (минимальное по модулю в условиях отрицательности значения параметра) $\hat{\lambda}_2^{max\,1}\Big|_{\hat{\lambda}_0^{\min 1}, \hat{\lambda}_1^1}$ уменьшается, начиная от 0 в точке, соответствующей $\lambda_1{=}\lambda_1^{up}$. С другой стороны, интервал изменения параметра λ_2 ограничивает и интервал изменения λ_1, так как график модельной функции должен на промежутке $[0; dr]$ целиком лежать в пределах слоя неопределенности. При росте $\lambda_1{>}{\lambda_1}^{up}$ осуществляется уменьшение λ_2, причем минимальному значению λ_2 соответствует единственное значение параметра λ_1, вычисляемое по формулам:

$$\hat{\lambda}_2^{\min 1}\Big|_{\hat{\lambda}_1^{maE\,1}} = -\frac{4wid[-\varepsilon_0^-, \varepsilon_0^+]}{dr^2}, \ \hat{\lambda}_1^{\max 1}\Big|_{\hat{\lambda}_2^{\min 1}} = \frac{Y(dr, \lambda) - Y(0, \lambda) + 4wid[-\varepsilon_0^-, \varepsilon_0^+}{dr}.$$

Схематично область в пространстве параметров λ_1 и λ_2 при фиксированном $\lambda_0 = \lambda_0^{\min}$ приведена на рис. 3.

Аналогично вычисляются границы ε-области для параметров λ_1 и λ_2 при фиксации $\lambda_0 = \hat{\lambda}_0^{\max 1}$. Эти области представляют собой грань многогранника, являющегося ε-областью допустимых значений параметров модельной функции.

Анализ ε-областей для интервальных оценок параметров модельных функций позволяет судить о параметрах квазидетерминированных процессов, характеризующих состояние объектов контроля в измерительных системах.

На основе проведенных исследований возможно сделать следующие выводы:

1. Предложенный метод позволяет по реализации сигнала вычислять интервальные оценки параметров модельной функции, что является развитием и практическим применением нового направления интервального анализа не только к

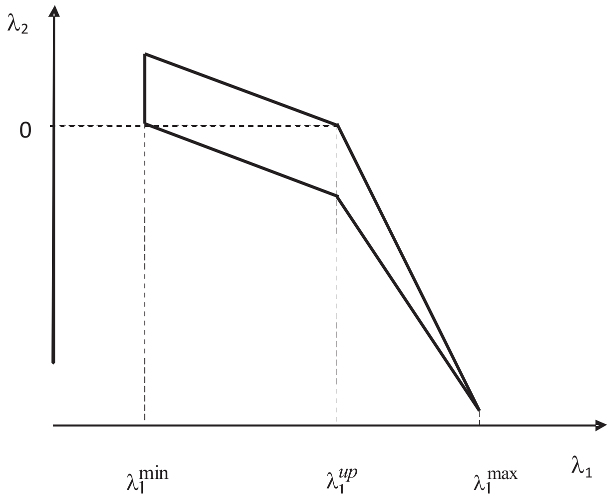

Рис. 3. ε-область оценок параметров λ_1 и λ_2 при $\lambda_0 = \lambda_0^{\min}$

параметрически заданным функциям, но и к многомерным континуальным сигналам.

2. Определенные в пространстве параметров границы ε-области характеризуют состояние объекта контроля и в дальнейшем могут быть использованы для целей контроля и/или управления в информационно-измерительных и управляющих системах.

Литература

[1] Шокин Ю.И. Интервальный анализ. Новосибирск: Наука, 1981. 112 с.

[2] Сучкова Л.И., Якунин А.Г. Применение интервальных оценок в приборах и методах контроля для выделения информационных параметров квазидетерминированных сигналов // Вестник Югорского государственного университета. 2011. Вып. 2(21). С. 69–81.

[3] Сучкова Л.И., Якунин А.Г. Оценка параметров квазидетерминированных информативных сигналов методом ε-слоя // Вестник ДагГТУ. Сер.: Технические науки. 2011. № 4(23). С. 11–22.

Поступила в редакцию 22/*III*/2013;
в окончательном варианте — 22/*III*/2013.

DEVELOPMENT OF METHOD OF ε-LAYER FOR FINDING INTERVAL ESTIMATES OF QUASIDETERMINED PROCESSES

 L.I. Suchkova, A.G. Yakunin[2]

In the paper the basic regulations of method of ε-layer are presented and on their basis the evaluation of interval estimations of parameters of modelling functions of quasidetermined processes is considered. As examples of modelling functions polynomials of the first and second order are chosen. The reduction of ε-area in space of parametres at processing of samples in signal realisation is shown.

Key words: interval estimation, modelling function, quasidetermined process, space of parametres, method of ε-layer.

Paper received 22/*III*/2013.
Paper accepted 22/*III*/2013.

[2]Suchkova Larisa Innokentievna (`lis@agtu.secna.ru`), Yakunin Alexey Grigorievich (`yakunin@agtu.secna.ru`), the Dept. of Computation Systems and Information Security, I.I. Polzunov Altai State Technical University, Barnaul, 656038, Russian Federation