

**ЯВНЫЕ УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ СИСТЕМЫ  
МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ, ПРЕДСТАВЛЕННОЙ  
КОНЕЧНЫМ АВТОМАТОМ**© 2013 М.Б. Букаренко<sup>1</sup>

Представлен алгоритм расчета последовательности состояний системы массового обслуживания с неоднородными приборами и отдельными накопителями по заданной последовательности входных сигналов и начальному состоянию с помощью конечных автоматов Мили.

**Ключевые слова:** система массового обслуживания, неоднородные приборы, отдельные накопители, конечный автомат, уравнения состояния.

**1. Проблема моделирования систем массового  
обслуживания с различными каналами**

В работе [1] был выделен тип систем массового обслуживания (СМО) с различными каналами.

**Определение 1.** Системой массового обслуживания с неоднородными приборами назовем многоканальную СМО, в которой производительность  $\mu_i$ , по крайней мере двух приборов, различна.

**Определение 2.** Системой массового обслуживания с отдельными накопителями назовем такую многоканальную СМО, в которой каждый прибор имеет собственный независимый накопитель емкости  $0 \leq m_i \leq \infty$ , причем заявка, попав в накопитель одного прибора, не может перейти в накопитель другого прибора за все время ожидания обслуживания.

**Определение 3.** Системой массового обслуживания с различными каналами будем называть СМО с неоднородными приборами и отдельными накопителями.

В то время как большинство встречающихся на практике СМО можно отнести к системам с различными каналами, их исследованию посвящено лишь несколько работ.

Система с многосекционной памятью моделируется 4-канальной СМО с двумя типами приборов (по две пары однородных приборов) [2]. Каждая заявка обслу-

<sup>1</sup>Букаренко Максим Борисович ([maxim.bukarenko@gmail.com](mailto:maxim.bukarenko@gmail.com)), кафедра прикладной математики и информатики Самарского государственного технического университета, 443100, Российская Федерация, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

живается обоими типами приборов при случайном выборе прибора из однородной пары. При этом отсутствует постановка задачи в формулировке как теории массового обслуживания (ТМО), так и математической статистики, например, отсутствуют данные о законе распределения входящих заявок.

В работе [3] отмечена актуальность исследования СМО с отдельными очередями к однородным приборам при различных дисциплинах обслуживания, а также тот факт, что аналитические методы ТМО к ним не приспособлены, особенно в случае большого числа приборов.

Подобная многоканальная система с отдельными очередями рассматривается в работе [4], однако заявки представляются в форме сообщения из  $n$  пакетов, каждый из которых посылается на случайно выбранный прибор, что также является частным случаем. В более общем случае система с отдельными очередями рассматривалась в контексте исследования приоритетного обслуживания [5; 6].

Наиболее полное развитие аналитические модели СМО с неоднородными приборами и общей очередью получили в работах В.В. Рыкова и Д.В. Ефросинина в рамках общей теории управляемых систем обслуживания. В работе [7] решается задача о существовании оптимальной политики с точки зрения динамического программирования, однако в [8] показана неполнота этого доказательства.

Системы массового обслуживания с отдельными очередями и неоднородными приборами удалось аналитически смоделировать только в случае либо детерминированного входящего потока, либо "упорядоченного" входа, когда заявка встает в очередь на обслуживание к первому прибору со свободным местом в очереди [9; 10]. В таких системах диспетчеризация не зависит от состояния системы в момент поступления заявки.

Таким образом, очевидна необходимость исследования СМО с различными каналами, наиболее точно отражающими реальные процессы, которые не всегда подчиняются аксиоматике процессов гибели и размножения.

В распространенных на практике случаях аналитические методы моделирования данных СМО не работают.

Это связано с тем, что они распространяются только на системы с простейшими потоками событий. Уравнения Колмогорова для марковских процессов составляются при условии существования предела

$$\lambda_{ij} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_{ij}(t)}{\Delta t},$$

где  $p_{ij}$  – вероятность перехода системы из  $i$ -го состояния в  $j$ -е. Это влечет пуассоновское распределение интервалов времени между событиями потока.

Кроме того, моделирование СМО с тем или иным использованием уравнений Колмогорова подразумевает отсутствие последствия, когда для любых двух непересекающихся отрезков времени число событий, попавших на один из них, зависит только от длины отрезка, но не зависит от числа событий, попавших на другой отрезок. Функциональная связь моментов появления новых заявок в СМО с любым регулятором нарушает данное условие.

При этом уравнения Колмогорова эффективно решаются только в случае однородных марковских цепей, когда гарантированно существует стационарное решение. Наконец, немаловажна громоздкость системы уравнений Колмогорова для СМО с различными каналами, порожденная большим числом состояний системы.

## 2. Нотификация СМО с различными каналами и ее моделирование недетерминированными конечными автоматами

В нотификации [11] рассмотрим систему массового обслуживания с различными каналами сигнатуры  $T = T(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k; m_1, m_2, \dots, m_k)$ , где  $\mu_i$  — пропускная способность,  $m_i$  — число мест в очереди  $i$ -го канала,  $i \in \overline{1, k}$ ;  $k > 0$ . Оптимизация работы системы по минимизации среднего времени обслуживания заявок и вероятности отказа достигается следующей диспетчеризацией входных заявок.

Пусть очередная входная заявка обнаруживает систему в состоянии  $(x_1, x_2, \dots, x_k; y_1, y_2, \dots, y_k)$ , не являющемся состоянием отказа  $(1, 1, \dots, 1; m_1, m_2, \dots, m_k)$ , где  $x_i = 1$ , если  $i$ -й канал занят,  $x_i = 0$ , если свободен,  $y_i$  соответствует наполненности очереди этого канала. В первом случае, если существует один и только один канал (с номером  $i$ ), способный принять заявку ( $0 \leq y_i \leq |x_i m_i - 1|$ ), то заявка направляется к нему. В противном случае оптимальным считаем выбор  $i$ -го канала обслуживания, способного обработать заявку с минимальным средним суммарным временем  $T$  обслуживания попавших в него заявок:

$$T = \min_{i: 0 \leq y_i \leq |x_i m_i - 1|} \mu_i^{-1}(y_i + 1 + \chi_i), \quad (2.1)$$

где  $\chi_i$  — случайная величина, характеризующая незавершенность обработки заявки, находящейся в  $i$ -м канале в момент поступления новой заявки,  $0 \leq \chi_i \leq 1$ . Для простоты примем  $\chi_i = 1$ .

Далее рассмотрим двухканальную СМО с различными каналами пропускной способности  $\mu_1 > \mu_2$  без очереди (сигнатура  $T = T(\mu_1, \mu_2; 0, 0)$  в нотификации [2; 3]). Представим ее поведение в дискретном времени  $n \in \overline{0, +\infty}$  недетерминированным конечным автоматом (НКА)  $K(S, A)$  с алфавитом внутренних состояний  $S = \{(00), (01), (10), (11)\}$  без выделенных начального и конечного состояний, входным алфавитом  $A = \{0, 1\}$  и пустым выходным алфавитом. Буква 1 входного алфавита  $A$  соответствует приходу заявки в систему, а 0 — выработке сигнала освобождения заявки одним из каналов. Матрица переходов автомата  $K(S, A)$  с учетом диспетчеризации (2.1) и недетерминированного выбора переходов  $(11) \rightarrow (10)$  и  $(11) \rightarrow (01)$  приведена в таблице.

Таблица

Матрица переходов НКА  $K(S, A)$  с четырьмя стохастическими дугами

$S \backslash A$	0	1	
(00)	(00)	(10)	(01)
		$p_1$	$p_2$
(01)	(00)	(11)	
(10)	(00)	(11)	
(11)	(10)	(01)	(11)
	$q_1$	$q_2$	

Здесь  $p_1$  — вероятность перехода по стохастической дуге  $(00) \rightarrow (10)$  в соответствии с оптимальной диспетчеризацией (2.1),  $p_2 = 1 - p_1$  — дополнительная вероятность перехода по стохастической дуге  $(00) \rightarrow (01)$ . При этом входная заявка, заставшая систему в состоянии (00) простоя обоих каналов, выбирает каналы 1 или 2 с частотами  $p_1 > 0$  и  $p_2 = 1 - p_1 > 0$  соответственно. Аналогично

$q_1$  — вероятность перехода по стохастической дуге  $(11) \rightarrow (10)$  при освобождении заявки каналом 1,  $q_2 = 1 - q_1$  — дополнительная вероятность перехода по стохастической дуге  $(11) \rightarrow (01)$  при освобождении заявки каналом 2. При этом уход обработанной (выходной) заявки из системы, находившейся в состоянии отказа  $(10)$ , переводит систему в состояния  $(10)$  или  $(01)$  с частотами  $q_1 > 0$  и  $q_2 = 1 - q_1 > 0$  соответственно. Остальные дуги орграфа нестохастические; переход по ним осуществляется при поступлении соответствующего входного сигнала.

На рисунке представлен граф переходов НКА  $K(S, A)$  при детерминированной оптимальной диспетчеризации (2.1). Здесь и на других рисунках разметкой  $\alpha : \beta$  помечены стохастические дуги, переход по которым происходит с вероятностью  $\beta$  при получении входного сигнала  $\alpha$ . Детерминированные петли описывают следующие переходы:

$(11) \rightarrow (11)$  — приход входной заявки (входного сигнала 1) в систему, находящуюся в состоянии отказа  $(11)$ ;

$(00) \rightarrow (00)$  — приход входного сигнала 0 в систему, находящуюся в состоянии простоя  $(00)$ .

Второй вариант описывает «холостой ход» в работе СМО, которая была способна совершить обработку выходной заявки, но таковой не оказалось на месте в данный момент времени.

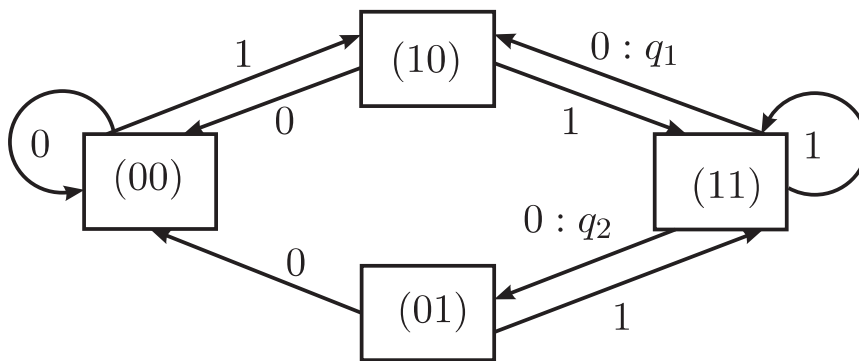


Рис. Граф переходов НКА  $K(S, A)$  с двумя стохастическими дугами  $(11) \rightarrow (10)$  и  $(11) \rightarrow (01)$

При детерминированной диспетчеризации входных заявок (2.1) имеем вероятности  $p_1 = 1, p_2 = 0$ . Тогда получим для  $a = a(n), s_1 = s_1(n), s_2 = s_2(n)$  нелинейные нестационарные рекурсивные стохастические булевы функции в правой части уравнений состояний НКА  $K(S, A)$  с двумя оставшимися недетерминированными переходами  $(11) \rightarrow (10)$  и  $(11) \rightarrow (01)$ :

$$s_1(n + 1) := \begin{array}{|c|c|} \hline a \oplus s_1 s_2 \oplus a s_1 s_2 & a \\ \hline q_1 & q_2 \\ \hline \end{array}, \quad (2.2)$$

$$s_2(n + 1) := \begin{array}{|c|c|} \hline a \oplus a s_1 \oplus a s_1 s_2 & a \oplus s_1 s_2 \oplus a s_1 \\ \hline q_1 & q_2 \\ \hline \end{array}. \quad (2.3)$$

### 3. Алгоритм расчета последовательности состояний СМО по начальному состоянию и последовательности входных сигналов

Избавимся от стохастичности дуг (11)  $\rightarrow$  (10) и (11)  $\rightarrow$  (01) графа на рисунке с помощью изоморфного детерминированного конечного автомата (ДКА)  $K(S, A_1)$  с входным алфавитом  $A_1 = 00, 01, 10$ , обозначив буквой 00 сигнал срабатывания прибора 1 (в том числе «холостой ход» при простое (01) этого прибора), буквой 01 – сигнал срабатывания прибора 2 (в том числе «холостой ход» при простое (10) этого прибора), буквой 10 – сигнал прихода входной заявки. Отношение вероятностей появления букв 00 и 01 во входном потоке сигналов ДКА  $K(S, A_1)$  равно  $q_1/q_2$ . Соответствующим образом заменим матрицу и граф переходов ДКА  $K(S, A_1)$  и получим рекурсивную (то есть разрешимую последовательно) систему линейных рекурсивных нестохастических уравнений состояний:

$$s_1(n+1) := a_1 \oplus a_1 a_2 \oplus a_2 s_1 \oplus a_1 a_2 s_1 = \alpha_n \oplus \beta_n s_1(n), \quad (3.1)$$

$$s_2(n+1) := a_1 s_1 \oplus a_1 a_2 s_1 \oplus a_2 s_2 \oplus s_2 \oplus a_1 a_2 s_1 s_2 = \gamma_n \oplus \delta_n s_2(n), \quad (3.2)$$

$$\alpha_n := a_1(n) \overline{a_2(n)} \in \{0, 1\}, \beta_n := \overline{a_1(n)} a_2(n) \in \{0, 1\}, \quad (3.3)$$

$$\gamma_n := a_1 \overline{a_2(n)} s_1(n) \in \{0, 1\}, \delta_n := \overline{a_2(n)} \oplus a_1(n) a_2(n) s_1(n) \in \{0, 1\}. \quad (3.4)$$

Предлагается следующий алгоритм получения последовательности  $\vec{S} := \{(s_1(n), s_2(n))\}_{n=0}^{+\infty}$  состояний СМО по заданной последовательности входных сигналов  $\vec{a} := \{(a_1(n), a_2(n))\}_{n=0}^{+\infty}$  и начальному состоянию  $(s_1(0), s_2(0))$ :

Шаг 1. По определению (3.3) найти последовательности

$$\vec{\alpha}(\vec{a}) := \{\alpha_n\}_{n=0}^{+\infty}, \vec{\beta}(\vec{a}) := \{\beta_n\}_{n=0}^{+\infty}$$

параметров линейной рекурсии.

Шаг 2. По определению

$$\pi_1(\vec{\beta}, m, k) := \prod_{\tau=0}^k \beta_{m-\tau} \in \{0, 1\}$$

найти двухиндексную последовательность

$$\vec{\pi}_1(\vec{a}) := \{\pi_1(\vec{\beta}, n, k)\}_{n=0; 0 \leq k \leq n}^{+\infty}.$$

Шаг 3. Подставляя найденные последовательности  $\vec{\alpha}(\vec{a})$ ,  $\vec{\pi}_1(\vec{a})$  и координату  $s_1(0)$  начального состояния системы в рекурсию (3.1), найти последовательность  $\vec{s}_1(\vec{a}) := \{s_1(n)\}_{n=0}^{+\infty}$  первых координат искомых состояний СМО.

Шаг 4. По определению (3.4) найти последовательности

$$\vec{\gamma}(\vec{a}) := \{\gamma_n\}_{n=0}^{+\infty}, \vec{\delta}(\vec{a}) := \{\delta_n\}_{n=0}^{+\infty}$$

параметров линейной рекурсии (3.1).

Шаг 5. По определению

$$\pi_2(\vec{\delta}, m, k) := \prod_{\tau=0}^k \delta_{m-\tau} \in \{0, 1\}$$

найти двухиндексную последовательность

$$\vec{\pi}_2(\vec{a}) := \{\pi_2(\vec{\delta}, n, k)\}_{n=0; 0 \leq k \leq n}^{+\infty}.$$

Шаг 6. Подставляя найденные последовательности  $\vec{\alpha}(\vec{a})$ ,  $\vec{\pi}_2(\vec{a})$  и координату  $s_2(0)$  начального состояния в рекурсию (3.2), найти последовательность  $\vec{s}_2(\vec{a}) := \{s_2(n)\}_{n=0}^{+\infty}$  вторых координат искомым состояниям СМО. Тем самым последовательность  $\vec{S} = \vec{S}(\vec{a})$  построена.

Представим алгоритм из шагов 1–6 схемой

$$\begin{aligned} \vec{a} &\rightarrow \left( \begin{array}{c} \vec{\alpha}(\vec{a}) \\ \vec{\beta}(\vec{a}) \end{array} \right) \rightarrow \vec{\pi}_1(\vec{\beta}(\vec{a})) \rightarrow \vec{s}_1(\vec{a}) \rightarrow \\ &\rightarrow \left( \begin{array}{c} \vec{\gamma}(\vec{a}) \\ \vec{\delta}(\vec{a}) \end{array} \right) \rightarrow \vec{\pi}_2(\vec{\delta}(\vec{a})) \rightarrow \vec{s}_2(\vec{a}). \end{aligned}$$

Поскольку

$$\pi_1(\vec{\beta}, n, n) = \prod_{\tau=0}^n \beta_{n-\tau} = 0,$$

если  $\exists k \in \overline{0, n} : \beta_k = \overline{a_1(k)a_2(k)} = 0$ , то есть входная последовательность содержит хотя бы один сигнал, отличный от сигнала срабатывания прибора 2;

$$\pi_2(\vec{\delta}, n, n) = \prod_{\tau=0}^n \delta_{n-\tau} = 0,$$

если  $\exists k \in \overline{0, n} : \delta_k = \overline{a_2(k)} \oplus a_1(k)a_2(k)s_1(k) = 0$ , то явные уравнения состояний (2.2)–(2.3) примут окончательный вид:

$$s_1(n+1) := \begin{cases} \sum_{t=0}^n \alpha_{n-t} \oplus s_1(0) \leftarrow \\ \leftarrow \left( \forall k \in \overline{0, n} \Rightarrow \beta_k = \overline{a_1(k)a_2(k)} = 1 \right), \\ \sum_{t=0}^{m-1} \alpha_{m-t} \leftarrow (m \geq n) \wedge \\ \wedge \left( \forall k \in \overline{0, n-1} \Rightarrow \beta_k = \overline{a_1}a_2 = 1 \right) \wedge (\beta_n = 0); \end{cases} \quad (3.5)$$

$$s_2(n+1) := \begin{cases} \sum_{t=0}^n \gamma_{n-t} \oplus s_2(0) \leftarrow \\ \leftarrow \left( \forall k \in \overline{0, n} \Rightarrow \delta_k = \overline{a_2(k)} \oplus a_1(k)a_2(k)s_1(k) = 1 \right), \\ \sum_{t=0}^{m-1} \gamma_{m-t} \leftarrow (m \geq n) \wedge \\ \wedge \left( \forall k \in \overline{0, n-1} \Rightarrow \delta_k = 1 \right) \wedge (\delta_n = \overline{a_2} \oplus a_1a_2s_1 = 0). \end{cases} \quad (3.6)$$

Первая координата  $s_1(n+1)$  текущего состояния СМО, однозначно определяющая рабочее состояние медленного прибора, перестает зависеть от выбора начального состояния, начиная с такта

$$s_1(n+1) = \sum_{t=0}^n \alpha_{n-t} \pi_1(\vec{\beta}, n, t-1) \oplus s_1(0) \pi_1(\vec{\beta}, n, n)$$

прихода сигнала срабатывания медленного прибора.

Из вторых строк равенств (3.5)–(3.6) и определений (3.3)–(3.4) следует свойство наследования координатами  $(s_1(n+1), s_2(n+1))$  состояний СМО последних значений двумерной функции:

$$\begin{aligned} (\alpha_n, \gamma_n) &:= \left( a_1(n)\overline{a_2(n)}, (a_1(n)\overline{a_2(n)}s_1(n)) \right) = \\ &= \left( a_1(n)\overline{a_2(n)}, (a_1(n)\overline{a_2(n)}a_1(n-1)\overline{a_2(n-1)}) \right) \end{aligned}$$

после появления нулевых значений

$$\begin{aligned} \beta_n = \overline{a_1(n_1)a_2(n_1)} = 0 &\Leftrightarrow (a_1(n_1) = 1 \vee a_2(n_1) = 0); \\ \delta_{n_2} = a_2(n_2) \oplus a_1(n_2)a_2(n_2)s_1(n_2) &= \\ = \overline{a_2(n_2)} \oplus a_1(n_2)a_2(n_2)a_1(n_2-1)\overline{a_2(n_2-1)} &= 0. \end{aligned}$$

## Заключение

Представление СМО с различными каналами в виде НКА и предложенный алгоритм получения уравнений состояния позволили создать комплекс программ имитационного моделирования работы системы. При этом возможно задавать различные законы распределения интервалов времени между событиями. Описанная нотификация СМО позволила создать программу автоматического расчета матрицы смежности и визуализации графа состояний системы, эффективно работающую и для задач большой размерности. Данные программные продукты подробно описаны в работе [12]. Алгоритм получения входного сигнала по эмпирическим данным представлен в работе [13].

## Литература

- [1] Котенко А.П., Букаренко М.Б. Система массового обслуживания с различными каналами как конечный автомат // Вестник СамГТУ. Сер.: Физ.-мат. науки. 2012. № 28(3). С. 114–124.
- [2] Артамонов Г.Т., Брехов О.М. Аналитические вероятностные модели функционирования ЭВМ. М.: Энергия. 1978. 368 с.
- [3] Введенская Н.Д., Добрушин Р.Л., Карпелевич Ф.И. Система обслуживания с выбором наименьшей из двух очередей — асимптотический подход // Проблемы передачи информации. 1996. Т. 32. № 1. С. 20–34.
- [4] Введенская Н.Д. Большая система обслуживания с передачей сообщения по нескольким путям // Проблемы передачи информации. 1998. Т. 34. № 2. С. 98–108.
- [5] Печинкин А.В., Таташев А.Г. Обобщение дисциплины преимущественного разделения процессора // Известия АН СССР. Сер.: Техн. кибернетика. 1981. № 4. С. 120–125.
- [6] Д’Апиче Ч., Манзо Р., Печинкин А.В. Система обслуживания МАРК/ГК/1 конечной емкости с обобщенной дисциплиной преимущественного разделения прибора // Автоматика и телемеханика. 2004. № 11. С. 114–121.
- [7] Rykov V.V. Monotone Control of Queueing Systems with Heterogeneous Servers // Queueing Systems. 2001. V. 37. P. 391–403.
- [8] De V’ericourt F., Yong-Pin Zho. On the incomplete results for the heterogeneous server problem // Queueing Systems. 2006. Vol. 52. P. 189–191.
- [9] Nawijn W.M. On a two-server finite queueing system with ordered entry and deterministic arrivals // European Journal of Operational Research. 1984. V. 18. № 3. P. 388–395.
- [10] Elsayed E.A. Multichannel queueing systems with ordered entry and finite source // Computers and Operations Research. 1983. V. 10. № 3. P. 213–222.
- [11] Котенко А.П., Букаренко М.Б. Аналитическое описание систем массового обслуживания с использованием колец вычетов // Математическое моделирование и краевые задачи: труды VII Всероссийской научной конференции. Самара: СамГТУ, 2010. С. 136–140.
- [12] Котенко А.П., Букаренко М.Б. Комплекс программ имитационного моделирования работы системы массового обслуживания с неоднородными приборами и отдельными накопителями // Математическое моделирование и краевые задачи: труды IX Всероссийской научной конференции. Самара: СамГТУ, 2013. С. 94–97.

- [13] Котенко А.П., Букаренко М.Б. Анализ высоковолатильных рынков с использованием метода Берга и фильтров Чебышева II рода // Вестник СамГТУ. Сер.: Физ.-мат. науки. 2011. № 3. С. 189–192.

Поступила в редакцию 23/VII/2013;  
в окончательном варианте — 23/VII/2013.

## EXPLICIT EQUATIONS OF STATE OF QUEUEING SYSTEM, REPRESENTED BY FINITE STATE MACHINE

© 2013 M.B. Bukarenko<sup>2</sup>

The algorithm of calculation of sequence of states of queueing system with heterogeneous equipment and separate storage devices on the basis of preset sequence of input signals and initial state with the help of finite Mealy automaton is presented.

**Key words:** queueing system, heterogeneous equipment, separate storage devices, finite automaton, equations of state.

Paper received 23/VII/2013.  
Paper accepted 23/VII/2013.

---

<sup>2</sup>Bukarenko Maxim Borisovich ([maxim.bukarenko@gmail.com](mailto:maxim.bukarenko@gmail.com)), the Dept. of Applied Mathematics and Informatics, Samara State Technical University, Samara, 443100, Russian Federation.