

АВТОМОДЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О СМЕШАННОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ ПЛАСТИНЫ С ТРЕЩИНОЙ В СРЕДЕ С ПОВРЕЖДЕННОСТЬЮ¹

© 2013 Л.В. Степанова, Е.М. Адылина²

В статье получено асимптотическое решение задачи определения напряженно-деформированного состояния и поля сплошности в окрестности вершины трещины в образце, находящемся в условиях смешанного деформирования. На основании автомоделного представления решения и гипотезы о формировании области полностью дефрагментированного материала вблизи вершины трещины получено распределение напряжений, скоростей деформаций и сплошности у стационарной трещины в среде с поврежденностью в полном диапазоне смешанных форм деформирования (от чистого сдвига до нормального отрыва). Построены высшие приближения в асимптотических разложениях полей напряжений, скоростей деформаций ползучести и сплошности.

Ключевые слова: напряженно-деформированное состояние у вершины трещины, степенной определяющий закон, смешанное деформирование, метод разложения по собственным функциям, нелинейная задача на собственные значения, поврежденность, параметр поврежденности.

1. Автомоделные представления решений. Приложение к смешанному деформированию образцов с трещинами

В нелинейной механике разрушения в последнее время сложилось представление о процессе разрушения как о многомасштабном, многоуровневом процессе [1–3]. Аналитическое моделирование многомасштабного, многоуровневого характера разрушения и изменения микроструктуры материала сопряжено с трудностями, обусловленными невозможностью континуальной механики сплошных сред различать явление на разных масштабах [2]. В [4] отмечается, что нужно понять не только явление на каждом из многих диапазонов масштабов, но и взаимодействие явлений в очень разных масштабах. Г.И. Баренблатт пишет [4], что подобные взаимодействия постоянно проявляются в таких областях, как материаловедение и биология. Здесь же можно продолжить и естественно назвать механику

¹Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект 12-08-00390).

²Степанова Лариса Валентиновна (stepanova@samgu.ru), Адылина Екатерина Михайловна (adylinaem@samgu.ru), кафедра математического моделирования в механике Самарского государственного университета, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

разрушения, где по самому определению влияние параметров, описывающих явление в малых масштабах, распространяется по всему диапазону масштабов рассматриваемой задачи: микроструктура материала может оказывать существенное влияние на макроскопическое поведение образца. Поэтому целесообразно создать и использовать такие модели, которые бы связывали микроструктуру материала и ее влияние на макроскопическое поведение образца. Неполная автомодельность и автомодельные решения второго рода являются, по всей видимости, средством понимания того, как это влияние распространяется, и инструментом решения таких задач с помощью компьютера [4].

В механике хрупкого разрушения подобная модель может быть создана на основе использования сингулярного поведения напряжений у вершины трещины или углового выреза с различными показателями степени в асимптотическом разложении напряжений вблизи кончика трещины. В линейной механике разрушения (ЛМР) в качестве базового распределения может быть выбрано классическое решение Уильямса с корневой особенностью напряжений в непосредственной окрестности вершины трещины. Более сильная или более слабая особенности могут быть введены для моделирования степени поврежденности (степени разрушения) материала у кончика трещины на уровне мезо- и микроструктуры материала [2]. С математической точки зрения данная модель приводит к необходимости определения всего спектра собственных значений в задачах на собственные значения, следующих из проблемы нахождения напряженно-деформированного состояния у вершины трещины [5–7]. Если в ЛМР весь спектр собственных значений найден и построено полное асимптотическое представление полей напряжений и перемещений (решение М. Уильямса) [8], то в нелинейной механике разрушения остается открытым вопрос о спектре собственных значений нелинейной задачи на собственные значения, следующей из проблемы отыскания полей напряжений у вершины трещины в материалах со степенными определяющими уравнениями. Особенно актуальной проблема определения всего спектра собственных значений стала при изучении смешанного деформирования образцов с дефектами и трещинами [9–11], поскольку очевидно, что в линейной механике справедлив принцип суперпозиции, следовательно, решения, описывающие деформацию отрыва, складываются с решениями, отвечающими трещине поперечного сдвига. Для материалов с нелинейными определяющими соотношениями, очевидно, принцип суперпозиции не может быть применен, и анализ напряженно-деформированного состояния в случае смешанного нагружения элемента конструкции представляет собой самостоятельную задачу.

Вопросам анализа напряженно-деформированного состояния у вершины трещины в различных материалах в условиях пластического течения, ползучести посвящается большое количество работ [12–19]. Особенно интересными в последнее время стали вопросы смешанного нагружения элементов конструкций с дефектами [9–11]. Если для антиплоского сдвига, нормального отрыва и поперечного сдвига получен класс автомодельных решений [14], то для комбинации нескольких форм деформирования результаты полностью отсутствуют. В [16] определен весь спектр собственных значений в нелинейной задаче на собственные значения, следующей из проблемы нахождения напряженно-деформированного состояния (НДС) вблизи кончика трещины в материале со степенным определяющим законом в условиях смешанного нагружения для всех значений параметра смешанности нагружения, характеризующего его вид. Параметр смешанности изменяется от 0 (что соответствует поперечному сдвигу) до 1 (что отвечает нормальному отрыву).

В [16] решение нелинейных задач на собственные значения получено численно, что позволило найти весь спектр собственных значений для степенного определяющего закона. Проведенное качественное исследование собственных значений в [16] позволило в настоящем исследовании использовать свойство автомодельности процесса накопления повреждений в твердом теле (для степенного закона накопления повреждений) и ввести новую автомодельную переменную.

В настоящей работе на основе автомодельного представления решения задачи определения полей напряжений, деформаций и сплошности у вершины трещины в твердом теле в условиях ползучести и введения автомодельной промежуточной асимптотики получен скейлинговый закон накопления повреждений на мезоуровне (автомодельный закон роста области активного накопления повреждений и области полностью поврежденного материала). Получены автомодельные решения задач отыскания НДС в образцах с трещинами для смешанных форм деформирования элементов конструкций с трещинами в среде с поврежденностью (во всем диапазоне смешанных форм деформирования). Вид смешанного нагружения задается параметром смешанности нагружения Ши [20–22] (и определяется как соотношение окружной и сдвиговой компонент тензора напряжений на линии продолжения трещины)

$$M^p = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \left| \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sigma_{\theta\theta}(r, \theta = 0)}{\sigma_{r\theta}(r, \theta = 0)} \right|. \quad (1.1)$$

Данная работа развивает подход, примененный в [14; 15], и использует автомодельное представление решения для анализа полей напряжений, скоростей деформаций и сплошности у вершины трещины в случае смешанного деформирования.

2. Автомодельное решение задачи о трещине в среде с поврежденностью в условиях смешанного деформирования (нормальный отрыв и поперечный сдвиг). Промежуточная автомодельная асимптотика

2.1. Анализ размерностей. Автомодельное представление решения

Целью настоящего анализа является определение полей напряжений, деформаций и сплошности вблизи вершины трещины, находящейся в условиях смешанного деформирования (рис. 1).

Для рассматриваемой задачи уравнения равновесия в полярной системе координат имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} = 0. \quad (2.1)$$

В плоской задаче разрешающим относительно искомой функции напряжений Эри выступает одно условие совместности деформаций

$$2 \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varepsilon_{r\theta}}{\partial \theta} \right) = \frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial \theta^2} - r \frac{\partial \varepsilon_{rr}}{\partial r} + r \frac{\partial^2 (r \varepsilon_{\theta\theta})}{\partial r^2}. \quad (2.2)$$

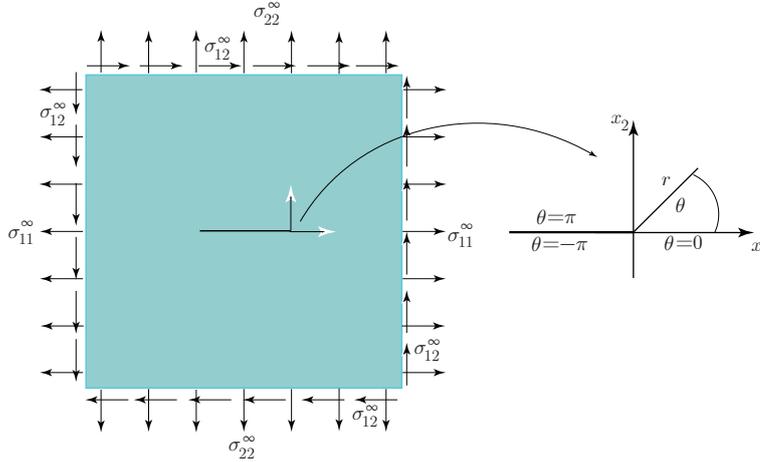


Рис. 1. Геометрия задачи и схематичное представление нагрузки

Поведение материала описывается с помощью определяющих уравнений, построенных на основе степенного закона Бейли-Нортонa, теории установившейся ползучести с применением концепции эффективного напряжения:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = (3/2)B(\sigma_e/\psi)^{n-1}s_{ij}/\psi, \quad (2.3)$$

где $\sigma_e = \sqrt{2s_{ij}s_{ij}}$ – интенсивность касательных напряжений для случая плоского деформированного состояния, определяемая равенством $\sigma_e = \sqrt{3}\sqrt{(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 + 4\sigma_{r\theta}^2}/2$, ψ – параметр сплошности, эволюционирующий в соответствии со степенным законом накопления повреждений

$$\frac{d\psi}{dt} = -A \left(\frac{\sigma_{eqv}}{\psi} \right)^m, \quad (2.4)$$

$\sigma_{eqv} = \alpha\sigma_e + \beta\sigma_1 + (1 - \alpha - \beta)\sigma_{kk}$ – эквивалентное напряжение.

Процесс активного накопления рассеянных повреждений происходит в непосредственной окрестности вершины трещины, где образуется область диспергированного (дефрагментированного, разрушенного) материала, а на удалении от нее параметр сплошности стремится к единице, что отвечает неповрежденному материалу. Это позволяет сформулировать асимптотическое граничное условие в бесконечно удаленной точке как условие асимптотического сближения с решением ХРР – решением для степенных определяющих уравнений (2.3) [23–25], где $\psi \equiv 1$ (таким образом, рассматривается непосредственная окрестность вершины трещины). В соответствии с гипотезой о маломасштабной поврежденности на больших расстояниях от вершины трещины (больших по сравнению с характерным линейным размером области полностью поврежденного материала, но все еще малых по сравнению с длиной трещины, характерным линейным размером образца) поле напряжений определяется решением ХРР (решением аналогичной задачи без учета процесса накопления повреждений $\psi \equiv 1$):

$$\sigma_{ij}(r \rightarrow \infty, \theta, t) = \left(\frac{C^*}{BI_n r} \right)^{1/(n+1)} \bar{\sigma}_{ij}(\theta, n), \quad (2.5)$$

где C^* – инвариантный интеграл теории установившейся ползучести. Начальное

условие при $t = 0$ и граничное условие в бесконечно удаленной точке (2.5) совпадают, поскольку они задаются решением задачи для $\psi \equiv 1$.

Анализ размерности величин, входящих в уравнения (2.3) – (2.5), позволяет установить, что для определяющих соотношений (2.3), кинетического уравнения (2.4), начальных и граничных условий (2.5) существует автомодельная переменная

$$R = r (At)^{-(n+1)/m} BI_n/C^*, \quad (2.6)$$

и система уравнений задачи допускает автомодельное представление решения:

$$\sigma_{ij}(r, \theta, t) = (At)^{-1/m} \hat{\sigma}_{ij}(R, \theta), \quad \psi(r, \theta, t) = \hat{\psi}(R, \theta).$$

Следует отметить, что граничное условие в бесконечно удаленной точке может быть сформулировано в более общей по сравнению с (2.5) форме

$$\sigma_{ij}(r \rightarrow \infty, \theta, t) \rightarrow \tilde{C} r^s \bar{\sigma}_{ij}(\theta, n), \quad (2.7)$$

где показатель степени s подлежит определению в ходе решения задачи, \tilde{C} – амплитуда поля напряжений на бесконечности, определяемая геометрией реального образца и системой приложенных нагрузок. Для степенных определяющих соотношений (2.3), кинетического уравнения (2.4) и более общих граничных условий (2.7) существует автомодельная переменная

$$R = r \left(At \tilde{C}^m \right)^{1/(sm)} \quad (2.8)$$

(автомодельные решения, основанные на введении автомодельных переменных, степени которых должны быть определены в ходе решения задачи, относят к автомодельным решениям второго рода [4]).

После введения автомодельной переменной уравнения равновесия (2.1), определяющие уравнения (2.3), условие совместности (2.2), сохраняют свою форму, а кинетическое уравнение накопления повреждений принимает вид

$$R \hat{\psi}_{,R} = -sm \left(\hat{\sigma}_e / \hat{\psi} \right)^m. \quad (2.9)$$

Далее знак $\hat{\cdot}$, обозначающий безразмерную величину, опускается.

2.2. Асимптотическое решение задачи. Метод разложения по собственным функциям

Асимптотическое решение задачи вне области диспергированного материала, формирующейся у вершины трещины (на больших расстояниях от вершины трещины $R \rightarrow \infty$) разыскивается в форме

$$\chi(R, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} R^{\lambda_k + 1} f_k(\theta), \quad \psi(R, \theta) = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} R^{\gamma_k} g_k(\theta), \quad (2.10)$$

где $\lambda_k < 0, \gamma_k < 0, f_k(\theta), g_k(\theta)$ подлежат определению в ходе решения задачи. В силу (2.10) асимптотическое представление компонент тензора напряжений вне области диспергированного материала имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta}(R, \theta) &= \sum_{k=0}^{\infty} R^{\lambda_k - 1} (\lambda_k + 1) \lambda_k f_k(\theta), & \sigma_{R\theta}(R, \theta) &= - \sum_{k=0}^{\infty} R^{\lambda_k - 1} \lambda_k f'_k(\theta), \\ \sigma_{RR}(R, \theta) &= \sum_{k=0}^{\infty} R^{\lambda_k - 1} [(\lambda_k + 1) f_k(\theta) + f''_k(\theta)]. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Асимптотический анализ уравнений задачи позволяет установить, что справедливы равенства $\lambda_k - \lambda_0 = k(\lambda_1 - \lambda_0)$ для всех k , и асимптотическое представление интенсивности касательных напряжений принимает форму

$$\sigma_e(R, \theta) = R^{\lambda_0 - 1} \sigma_e^{(0)}(\theta) \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} R^{\lambda_k - \lambda_0} \sigma_e^{(k)}(\theta) \right],$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_e^{(0)} &= \sqrt{[(1 - \lambda_0^2)f_0 + f_0'']^2 + 4\lambda_0^2(f_0')^2}, \\ \sigma_e^{(1)} &= f_e^{(1)}/(\sigma_e^{(0)})^2, \quad f_e^{(1)} = [(1 - \lambda_0^2)f_0 + f_0''][(1 - \lambda_1^2)f_1 + f_1''] + 4\lambda_0\lambda_1 f_0' f_1', \\ \sigma_e^{(2)} &= \frac{1}{2} \left[\frac{f_e^{(2)}}{(\sigma_e^{(0)})^2} - \frac{(f_e^{(1)})^2}{(\sigma_e^{(0)})^4} \right], \quad \sigma_e^{(3)} = \frac{1}{2} \left[\frac{f_e^{(3)}}{(\sigma_e^{(0)})^2} - \frac{f_e^{(1)} f_e^{(2)}}{(\sigma_e^{(0)})^4} + \left(\frac{f_e^{(1)}}{(\sigma_e^{(0)})^2} \right)^3 \right], \\ f_e^{(2)} &= [(1 - \lambda_1^2)f_1 + f_1'']^2 + 2[(1 - \lambda_0^2)f_0 + f_0''][(1 - \lambda_2^2)f_2 + f_2''] + 4\lambda_1^2 f_1^2 + 8\lambda_0\lambda_2 f_1' f_2', \\ f_e^{(3)} &= 2[(1 - \lambda_0^2)f_0 + f_0''][(1 - \lambda_3^2)f_3 + f_3''] + 2[(1 - \lambda_1^2)f_1 + f_1''][(1 - \lambda_2^2)f_2 + f_2''] + \\ &\quad + 8\lambda_0\lambda_3 f_0' f_3' + 8\lambda_1\lambda_2 f_1' f_2', \\ \sigma_e^{(4)} &= \frac{1}{8} \left[-5 \left(\frac{f_e^{(1)}}{(\sigma_e^{(0)})^2} \right)^4 + 6 \frac{(f_e^{(1)})^2 f_e^{(2)}}{(\sigma_e^{(0)})^6} - \left(\frac{f_e^{(2)}}{(\sigma_e^{(0)})^2} \right)^2 - 4 \frac{f_e^{(1)} f_e^{(3)}}{(\sigma_e^{(0)})^4} + 4 \frac{f_e^{(4)}}{(\sigma_e^{(0)})^2} \right], \\ f_e^{(4)} &= [(1 - \lambda_2^2)f_2 + f_2'']^2 + 2[(1 - \lambda_0^2)f_0 + f_0''][(1 - \lambda_4^2)f_4 + f_4''] + \\ &\quad + 2[(1 - \lambda_1^2)f_1 + f_1''][(1 - \lambda_3^2)f_3 + f_3''] + 4\lambda_2^2(f_2')^2 + 8\lambda_0\lambda_4 f_0' f_4' + 8\lambda_1\lambda_3 f_1' f_3'. \end{aligned}$$

Кинетическое уравнение накопления повреждений и гипотеза о том, что порядки малости слагаемых, последовательно появляющихся в этом уравнении в правой и левой частях, позволяют связать показатели степеней в асимптотических разложениях функции напряжений Эри и параметра сплошности (2.10): $\gamma = (\lambda_0 - 1)m$, $\gamma_k = (\lambda_0 - 1)m + k(\lambda_1 - \lambda_0)$. Анализ асимптотических разложений компонент тензора скоростей деформаций ползучести дает возможность установить, что $\lambda_1 - \lambda_0 = \gamma = (\lambda_0 - 1)m$, откуда легко найти, что $\gamma_k = k(\lambda_0 - 1)m$, и получить следующие асимптотические представления компонент тензора скоростей деформаций ползучести вне области полностью поврежденного (диспергированного) материала:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{RR}(R, \theta) &= R^{(\lambda_0 - 1)n} \varepsilon_{RR}^{(0)}(\theta) + R^{(\lambda_0 - 1)(n+m)} \varepsilon_{RR}^{(1)}(\theta) + R^{(\lambda_0 - 1)(n+2m)} \varepsilon_{RR}^{(2)}(\theta) + \\ &\quad + R^{(\lambda_0 - 1)(n+3m)} \varepsilon_{RR}^{(3)}(\theta) + R^{(\lambda_0 - 1)(n+4m)} \varepsilon_{RR}^{(4)}(\theta) + \dots, \\ \dot{\varepsilon}_{R\theta}(R, \theta) &= R^{(\lambda_0 - 1)n} \varepsilon_{R\theta}^{(0)}(\theta) + R^{(\lambda_0 - 1)(n+m)} \varepsilon_{R\theta}^{(1)}(\theta) + R^{(\lambda_0 - 1)(n+2m)} \varepsilon_{R\theta}^{(2)}(\theta) + \\ &\quad + R^{(\lambda_0 - 1)(n+3m)} \varepsilon_{R\theta}^{(3)}(\theta) + R^{(\lambda_0 - 1)(n+4m)} \varepsilon_{R\theta}^{(4)}(\theta) + \dots, \end{aligned}$$

где угловые распределения асимптотических разложений компонент тензора деформаций ползучести определяются следующими формулами:

угловые распределения главного члена асимптотического разложения компонент тензора скоростей деформаций

$$\varepsilon_{RR}^{(0)}(\theta) = \left(\sigma_e^{(0)} \right)^{n-1} [(1 - \lambda_0^2)f_0 + f_0''], \quad \varepsilon_{R\theta}^{(0)}(\theta) = -2 \left(\sigma_e^{(0)} \right)^{n-1} \lambda_0 f_0';$$

коэффициенты первого слагаемого в асимптотическом разложении компонент тензора скоростей деформаций

$$\begin{aligned} \varepsilon_{RR}^{(1)}(\theta) &= \left(\sigma_e^{(0)} \right)^{n-1} \left\{ [(1 - \lambda_1^2)f_1 + f_1''] + [(1 - \lambda_0^2)f_0 + f_0''] [(n-1)\sigma_e^{(1)} + n g_1] \right\}, \\ \varepsilon_{R\theta}^{(1)}(\theta) &= -2 \left(\sigma_e^{(0)} \right)^{n-1} \left\{ \lambda_1 f_1' + \lambda_0 f_0' [(n-1)\sigma_e^{(1)} + n g_1] \right\}; \end{aligned}$$

коэффициенты второго слагаемого асимптотического разложения компонент тензора скоростей деформаций

$$\begin{aligned}\varepsilon_{RR}^{(2)}(\theta) &= \left(\sigma_e^{(0)}\right)^{n-1} \left\{ [(1-\lambda_2^2)f_2 + f_2''] + [(1-\lambda_1^2)f_1 + f_1''] \left[(n-1)\sigma_e^{(1)} + ng_1 \right] + \right. \\ &+ \left. [(1-\lambda_0^2)f_0 + f_0''] \left\{ \frac{n-1}{2} [(n-2)(\sigma_e^{(1)})^2 + 2\sigma_e^{(2)}] + n(n-1)g_1\sigma_e^{(1)} + \frac{n}{2} [(n+1)g_1^2 + 2g_2] \right\} \right\}, \\ \varepsilon_{R\theta}^{(2)}(\theta) &= -2 \left(\sigma_e^{(0)}\right)^{n-1} \left\{ \lambda_2 f_2' + \lambda_1 f_1' \left[(n-1)\sigma_e^{(1)} + ng_1 \right] + \right. \\ &+ \left. \lambda_0 f_0' \left\{ \frac{n-1}{2} [(n-2)(\sigma_e^{(1)})^2 + 2\sigma_e^{(2)}] + n(n-1)g_1\sigma_e^{(1)} + \frac{n}{2} [(n+1)g_1^2 + 2g_2] \right\} \right\};\end{aligned}$$

коэффициенты третьего слагаемого асимптотического разложения компонент тензора скоростей деформаций

$$\begin{aligned}\varepsilon_{RR}^{(3)}(\theta) &= \left(\sigma_e^{(0)}\right)^{n-1} \left\{ [(1-\lambda_3^2)f_3 + f_3''] + [(1-\lambda_2^2)f_2 + f_2''] \left[(n-1)\sigma_e^{(1)} + ng_1 \right] + \right. \\ &+ \left. [(1-\lambda_1^2)f_1 + f_1''] \left\{ \frac{n-1}{2} [(n-2)(\sigma_e^{(1)})^2 + 2\sigma_e^{(2)}] + n(n-1)g_1\sigma_e^{(1)} + \frac{n}{2} [(n+1)g_1^2 + 2g_2] \right\} \right\} + \\ &+ \left. [(1-\lambda_0^2)f_0 + f_0''] \left\{ \frac{n-1}{3!} [(n-2)(n-3)(\sigma_e^{(1)})^3 + 6(n-2)\sigma_e^{(1)}\sigma_e^{(2)} + 6\sigma_e^{(3)}] + \right. \right. \\ &+ \left. \frac{n}{3!} [(n+1)(n+2)g_1^3 + 6(n+1)g_1g_2 + 6g_3] + \frac{n-1}{2} ng_1[(n-2)(\sigma_e^{(1)})^2 + 2\sigma_e^{(2)}] + \right. \\ &+ \left. \frac{n}{2} [(n+1)g_1^2 + 2g_2] \right\} \left. \right\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{R\theta}^{(3)}(\theta) &= -2 \left(\sigma_e^{(0)}\right)^{n-1} \left\{ \lambda_3 f_3' + \lambda_2 f_2' \left[(n-1)\sigma_e^{(1)} + ng_1 \right] + \right. \\ &+ \left. \lambda_1 f_1' \left\{ \frac{(n-1)}{2} [(n-2)(\sigma_e^{(1)})^2 + 2\sigma_e^{(2)}] + n(n-1)g_1\sigma_e^{(1)} + \frac{n}{2} [(n+1)g_1^2 + 2g_2] \right\} \right\} + \\ &+ \left. \lambda_0 f_0' \left\{ \frac{n}{3!} [(n+1)(n+2)g_1^3 + 6(n+1)g_1g_2 + 6g_3] + \frac{n-1}{2} ng_1[(n-2)(\sigma_e^{(1)})^2 + 2\sigma_e^{(2)}] + \right. \right. \\ &+ \left. \frac{n-1}{3!} [(n-2)(n-3)(\sigma_e^{(1)})^3 + 6(n-2)\sigma_e^{(1)}\sigma_e^{(2)} + 6\sigma_e^{(3)}] + \frac{n}{2} [(n+1)g_1^2 + 2g_2] \right\} \left. \right\};\end{aligned}$$

коэффициенты четвертого слагаемого асимптотического разложения компонент тензора скоростей деформаций

$$\varepsilon_{RR}^{(4)}(\theta) = \left(\sigma_e^{(0)}\right)^{n-1} \tilde{\varepsilon}_{RR}^{(4)}, \quad \varepsilon_{R\theta}^{(4)}(\theta) = -2 \left(\sigma_e^{(0)}\right)^{n-1} \tilde{\varepsilon}_{R\theta}^{(4)},$$

$$\begin{aligned}\tilde{\varepsilon}_{RR}^{(4)} &= (1-\lambda_4^2)f_4 + f_4'' + [(1-\lambda_3^2)f_3 + f_3''] \left[(n-1)\sigma_e^{(1)} + ng_1 \right] + \\ &+ [(1-\lambda_2^2)f_2 + f_2''] \left\{ \frac{n-1}{2} [(n-2)(\sigma_e^{(1)})^2 + 2\sigma_e^{(2)}] + n(n-1)g_1\sigma_e^{(1)} + \frac{n}{2} [(n+1)g_1^2 + 2g_2] \right\} + \\ &+ [(1-\lambda_1^2)f_1 + f_1''] \left\{ \frac{n-1}{3!} [(n-2)(n-3)(\sigma_e^{(1)})^3 + 6(n-2)\sigma_e^{(1)}\sigma_e^{(2)} + 6\sigma_e^{(3)}] + \right. \\ &+ \frac{n-1}{2} [(n-2)(\sigma_e^{(1)})^2 + 2\sigma_e^{(2)}] + \frac{n}{2} (n-1)\sigma_e^{(1)}[(n+1)g_1^2 + 2g_2] + \\ &+ \left. \frac{n}{3} [(n+1)(n+2)g_1^3 + 6(n+1)g_1g_2 + 6g_3] \right\} + \\ &+ [(1-\lambda_0^2)f_0 + f_0''] \left\{ \frac{n-1}{4!} [(n-2)(n-3)(n-4)(\sigma_e^{(1)})^4 + 12(n-2)(n-3)(\sigma_e^{(1)})^2\sigma_e^{(2)}] + \right. \\ &+ \frac{n-1}{4!} [24(n-2)(\sigma_e^{(2)})^2 + 24(n-2)\sigma_e^{(1)}\sigma_e^{(3)} + 24\sigma_e^{(4)}] + \\ &+ \left. \frac{n-1}{3!} ng_1 [(n-2)(n-3)(\sigma_e^{(1)})^3 + 6(n-2)\sigma_e^{(1)}\sigma_e^{(2)} + 6\sigma_e^{(3)}] + \right.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{n}{2} \frac{n-1}{2} [(n+1)g_1^2 + 2g_2][(n-2)(\sigma_e^{(1)})^2 + 2\sigma_e^{(2)}] + \\
 & + \frac{n}{3!} (n-1)\sigma_e^{(1)} [(n+1)(n+2)g_1^3 + 6(n+1)g_1g_2 + 6g_3] + \\
 & + \frac{n}{4!} [(n+1)(n+2)(n+3)g_1^4 + 12g_1^2g_2] + 24(n+1)[g_2^2 + g_1g_3] + 24g_4 \Big\}, \\
 \tilde{\varepsilon}_{R\theta}^{(4)} & = \lambda_4 f'_4 + \lambda_3 f'_3 \left[(n-1)\sigma_e^{(1)} + ng_1 \right] + \\
 & + \lambda_2 f'_2 \left\{ \frac{n-1}{2} [(n-2)(\sigma_e^{(1)})^2 + 2\sigma_e^{(2)}] + n(n-1)g_1\sigma_e^{(1)} + \frac{n}{2} [(n+1)g_1^2 + 2g_2] \right\} + \\
 & + \lambda_1 f'_1 \left\{ \frac{n-1}{3!} [(n-2)(n-3)(\sigma_e^{(1)})^3 + 6(n-2)\sigma_e^{(1)}\sigma_e^{(2)} + 6\sigma_e^{(3)}] + \right. \\
 & + \frac{n-1}{2} [(n-2)(\sigma_e^{(1)})^2 + 2\sigma_e^{(2)}] + \frac{n}{2} (n-1)\sigma_e^{(1)} [(n+1)g_1^2 + 2g_2] + \\
 & \left. + \frac{n}{3} [(n+1)(n+2)g_1^3 + 6(n+1)g_1g_2 + 6g_3] \right\} + \\
 & + \lambda_0 f'_0 \left\{ \frac{n-1}{4!} [(n-2)(n-3)(n-4)(\sigma_e^{(1)})^4 + 12(n-2)(n-3)(\sigma_e^{(1)})^2\sigma_e^{(2)}] + \right. \\
 & \left. + \frac{n-1}{4!} [24(n-2)(\sigma_e^{(2)})^2 + 24(n-2)\sigma_e^{(1)}\sigma_e^{(3)} + 24\sigma_e^{(4)}] + \right. \\
 & + \frac{n-1}{3!} ng_1 \left[(n-2)(n-3)(\sigma_e^{(1)})^3 + 6(n-2)\sigma_e^{(1)}\sigma_e^{(2)} + 6\sigma_e^{(3)} \right] + \\
 & + \frac{n}{2} \frac{n-1}{2} [(n+1)g_1^2 + 2g_2][(n-2)(\sigma_e^{(1)})^2 + 2\sigma_e^{(2)}] + \\
 & + \frac{n}{3!} (n-1)\sigma_e^{(1)} [(n+1)(n+2)g_1^3 + 6(n+1)g_1g_2 + 6g_3] + \\
 & \left. + \frac{n}{4!} [(n+1)(n+2)(n+3)g_1^4 + 12g_1^2g_2] + 24(n+1)[g_2^2 + g_1g_3] + 24g_4 \right\}. \tag{2.12}
 \end{aligned}$$

Из условия совместности деформаций можно получить систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения угловых распределений компонент тензора напряжений. Для нахождения функции $f_0(\theta)$ получается нелинейное ОДУ

$$2[(\lambda_0 - 1)n + 1] \frac{d\varepsilon_{R\theta}^{(0)}}{d\theta} = \frac{d^2\varepsilon_{RR}^{(0)}}{d\theta^2} - (\lambda_0 - 1)n[(\lambda_0 - 1)n + 2]\varepsilon_{RR}^{(0)}. \tag{2.13}$$

Относительно функций $f_k(\theta)$ ($k \geq 1$) из условия совместности (2.2) следует система линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
 & 2[(\lambda_0 - 1)(n + km) + 1] \frac{d\varepsilon_{R\theta}^{(k)}}{d\theta} = \frac{d^2\varepsilon_{RR}^{(k)}}{d\theta^2} - \\
 & - (\lambda_0 - 1)(n + km)[(\lambda_0 - 1)(n + km) + 2]\varepsilon_{RR}^{(k)}. \tag{2.14}
 \end{aligned}$$

Решение системы уравнений (2.13), (2.14) должно удовлетворять граничным условиям $f_k(\theta = \pm\pi) = 0$ и $f'_k(\theta = \pm\pi) = 0$. Численное решение системы уравнений (2.13), (2.14) на отрезке $[-\pi, \pi]$ разыскивалось с помощью описываемой ниже процедуры в пакете Mathematica V. 5.1.

В случае смешанного деформирования соображения симметрии и антисимметрии использованы быть не могут, и необходимо искать решение уравнения (2.13) на отрезке $[-\pi, \pi]$. В условиях смешанного нагружения при численном решении уравнения (2.13) отрезок интегрирования $[-\pi, \pi]$ можно разбить на два отрезка: $[-\pi, 0]$ и $[0, \pi]$. Сначала уравнение (2.13) интегрируется на отрезке $[0, \pi]$, и двухточечная краевая задача сводится к задаче Коши с начальными условиями

$$\begin{aligned} f_0(\theta = 0) = 1, \quad f'_0(\theta = 0) = -(\lambda + 1)/\operatorname{tg}(M^p\pi/2), \\ f''_0(\theta = 0) = A_2, \quad f'''_0(\theta = 0) = A_3. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Значение производной первого порядка находится из заданного вида смешанного нагружения (значение параметра смешанности нагружения (1.1), задающего вид нагружения, известно). Неизвестные постоянные A_2 и A_3 определяются таким образом, чтобы выполнялись краевые условия на верхнем берегу трещины:

$$f_0(\theta = \pi) = 0, \quad f'_0(\theta = \pi) = 0. \quad (2.16)$$

После того как подобраны постоянные A_2 и A_3 , уравнение (2.13) интегрируется на отрезке $[-\pi, 0]$, для чего двухточечная краевая задача для уравнения (2.13) с граничными условиями

$$\begin{aligned} f_0(\theta = -\pi) = 0, \quad f'_0(\theta = -\pi) = 0, \\ f_0(\theta = 0) = 1, \quad f'_0(\theta = 0) = -(\lambda + 1)/\operatorname{tg}(M^p\pi/2) \end{aligned} \quad (2.17)$$

заменяется задачей Коши с начальными условиями

$$f_0(\theta = -\pi) = 0, \quad f'_0(\theta = -\pi) = 0, \quad f''_0(-\pi) = B_2, \quad f'''_0(\theta = -\pi) = B_3. \quad (2.18)$$

Неизвестные постоянные B_2 и B_3 подбираются таким образом, чтобы выполнялись условия равновесия элемента, расположенного на луче $\theta = 0$. Уравнения равновесия данного элемента требуют непрерывности компонент тензора напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ и $\sigma_{r\theta}$ на луче $\theta = 0$, что влечет за собой непрерывность функций $f_0(\theta)$ и $f'_0(\theta)$ при $\theta = 0$ (и, следовательно, краевые условия (2.16)). Поэтому две неизвестные постоянные B_2 и B_3 определяются таким образом, чтобы решение, разыскиваемое на отрезке $[-\pi, 0]$, удовлетворяло бы краевым условиям при $\theta = 0$.

2.3. Конфигурация области диспергированного (дефрагментированного) материала

После нахождения численного решения системы уравнений (2.13) и (2.14) можно определить границу области диспергированного материала в окрестности вершины трещины с помощью уравнений

$$\begin{aligned} \psi(R, \theta) = 1 - R^\gamma g_0(\theta) &= 0 \\ \psi(R, \theta) = 1 - R^\gamma g_0(\theta) - R^{\gamma_1} g_1(\theta) &= 0, \\ \psi(R, \theta) = 1 - R^\gamma g_0(\theta) - R^{\gamma_1} g_1(\theta) - R^{\gamma_2} g_2(\theta) &= 0, \\ \psi(R, \theta) = 1 - R^\gamma g_0(\theta) - R^{\gamma_1} g_1(\theta) - R^{\gamma_2} g_2(\theta) - R^{\gamma_3} g_3(\theta) &= 0, \\ \psi(R, \theta) = 1 - R^\gamma g_0(\theta) - R^{\gamma_1} g_1(\theta) - R^{\gamma_2} g_2(\theta) - R^{\gamma_3} g_3(\theta) - R^{\gamma_4} g_4(\theta) &= 0, \\ \dots\dots\dots \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} g_0(\theta) &= \left(\sigma_e^{(0)}\right)^m, \quad g_1(\theta) = \frac{m}{2} \left(\sigma_e^{(0)}\right)^m \left(\sigma_e^{(1)} + g_0\right), \\ g_2(\theta) &= \frac{m}{3} \left(\sigma_e^{(0)}\right)^m \left[\sigma_e^{(2)} + \frac{m-1}{2} (\sigma_e^{(1)})^2 + \frac{m+1}{2} (g_0)^2 + g_1\right]. \end{aligned}$$

Остальные коэффициенты асимптотического разложения параметра сплошности находятся подобным образом. Решение уравнения (2.13) вместе с условиями отсутствия поверхностных усилий приводит к ранее рассмотренной нелинейной задаче на собственные значения. Оказалось, что если в качестве условия в бесконечно удаленной точке принять условие асимптотического сближения с решением ХРР ($\lambda = n/(n + 1)$) и предположить, что вне области активного накопления повреждений решение выходит на асимптотику ХРР, то границы области диспергированного материала, построенные с помощью двучленного и трехчленного асимптотических разложений параметра сплошности, значительно отличаются друг от друга по своей форме и размерам, что свидетельствует о том, что разложения (2.10) не имеют асимптотической природы, ибо каждое следующее слагаемое в асимптотическом разложении должно быть малой поправкой к предыдущему. Однако, если предположить, что в окрестности вершины трещины в условиях смешанного деформирования имеется область с промежуточной асимптотикой поля напряжений (где собственные значения отличаются от значений задачи ХРР и определяются значениями, приведенными в [16]), то асимптотические разложения (2.10) приводят к границам области диспергированного материала, сходящимся к предельному контуру. Вычисленные собственные значения для всего диапазона значений параметра смешанности нагружения M^p для $n = 5$ приведены в табл. 1. Следует отметить, что альтернативный подход решения нелинейных задач на собственные значения, базирующийся на методе малого параметра, изложен в [16; 26].

Таблица 1

Собственные значения нелинейной задачи на собственные значения для различных значений параметра смешанности нагружения ($n = 5$)

M^p	λ	$f''(0)$	$f'''(0)$	$f''(-\pi)$	$f'''(-\pi)$
$M^p = 0,05$	-0,237872	3,080269	7,474145	17,168290	-16,59101
$M^p = 0,1$	-0,221158	2,007918	3,081809	9,286569	-8,84890
$M^p = 0,2$	-0,202342	1,142387	0,988910	5,316140	-4,98511
$M^p = 0,3$	-0,194812	0,753230	0,302029	3,972174	-3,70051
$M^p = 0,4$	-0,192320	0,546480	-0,068735	3,263461	-3,03392
$M^p = 0,5$	-0,194290	0,472467	-0,364145	2,830609	-2,63612
$M^p = 0,6$	-0,200055	0,463181	-0,626727	2,539084	-2,37534
$M^p = 0,7$	-0,204759	0,430847	-0,818362	2,269456	-2,13255
$M^p = 0,8$	-0,210625	0,405497	-0,988799	2,029076	-1,91625
$M^p = 0,9$	-0,218248	0,394459	-1,159518	1,811569	-1,72195
$M^p = 0,95$	-0,221500	0,394789	-1,248002	1,707946	-1,62792

Поэтому асимптотическое решение (2.10) можно рассматривать как автомодельное предельное решение задачи о трещине в среде с поврежденностью в условиях смешанного нагружения для всех форм смешанного деформирования от чистого сдвига до нормального отрыва. Конфигурации областей полностью поврежденного материала для новой асимптотики показаны на рис. 2–4, где буквой k обозначена граница области диспергированного материала, построенная с помощью $k + 1$ -членного асимптотического разложения параметра сплошности. На рис. 5–8 изображены линии уровня параметра сплошности.

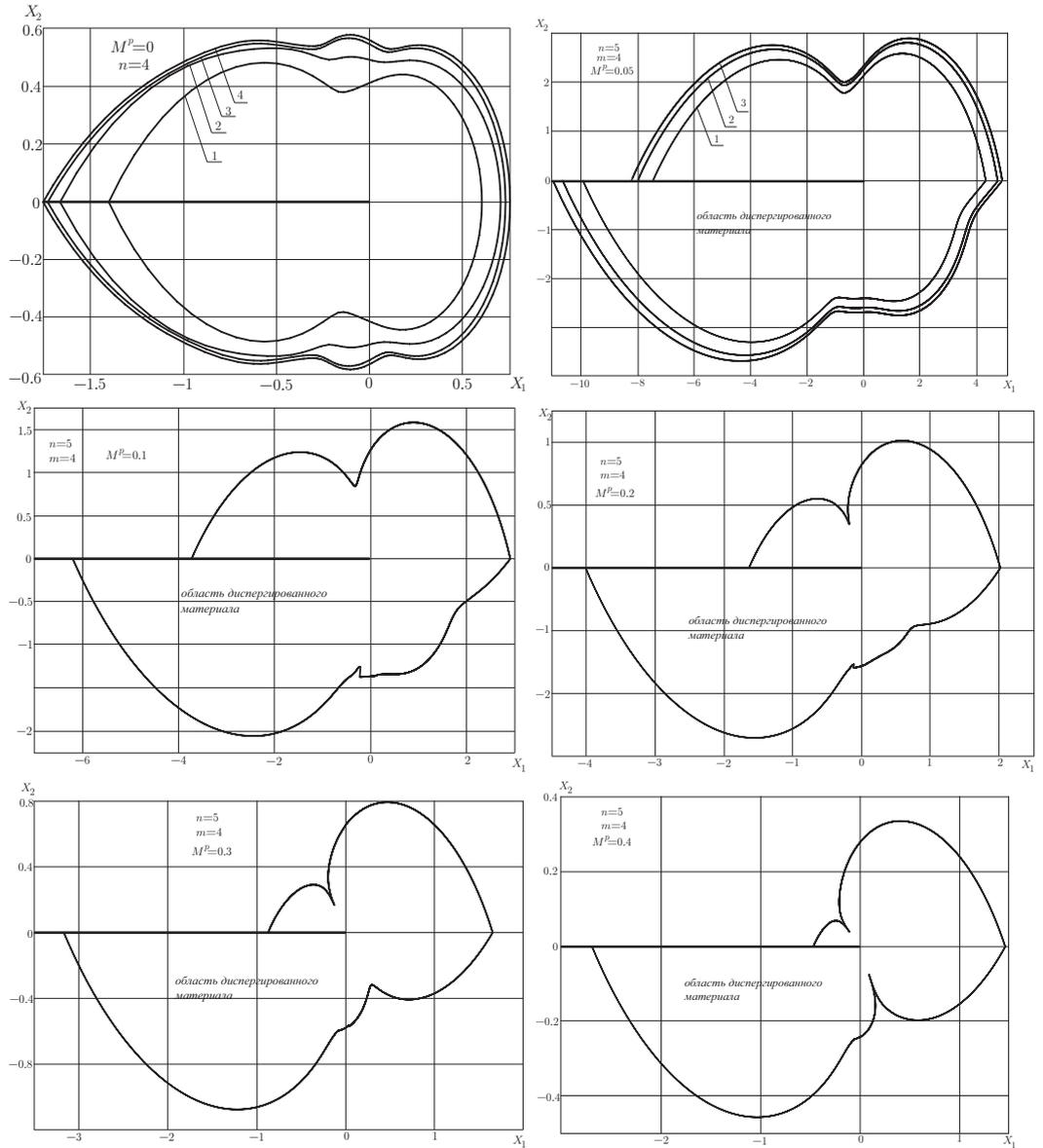


Рис. 2. Геометрия области полностью поврежденного материала для $M^P = 0; 0,05; 0,1; 0,2; 0,3$ и $M^P = 0,4$

2.4. Амплитудный масштабный множитель \tilde{C}

После возвращения к исходным переменным поле напряжений вне области полностью поврежденного материала определяется с помощью равенства

$$\sigma_{ij}(r, \theta, t) = (At^m)^{-1/m} \tilde{C} \left[R^{\lambda_0-1} \tilde{\sigma}_{ij}^{(0)}(\theta) + R^{\lambda_1-1} \tilde{\sigma}_{ij}^{(1)}(\theta) + R^{\lambda_2-1} \tilde{\sigma}_{ij}^{(2)}(\theta) + \dots \right], \quad (2.19)$$

где $R = r(At\tilde{C}^m)^{1/((\lambda-1)m)}$. Отличительной особенностью полученного представления является зависимость поля напряжений только от одного амплитудного

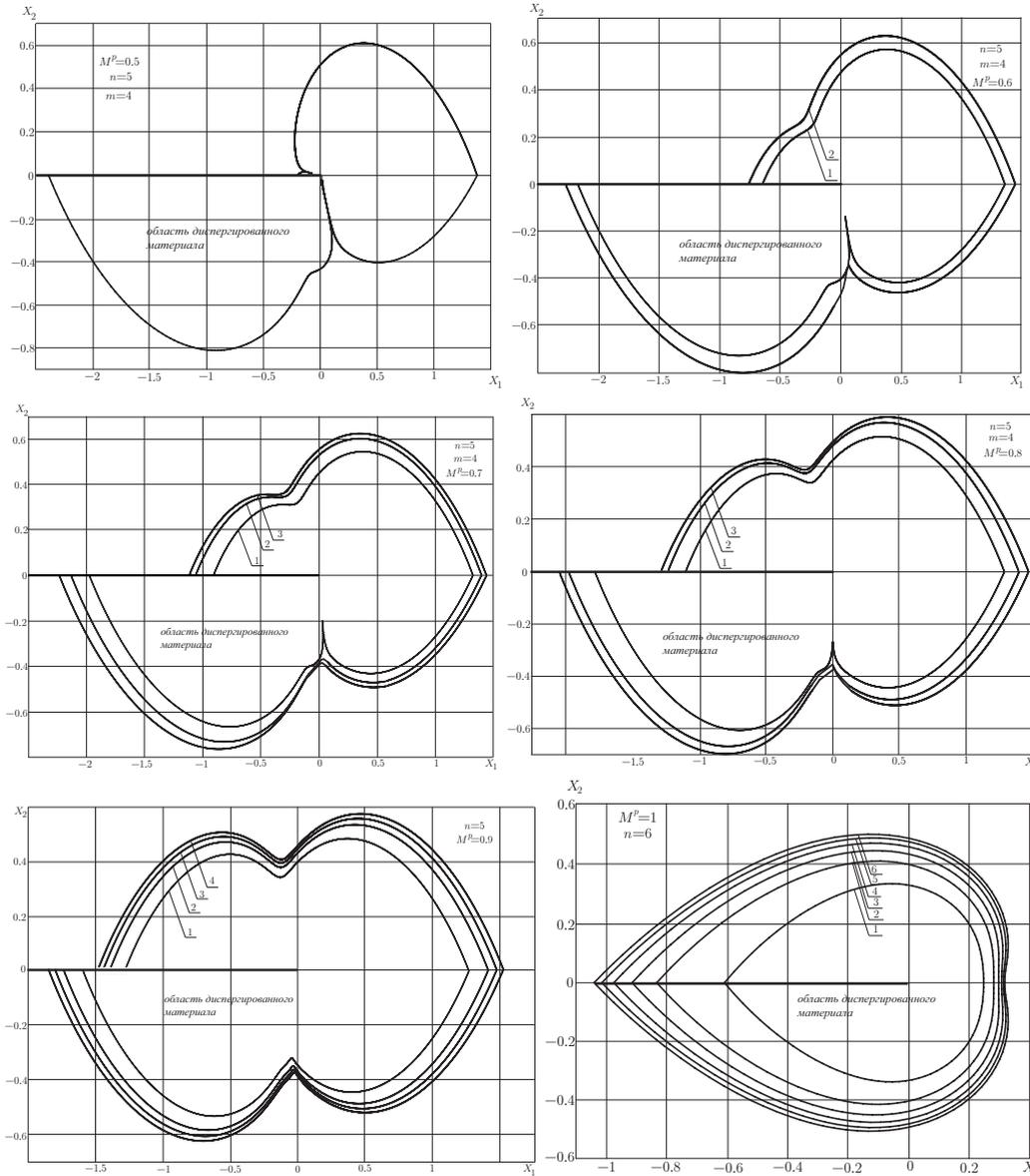


Рис. 3. Геометрия области полностью поврежденного материала для $M^p = 0, 5; 0, 6; 0, 7; 0, 8; 0, 9$ и $M^p = 1$

множителя \tilde{C} , отражающего влияние поля напряжений в окрестности вершины трещины от геометрии образца и системы приложенных нагрузок. Поэтому для нахождения поля напряжений вблизи кончика трещины достаточно определить всего один масштабный множитель (амплитудный коэффициент) \tilde{C} . В традиционной механике трещин используется подход, приводящий к задаче нахождения трех или более коэффициентов асимптотических разложений поля напряжений. В последнее время в нелинейной механике разрушения, одной из задач которой является определение напряженно-деформированного состояния в непосредственной

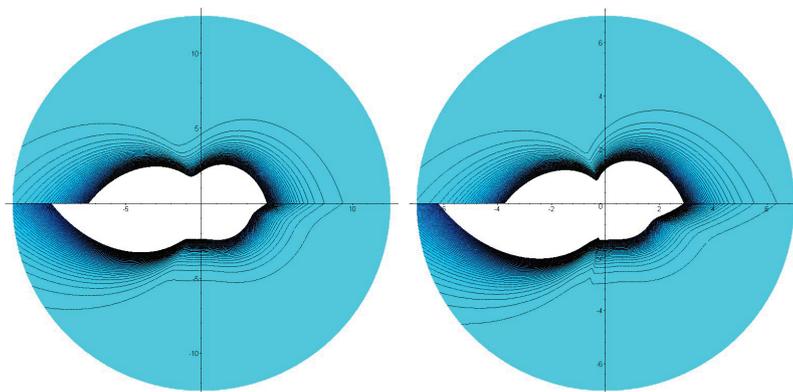


Рис. 4. Геометрия области полностью поврежденного материала и линии уровня параметра сплошности для $n = 5, m = 4, M^p = 0,05; 0,1$

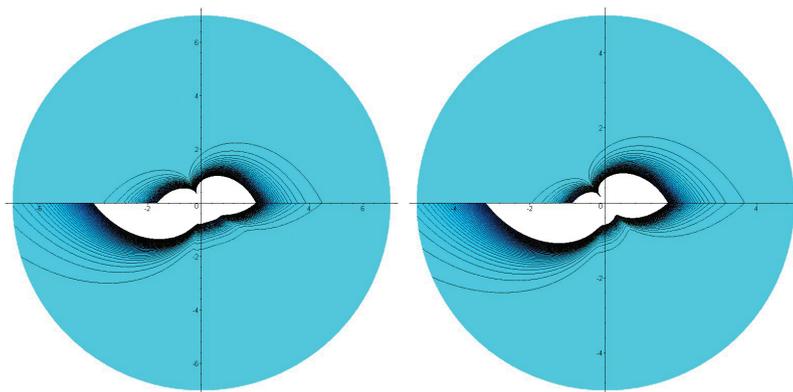


Рис. 5. Геометрия области полностью поврежденного материала и линии уровня параметра сплошности для $n = 5, m = 4, M^p = 0,2; 0,3$

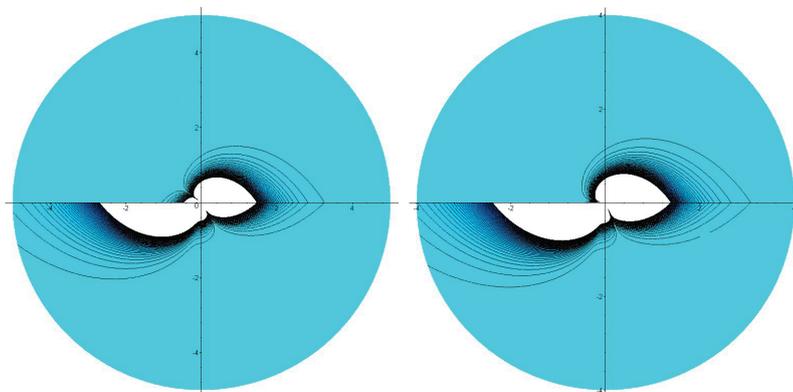


Рис. 6. Геометрия области полностью поврежденного материала и линии уровня параметра сплошности для $n = 5, m = 4, M^p = 0,4; 0,5$

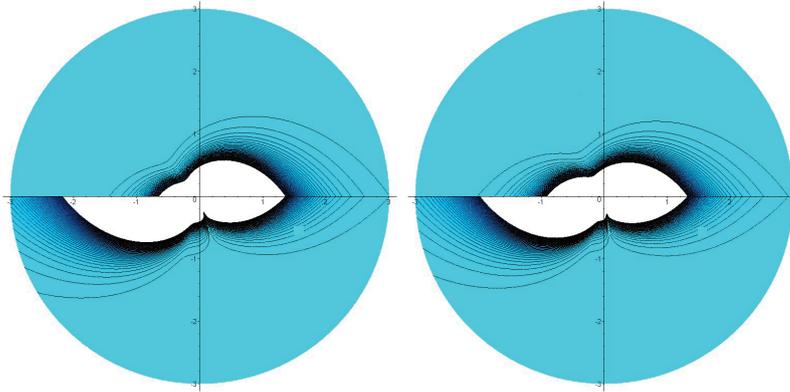


Рис. 7. Геометрия области полностью поврежденного материала и линии уровня параметра сплошности для $n = 5, m = 4, M^P = 0, 6; 0, 7$

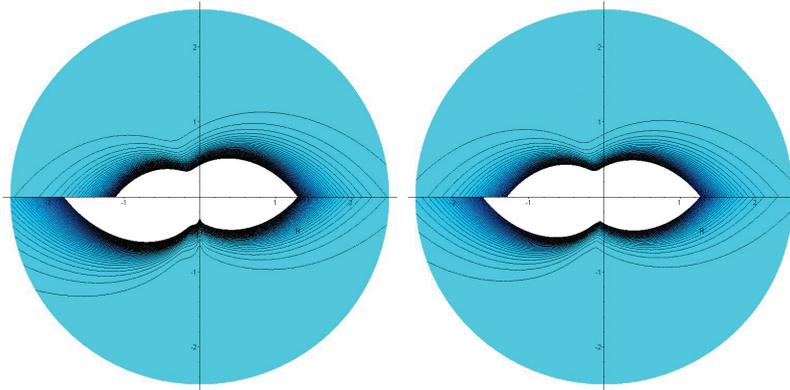


Рис. 8. Геометрия области полностью поврежденного материала и линии уровня параметра сплошности для $n = 5, m = 4, M^P = 0, 8; 0, 9$

окрестности вершины трещины, большое внимание уделяется построению высших приближений в асимптотических разложениях механических величин (полей напряжений, деформаций и перемещений) в окрестности вершины трещины в нелинейных материалах.

Для материалов, следующих степенному закону установившейся ползучести $\dot{\epsilon}_{ij} = 3B\sigma_e^{n-1}s_{ij}/2$, асимптотические разложения компонент тензора напряжений могут быть представлены в форме

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = (C^*/(BI_n r))^{1/(n+1)} \sigma_{ij}^{(1)}(\theta) + A_2 r^{s_2-1} \sigma_{ij}^{(2)}(\theta) + 1A_3 r^{s_3-1} \sigma_{ij}^{(3)}(\theta) + \dots \quad (2.20)$$

Первое слагаемое в (2.20) в литературе носит название решения ХРР. В (2.20) фигурирует C^* -интеграл, определяемый равенством

$$C^* = \int_{\Gamma} (\dot{W} dx_2 - \sigma_{ij} n_j u_{i,1} ds), \quad (2.21)$$

где $\dot{W} = \int_0^{\dot{\epsilon}_{kl}} \sigma_{ij} d\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{n}{n+1} \sigma_e \dot{\epsilon}_e$. Асимптотический анализ асимптотического выражения интенсивности напряжений позволяет установить, что показатели степеней

в (2.20) связаны между собой $s_3 - s_1 = 2(s_2 - s_1)$. Детальный асимптотический анализ трехчленного асимптотического разложения компонент тензора напряжений (2.20) и интенсивности касательных напряжений показывает, что константы A_2 и A_3 не являются независимыми, они связаны равенством $A_3/A_1 = (A_2/A_1)^2$. В литературе имеется достаточно большое число оценок инвариантного C^* -интеграла, полученных для различных образцов, наиболее часто используемых в эксперименте. Однако остаются открытыми многие вопросы, связанные с определением второго коэффициента в асимптотических разложениях, а именно A_2 . Естественно предположить, что A_2 в общем случае является функцией приложенных нагрузок, геометрических характеристик образца и показателя нелинейности материала n . Определение этого коэффициента и составляет одну из важных задач нелинейной механики разрушения, поскольку даже известные оценки, приведенные в справочной литературе, дают существенную погрешность. Например, для образца с односторонним боковым надрезом для инвариантного C^* -интеграла имеется оценка $C^* = B\sigma_0\epsilon_0 W(1-a)ah_1(P/P_0)$, где $P_0 = 1,4555\eta W(1-a)\sigma_0$, h_1 – безразмерная функция приложенной нагрузки и геометрии образца. Оказывается, что уточненные вычисления, проведенные в последнее время, показали, что значения функции h_1 могут отличаться от приведенных в справочниках более чем на сто процентов. Следовательно, с появлением вычислительных комплексов, таких как Abaqus, предоставляется возможность получения более точных оценок для параметров механики разрушения, что и составляет одну из задач современной механики деформируемого твердого тела. Амплитудные коэффициенты, входящие в структуру полей напряженно-деформированного состояния в области вершины трещины, как известно, являются характеристиками сопротивления материала разрушению. Эти коэффициенты могут описывать текущее состояние или принимать предельные значения в зависимости от уровня накопленных повреждений в исследуемом объекте. Для нахождения оставшейся постоянной A_2 применяются различные подходы, включающие конечно-элементный расчет для образцов различной конфигурации, находящихся в условиях разных систем усилий. Тем не менее в общем случае исследование данной проблемы не является математически завершенным и требует объединения полученных разными исследователями результатов в единый справочник, подобный существующим справочникам, содержащим оценки коэффициентов интенсивности напряжений и J -интегралу.

Альтернативой описанному выше подходу является учет процессов накопления повреждений в окрестности вершины трещины, что приводит к асимптотическому представлению механических полей вблизи кончика трещины (2.19), содержащему лишь один амплитудный множитель, что значительно упрощает решение задачи. Один амплитудный фактор \tilde{C} может быть определен с помощью инкорпорирования скалярного параметра сплошности (поврежденности) в расчетные комплексы, осуществляющие конечно-элементный анализ.

Результаты и выводы

В работе получено новое промежуточно-асимптотическое решение задачи о стационарной трещине в среде с поврежденностью в образце, находящемся в условиях смешанного деформирования (во всем диапазоне смешанных форм деформирования от чистого сдвига до нормального отрыва). В ходе численного анализа найдена новая асимптотика дальнего поля напряжений. Асимптотику поля напряжений можно интерпретировать как промежуточную асимптотику поля напряжений

и параметра сплошности, справедливую на расстояниях, много больших характерного линейного размера области поврежденного материала, но все еще много меньших по сравнению с длиной трещины, с характерным линейным размером тела. С использованием новой асимптотики дальнего поля напряжений у вершины трещины в условиях смешанного нагружения построены конфигурации областей диспергированного материала. Выведены пятичленные асимптотические разложения компонент тензора напряжений и шестичленные асимптотические разложения скалярного параметра сплошности и показано, что шестичленные асимптотические разложения параметра сплошности приводят к контурам области полностью поврежденного материала, сходящимся к некоторому предельному контуру.

Литература

- [1] Пестриков В.М., Морозов Е.М. Механика разрушения. СПб.: Профессия, 2012.
- [2] Си Дж. Мезомеханика, понятие сегментации и мультискейлинговый подход: нано-микро-макро // Физическая мезомеханика. 2008. Т. 11. № 3. С. 5–18.
- [3] Бьюи Х.Д. Механика разрушения: Обратные задачи и решения. М.: Физматлит, 2011. 412 с.
- [4] Баренблатт Г.И. Автомодельные явления – анализ размерностей и скейлинг. Долгопрудный: Интеллект, 2009.
- [5] Stepanova L. Eigenspectra and orders of stress singularity at a mode I crack tip for a power-law medium // Comptes Rendus Mechanique. 2008. V. 336. № 1–2. P. 232–237.
- [6] Степанова Л.В. О собственных значениях в задаче о трещине антиплоского сдвига в материале со степенными определяющими уравнениями // Прикладная механика и техническая физика. 2008. Т. 49. № 1. С. 173–180.
- [7] Степанова Л.В., Федина М.Е. Автомодельное решение задачи о трещине антиплоского сдвига в связанной постановке (ползучесть-поврежденность) // Прикладная механика и техническая физика. 2002. Т. 43. № 5. С. 114–123.
- [8] Hello G., Tahar M.B., Roelandt J.M. Analytical determination of coefficients in crack-tip stress expansions for a finite crack in an infinite plane medium // Int. J. of Solids and Structures. 2012. V. 49. P. 556–566.
- [9] Шлянников В.Н., Кислова С.Ю. Параметры смешанных форм деформирования для трещины в виде математического разреза // Известия Саратовского университета. Сер.: Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9. Вып. 1. С. 77–84.
- [10] Шлянников В.Н., Туманов А.В. Упругие параметры смешанных форм деформирования полуэллиптической трещины при двухосном нагружении // Известия Саратовского университета. Сер.: Математика. Механика. Информатика. 2010. Т. 10. Вып. 2. С. 73–80.
- [11] Shlyannikov V.N. Elastic-Plastic Mixed-Mode Fracture Criteria and Parameters / V.N. Shlyannikov. Berlin: Springer, 2003.
- [12] Pan J., Lin P.C. Analytical solutions for crack-tip sectors in perfectly plastic Mises materials under mixed in-plane and out-of-plane shear loading conditions // Engng. Fracture Mechanics. 2006. V. 73. P. 1797–1813.
- [13] Rahman M., Hancock J.W. Elastic perfectly-plastic asymptotic mixed mode crack tip fields in plane stress // Int. J. Solids and Structures. 2006. V. 43. P. 3692–3704.

- [14] Степанова Л.В., Федина М.Е. О геометрии области полностью поврежденного материала у вершины трещины антиплоского сдвига в связанной постановке задаче (связка "ползучесть-поврежденность") // Вестник Самарского государственного университета. 2001. № 2. С. 87–113.
- [15] Степанова Л.В., Федина М.Е. Автомодельное решение задачи о трещине отрыва в связанной постановке // Прикладная математика и механика. 2008. Т. 72. № 3. С. 516–527.
- [16] Адьлина Е.М., Степанова Л.В. О построении многомасштабных моделей неупругого разрушения // Вестник Самарского государственного университета. 2012. № 9. С. 70–83.
- [17] Степанова Л.В. Уточненный расчет напряженно-деформированного состояния у вершины трещины в условиях циклического нагружения в среде с поврежденностью // Вестник Самарского государственного университета. 2011. № 83. С. 105–115.
- [18] Степанова Л.В. Анализ собственных значений в задаче о трещине в материале со степенным определяющим законом // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2009. Т. 49. № 8. С. 1399–1415.
- [19] Астафьев В.И., Шестериков С.А., Степанова Л.В. Асимптотика напряженно-деформированного состояния в окрестности вершины трещины в условиях ползучести // Вестник Самарского государственного университета. 1995. Спец. выпуск. С. 59–64.
- [20] Shih C.F. Elastic-plastic analysis of combined mode crack problems // Ph. D. Thesis, Harvard University, Cambridge, M.A. 1973.
- [21] Си Дж. Труды Американского общества инженеров-механиков // Конструирование и технология машиностроения. 1976. № 4. С. 113–120.
- [22] Shih C.F. Small scale yielding analysis of mixed mode plane-strain crack problems // Fracture Analysis ASTM STP 560. 1974. P. 187–210.
- [23] Hutchinson J.W. Singular behaviour at the end of tensile crack in a hardening material // J. Mech. Phys. Solids. 1968. V. 16. № 1. P. 13–31.
- [24] Rice J.R., Rosengren G.F. Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material // J. Mech. Phys. Solids. 1968. V. 16. № 1. P. 1–12.
- [25] Hutchinson J.W. Plastic stress and strain fields at a crack tip // J. Mech. Phys. Solids. 1968. V. 16. № 5. P. 337–347.
- [26] Адьлина Е.М., Игонин С.А., Степанова Л.В. О нелинейной задаче на собственные значения, следующей из анализа напряжений у вершины усталостной трещины // Вестник Самарского государственного университета. 2012. № 3/1(94). С. 83–102.

Поступила в редакцию 31/V/2013;
в окончательном варианте — 31/V/2013.

SELF-SIMILAR SOLUTION TO THE PROBLEM OF MIXED DEFORMATION OF PLATE WITH A CRACK TIP IN A DAMAGED MEDIUM

© 2013 L.V. Stepanova, E.M. Adylina³

In the article asymptotic solution of the problem of defining of stressed state of strain and field of continuousness in the neighbourhood of crack tip in the sample which is in state of mixed deformation is received. On the basis of self-similar presentation of solution and hypothesis about the formation of area fully defragmentated material near the crack tip, the distribution of strains, speed of deformation and continuousness of a stationary crack in a damaged medium at full range of mixed forms deformation (from simple share to normal fracture) is obtained. Highest approximations in asymptotic resolution of fields of strain, speed of deformation of creep and continuous are obtained.

Key words: stressed state of strain near the crack tip, sedate determining law, mixed deformation, method of eigenfunction expansion, nonlinear problem on eigenvalues, nonlinear problem on eigen functions, damage, parameter of damage.

Paper received 31/V/2013.

Paper accepted 31/V/2013.

³Stepanova Larisa Valentinovna (stepanova1v@samsu.ru), Adylina Ekaterina Mikhailovna (adylinaem@samsu.ru), the Dept. of Mathematical Modelling in Mechanics, Samara State University, Samara, 443011, Russian Federation.