МЕХАНИКА

УДК 531.1, 531.3, 681.5

УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИКОЙ С УЧЕТОМ СТАБИЛИЗАЦИИ СВЯЗЕЙ[1]

© 2013 Н.В. Абрамов,[2] Р.Г. Мухарлямов[3]

Приводятся результаты исследований по моделированию динамики сложных систем, содержащих элементы различной физической природы, решению задач динамики и управления твердым телом и робототехническими системами. Определяются необходимые условия устойчивости решений уравнений динамики, и предлагается алгоритм построения уравнений возмущений связей, гарантирующий стабилизацию связей при численном решении. При этом уравнения связей описывают интегральное многообразие уравнений динамики исходной системы.

Ключевые слова: механика, программные связи, реакция, устойчивость, численное решение, стабилизация, динамика, уравнение, построение, система.

Введение

Аналогии между движением механических систем и динамикой систем, содержащей электрические, пневматические и гидравлические элементы [1], позволяют применять методы классической механики для исследования динамических процессов. В [2] для проведения динамических расчетов систем, содержащих элементы различной физической природы, вводятся унифицированные переменные, посредством которых используются методы и модели классической механики. В [3–5] исследуется динамика живых организмов, моделируемая уравнениями механики, и предлагаются методы и алгоритмы решения задач управления. Так, например, движение сустава рассматривается как стержень с шарнирным закреплением и описывается уравнением вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси:

$$\frac{d}{dt}\left(J\omega\right) + m\left(\varphi, \omega, t\right) = M, \quad \omega = \frac{d\varphi}{dt}.$$

В [6] показано, что уравнениями механики

$$\frac{d}{dt}\left(L\frac{dI}{dt}\right) + \left(\tau - \frac{dL}{dt}\right)\frac{dI}{dt} + \frac{I}{G} = M.$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 13-08-00535.

[2]Абрамов Николай Васильевич (abramoff@mail.ru), кафедра естественнонаучных дисциплин филиала Тюменского государственного нефтегазового университета, 628600, Российская Федерация, г. Нижневартовск, ул. Ленина, 5.

[3]Мухарлямов Роберт Гарабшевич (robgar@mail.ru), кафедра теоретической механики Российского университета дружбы народов, 117198, Российская Федерация, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6.

может быть описан процесс познания, если под величинами L, G, τ, и I понимать параметры, характеризующие интеллектуальные свойства субъекта познания, и объем информации.

В [7–9] предлагается вопросы представления процессов в экономике рассматривать посредством динамических моделей, соответствующих механике систем с переменной массой [10]. Работы по динамике систем с переменной массой были развиты до создания нового направления, связанного с управлением программным движением и обратными задачами динамики [11]. Методы аналитической динамики систем с переменной массой [12] позволяют исследовать задачи моделирования и управления динамикой производственных систем [13; 14].

В настоящей работе предлагается метод построения математической модели динамической системы, используемой для решения задачи управления сложными системами с учетом стабилизации связей.

1. Построение динамической модели системы, содержащей элементы различной физической природы

1.1. Унифицированный набор переменных

Унифицированный метод моделирования физических систем основывается на фундаментальных процессах, лежащих в основе динамического поведения системы: хранении, передачи и преобразовании энергии между компонентами системы, а также между системой и внешней средой. Система, содержащая элементы различной физической природы, может быть рассмотрена как некоторая управляемая система, предназначенная для систематического описания, хранения, передачи и преобразования мощности и энергии в физических системах.

В [2] упоминаются идеи Пайнтера [15], предложившего для описания динамических процессов унифицированное множество переменных: усилие, поток, момент и смещение. Первая пара переменных в унифицированном наборе — это усилие $e(t)$ и поток $f(t)$, представляющие физические величины, удовлетворяющие постулату: мощность $P_j(t)$ j-того компонента в системе является произведением усилия $e_j(t)$ и потока $f_j(t)$, и суммарная мощность $P(t)$ системы в момент времени t складывается из мощностей компонентов:

$$P(t) = \sum_j P_j(t) = \sum_j e_j(t) f_j(t). \tag{1.1}$$

Вторая пара переменных в унифицированном наборе представляет момент $p(t)$ и смещение $q(t)$, известные так же, как и энергетические переменные, потому что кинетическая энергия находится в функциональной зависимости от момента, а потенциальная энергия в функциональной зависимости от смещения.

$$p(t) = \int e(t) dt, \tag{1.2}$$

$$q(t) = \int f(t) dt. \tag{1.3}$$

В таблице отражены междисциплинарные связи в унифицированном наборе переменных.

Таблица

Междисциплинрные связи

Усилие e	Поток f	Смещение q	Момент p
Сила F	Скорость v	Положение x	Импульс p
Крутящий момент τ	Угловая скорость ω	Угол φ	Момент импульса H
Напряжение e	Ток i	Заряд q	Поток λ
Давление P	Объемная скорость Q	Объем V	Импульс давления Pp
Температура T	Скорость энтропии $\dot{S}$	Энтропия S	(Отсутствует)
Мгновенная фондоемкость m	Мощность предприятия v	Объем продукции x	Изменение фондов w

1.2. Построение динамической модели

Рассмотрим управляемую систему, содержащую элементы различной физической природы. Пусть фазовое состояние системы определяется обобщенными координатами q^i и обобщенными скоростями $v^j = \frac{dq^j}{dt}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. На систему наложены связи, заданные уравнениями:

$$f^{\mu-n}\left(q^i, t\right) = 0, \quad f^{\rho-n}\left(q^i, v^j, t\right) = 0, \tag{1.4}$$

$$\mu = n+1, \ldots, n+m, \quad \rho = n+m+1, \ldots, n+m+r.$$

Левые части равенств (1.4) являются непрерывными дифференцируемыми функциями по всем переменным. Если известны лагранжиан системы $L^0 = L^0\left(q^i, v^j, t\right)$, диссипативная функция $D^0 = D^0\left(q^i, v^j, t\right)$ и непотенциальные обобщенные силы $Q_k = Q_k\left(q^i, v^j, t\right)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, действующие на нее, то при идеальных связях динамика системы описывается уравнениями Лагранжа

$$\frac{dq^i}{dt} = v^i, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L^0}{\partial v^i}\right) - \frac{\partial L^0}{\partial q^i} = Q_i - \frac{\partial D^0}{\partial v^i} + \lambda_\kappa \varphi_i^\kappa, \tag{1.5}$$

$$\kappa = 1, 2, \ldots, m+r,$$

содержащими неопределенные множители λ_κ. В равенствах (1.5), как и всюду в дальнейшем, предполагается суммирование по одинаковым индексам и использованы обозначения

$$\varphi_i^{\mu-n} = \frac{\partial f^{\mu-n}}{\partial q^i}, \quad \varphi_i^{\rho-n} = \frac{\partial f^{\rho-n}}{\partial v^i}.$$

1.3. Управление динамикой расширенной системы

С целью стабилизации связей для исследования поведения решений системы (1.5) по отношению к уравнениям (1.4) введем параметры q^μ, v^μ, v^ρ, оценивающие отклонения от уравнений связей, изменение которых определяется дополнительными управляющими силами. Рассматривая параметры q^μ, v^μ, v^ρ как дополнительные "избыточные" координаты, заменим исходную систему расширенной системой, фазовое состояние которой определяется обобщенными координатами q^i, q^μ и обобщенными скоростями v^i, v^μ, v^ρ, удовлетворяющими уравнениям связей

$$q^\mu - f^{\mu-n}\left(q^i, t\right) = 0, \tag{1.6}$$

$$v^\mu - \varphi_i^{\mu-n} v^i - f_t^{\mu-n} = 0, \quad v^\rho - f^{\rho-n}\left(q^i, v^j, t\right) = 0. \tag{1.7}$$

Лагранжиан L и диссипативная функция D расширенной системы определяются как функции обобщенных координат q^α, $\alpha = 1, ..., n+m$, обобщенных скоростей v^γ, $\gamma = 1, ..., n+m+r$, и времени t: $L = L\left(q^\alpha, v^\gamma, t\right)$, $D = D\left(q^\alpha, v^\gamma, t\right)$ и выбираются так, чтобы при $q^\mu = 0$, $v^\mu = 0$, $v^\rho = 0$ выполнялись равенства $L\left(q^\alpha, v^\gamma, t\right) = L^0\left(q^i, v^j, t\right)$, $D\left(q^\alpha, v^\gamma, t\right) = D^0\left(q^i, v^j, t\right)$. Начальные условия удовлетворяют сооношениям

$$q^\mu\left(t_0\right) = q_0^\mu, \quad v^\mu\left(t_0\right) = v_0^\mu, \quad v^\rho\left(t_0\right) = v_0^\rho, \tag{1.8}$$

$$q_0^\mu = f^{\mu-n}\left(q_0^i, t_0\right),$$

$$v_0^\mu = \varphi_j^{\mu-n}\left(q_0^i, t_0\right) v_0^j + f_t^{\mu-n}\left(q_0^i, t_0\right), \; v_0^\rho = f^{\rho-n}\left(q_0^i, v_0^j, t_0\right).$$

Динамика расширенной системы описывается уравнениями

$$\frac{dq^i}{dt} = v^i, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = Q_i - \frac{\partial D}{\partial v^i} + \lambda_\kappa \varphi_i^\kappa, \tag{1.9}$$

$$\frac{dq^\mu}{dt} = v^\mu, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v^\mu}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^\mu} = -\frac{\partial D}{\partial v^\mu}, \tag{1.10}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v^\rho}\right) = -\frac{\partial D}{\partial v^\rho}. \tag{1.11}$$

Представим функции L, D равенствами:

$$L = T - P, \quad 2T = 2T^0 + m_{\eta\theta}\left(q^k\right) v^\eta v^\theta, \quad 2T^0 = m_{ij}\left(q^k\right) v^i v^j, \tag{1.12}$$

$$2P = 2P^0\left(q^i, t\right) + k_{\mu\nu}\left(q^i, t\right) q^\mu q^\nu, \tag{1.13}$$

$$2D = 2D^0\left(q^i, v^j, t\right) + c_{\eta\theta}\left(q^i, t\right) v^\eta v^\theta, \tag{1.14}$$

$$\nu = n+1, \ldots, n+m, \quad \eta, \theta = n+1, \ldots, n+m+r,$$

где $T\left(q^\alpha, v^\gamma, t\right)$ — кинетическая энергия, $P\left(q^\alpha, v^\gamma, t\right)$ — потенциальная энергия. Будем предполагать, что коэффициенты $m_{ij}, m_{\eta\theta}, k_{\mu\nu}, c_{\eta\theta}$ и все их частные производные ограничены в области Ω изменения переменных q^i, v^j и при всех $t \geqslant t_0$.

Выражения для множителей λ_κ определяются, если уравнения (1.9), (1.10), (1.11) представить в виде, разрешенном относительно производных $\frac{dv^\gamma}{dt}$. Учитывая выражения (1.12)–(1.14), запишем уравнения (1.9)–(1.11) в виде системы

$$\begin{array}{l} \frac{dq^k}{dt} = v^k, \quad \frac{dq^\mu}{dt} = v^\mu, \\ m_{ik}\frac{dv^k}{dt} = m_i + \varphi_i^\kappa \lambda_\kappa + m_i^{(2)}, \quad m_{\eta\theta}\frac{dv^\theta}{dt} = -k_{\eta\mu} q^\mu - b_{\eta\theta} v^\theta, \end{array} \tag{1.15}$$

где

$$m_i = Q_i - \gamma_{i,jk} v^j v^k - P_i^0 - D_i^0, \quad P_i^0 = \frac{\partial P^0}{\partial q^i}, \quad D_i^0 = \frac{\partial D^0}{\partial q^i},$$

$$\gamma_{i,jk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial m_{ij}}{\partial q^k} + \frac{\partial m_{ki}}{\partial q^j} - \frac{\partial m_{jk}}{\partial q^i}\right),$$

$$m_i^{(2)} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial m_{\eta\theta}}{\partial q^i} - \frac{\partial c_{\eta\theta}}{\partial v^i}\right) v^\eta v^\theta - \frac{\partial k_{\mu\nu}}{\partial q^i} q^\mu q^\nu\right),$$

$$b_{\eta\theta} = \frac{\partial m_{\eta\theta}}{\partial q^i} v^i + c_{\eta\theta}, \quad k_{\rho\nu} = k_{\nu\rho} = 0.$$

Обозначив (m^{ki}) и $(m^{\theta\eta})$ матрицы, обратные к матрицам (m_{ik}) и $(m_{\theta\eta})$ соответственно, представим систему уравнений (1.15) в виде, разрешенном относительно старших производных

$$\begin{aligned} &\tfrac{dq^k}{dt} = v^k, \quad \tfrac{dq^\mu}{dt} = v^\mu, \\ &\tfrac{dv^k}{dt} = m^k + \varphi^{k\kappa}\lambda_\kappa + m^{k(2)}, \quad \tfrac{dv^\eta}{dt} = k^\eta_\mu q^\mu + b^\eta_\theta v^\theta, \end{aligned} \tag{1.16}$$

$$m^k = m^{ki}m_i, \varphi^{k\kappa} = m^{ki}\varphi^\kappa_i, m^{k(2)} = m^{ki}m_i^{(2)},$$

$$b^\eta_\theta = -m^{\eta\alpha}b_{\alpha\theta}, \quad k^\eta_\nu = -m^{\eta\alpha}k_{\alpha\nu}, \quad \alpha = n+1, \ldots, n+m+r.$$

1.4. Определение управляющих воздействий

Для составления правых частей уравнений динамики заданной системы (1.9) остается определить выражения множителей λ_κ через обобщенные координаты q^i и обобщенные скорости v^i. Продифференцировав равенства (1.7):

$$\frac{dv^\eta}{dt} = \varphi_i^{\eta-n}\frac{dv^i}{dt} + h^{\eta-n},$$

$$h^{\mu-n} = \frac{\partial^2 f^{\mu-n}}{\partial q^i \partial q^j}v^i v^j + 2\frac{\partial^2 f^{\mu-n}}{\partial q^i \partial t}v^i + \frac{\partial^2 f^{\mu-n}}{\partial t^2},$$

$$h^{\rho-n} = \frac{\partial f^{\rho-n}}{\partial q^i}v^i + \frac{\partial f^{\rho-n}}{\partial t}$$

и заменив выражения $\frac{dv^i}{dt}$ правыми частями соответствующих уравнений системы (1.16), получим следующую систему уравнений для определения множителей λ_κ:

$$s^{\kappa\beta}\lambda_\beta = k^{n+\kappa}_\nu q^\nu + b^{n+\kappa}_\theta v^\theta - \varphi^\kappa_i m^i - h^{n+\kappa} + \varphi^\kappa_i m^{i(2)}, \quad s^{\kappa\beta} = \varphi^\kappa_i \varphi^{i\beta}. \tag{1.17}$$

$$\eta - n = \kappa, \quad \beta = 1, 2, \ldots, m+r.$$

Решение системы (1.17) можно представить суммой

$$\lambda_\beta = \lambda^{(0)}_\beta + \lambda^{(1)}_\beta + \lambda^{(2)}_\beta, \tag{1.18}$$

$$\begin{aligned} \lambda^{(0)}_\beta &= -s_{\beta\kappa}\left(\varphi^\kappa_i m^i + h^{n+\kappa}\right), \\ \lambda^{(1)}_\beta &= s_{\beta\kappa}\left(k^{n+\kappa}_\mu q^\mu + b^{n+\kappa}_\theta v^\theta\right), \\ \lambda^{(2)}_\beta &= s_{\beta\kappa}\varphi^\kappa_i m^{i(2)}, \end{aligned}$$

где $s_{\beta\kappa}$ — матрица, обратная к матрице $s^{\kappa\beta}$. Подставляя полученное выражение (1.18) в уравнения (1.16), получим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dq^k}{dt} = v^k, \quad \frac{dv^k}{dt} = m^k + \varphi^{k\beta}\left(\lambda^{(0)}_\beta + \lambda^{(1)}_\beta + \lambda^{(2)}_\beta\right), \tag{1.19}$$

$$\frac{dq^\mu}{dt} = v^\mu, \quad \frac{dv^\mu}{dt} = k^\mu_\nu q^\nu + b^\mu_\theta v^\theta, \quad \frac{dv^\rho}{dt} = b^\rho_\theta v^\theta. \tag{1.20}$$

Если начальные значения q^i_0, v^j_0 удовлетворяют условиям (1.11), то система уравнений (1.20) допускает тривиальное решение $q^\mu = 0, \ v^\mu = 0, \ v^\rho = 0$, и система (1.19) может быть записана в следующем виде:

$$\frac{dq^k}{dt} = v^k, \quad \frac{dv^k}{dt} = m^k + \varphi^{k\beta}\lambda^{(0)}_\beta. \tag{1.21}$$

Решение системы (1.21) при соответствующих начальных условиях удовлетворяет уравнениям связей (1.4). Если же начальные значения q^i_0, v^j_0 соответствуют равенствам (1.8), то поведение решений системы (1.19) зависит от решений системы уравнений (1.20).

2. Стабилизация связей

2.1. Формулировка задачи

Решение системы уравнений (1.19), (1.20) $q^i = q^i(t)$, $v^i = v^i(t)$, $q^\mu = q^\mu(t)$, $v^{n+\kappa} = v^{n+\kappa}(t)$, соответствующее начальным условиям (1.8) удовлетворяет уравнениям связей (1.6), (1.7). Это означает, что уравнения (1.19), в правых частях которых переменные $q^\mu, v^{n+\kappa}$ выражены через фазовые координаты q^i, v^i исходной системы, описывают ее динамику. Система уравнений (1.20) допускает тривиальное решение $q^\mu = 0$, $v^{n+\kappa} = 0$, соответствующее уравнениям связей (1.4). Выбором правых частей уравнений системы (1.20), которые определяются соответствующими составляющими кинетической энергии $T\left(q^i, v^j, q^\mu, v^{n+\kappa}, t\right)$ и диссипативной функции $D\left(q^i, v^j, q^\mu, v^{n+\kappa}, t\right)$ расширенной системы, можно управлять изменением во времени возмущений связей $q^\mu = q^\mu(t)$, $v^{n+\kappa} = v^{n+\kappa}(t)$. Слагаемые $\varphi^{k\beta}\left(\lambda_\beta^{(1)} + \lambda_\beta^{(2)}\right)$ в правых частях уравнений системы (1.19) представляют собой дополнительные силы, действующие на исходную систему в соответствии с законом изменения переменных $q^\mu = q^\mu(t)$, $v^\kappa = q^\kappa(t)$.

Для упрощения последующих рассуждений представим уравнения динамики (1.19), (1.20), уравнения связей (1.6), (1.7) и начальные условия (1.8), соответствующие расширенной системе в матричном виде:

$$\frac{dx}{dt} = X(x,t) + W(x,t)\,y + X^{(2)}, \tag{2.1}$$

$$\frac{dy}{dt} = A(x,t)\,y, \tag{2.2}$$

$$y - g(x,t) = 0, \tag{2.3}$$

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0, \tag{2.4}$$

$$x = \left(x^1, ..., x^{2n}\right), \quad x^k = q^k, x^{n+k} = v^k,$$

$$X^k = v^k, \quad X^{n+k} = m^k - \varphi^{k\beta} s_{\beta\kappa}\left(\varphi_i^\kappa m^i + h^{n+\kappa}\right),$$

$$y = \left(y^1, ..., y^{2m+r}\right), \quad y^{\mu-n} = q^\mu, \quad y^{m+\kappa} = v^{n+\kappa}.$$

Матрицы W, A коэффициентов уравнений (2.1), (2.2) и вектор $X^{(2)}$ определяются составляющими уравнений (1.6), (1.7), (1.19), (1.20):

$$W(x,t) = \begin{pmatrix} W_{11}(x,t) & W_{12}(x,t) \\ W_{21}(x,t) & W_{22}(x,t) \end{pmatrix}, \quad W_{11} = (w_{i\mu}), \quad W_{12} = (w_{i,m+\kappa}),$$

$$W_{21} = (w_{n+i,\mu}), \quad W_{22} = (w_{n+i,m+\kappa}),$$

$$w_{i\mu} = 0, \quad w_{i,m+\kappa} = 0,$$

$$w_{n+i,\mu} = \delta_{ik}\varphi^{k\beta} s_{\beta\kappa} k_\mu^{n+\kappa}, \quad w_{n+i,m+\kappa} = \delta_{ik}\varphi^{k\beta} s_{\beta\zeta} b_\kappa^{n+\zeta},$$

$$\delta_{ik} = 0, \quad i \neq k, \quad \delta_{ii} = 1, \quad \zeta = 1, 2, \ldots, m + r,$$

$$X^{(2)} = \left(x^{(2)1}, ..., x^{(2)2n}\right), \quad x^{(2)k} = 0, \quad x^{(2),n+k} = \varphi^{k\beta} s_{\beta\kappa}\varphi_i^\kappa m^{i(2)},$$

$$g^{\mu-n} = f^{\mu-n}\left(q^i, t\right), \quad g^{m+\mu-n} = \varphi_i^{\mu-n} v^i + f_t^{\mu-n},$$

$$g^{m+\rho-n} = f^{\rho-n}\left(q^i, v^j, t\right),$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ 0 & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix},$$

$$A_{12} = diag\left(v^{n+1}, ..., v^{n+m}\right),$$
$$A_{21} = \left(a^{m+\mu-n}_{\nu-n}\right), \quad a^{m+\mu-n}_{\nu-n} = k^{\mu}_{\nu},$$
$$A_{22} = \left(a^{m+\mu-n}_{m+\nu-n}\right), \quad a^{m+\mu-n}_{m+\nu-n} = b^{\mu}_{\nu},$$
$$A_{23} = \left(a^{m+\mu-n}_{m+\rho-n}\right), \quad a^{m+\mu-n}_{m+\rho-n} = b^{\mu}_{\rho},$$
$$A_{32} = \left(a^{m+\tau-n}_{m+\nu-n}\right), \quad a^{m+\tau-n}_{m+\nu-n} = b^{\tau}_{\nu}, \quad \tau = n+m+1, ..., n+m+r,$$
$$A_{33} = \left(a^{m+\tau-n}_{m+\rho-n}\right), \quad a^{m+\tau-n}_{m+\rho-n} = b^{\tau}_{\rho}.$$

Уравнение (2.1) при $y = 0$ принимает вид

$$\frac{dx}{dt} = X\left(x, t\right),$$

что соответствует системе (1.21), и справедливо равенство

$$GX + g_t = 0,$$
$$G = \left(\frac{\partial g^{\sigma}}{\partial x^{l}}\right), \quad g_t = \left(\frac{\partial g^{\sigma}}{\partial t}\right), \quad \sigma = 1, ..., 2m+r, \quad l = 1, ..., 2n.$$

2.2. Необходимое условие стабилизации связей

Для обеспечения стабилизации связей необходимо, чтобы решение уравнений динамики замкнутой системы было асимптотически устойчиво по отношению к уравнениям связей исходной системы. Устойчивость по отношению к уравнениям связей будем понимать в смысле следующих определений.

Определение 1. Движение, соответствующее решению системы уравнений (1.19), устойчиво по отношению к уравнениям связей (1.4), если для любого ε существует такое δ, что при любых начальных условиях $q^i\left(t_0\right) = q^i_0$, $v^j\left(t_0\right) = v^j_0$, удовлетворяющих неравенствам $\left\|y\left(t_0\right)\right\| \leqslant \delta$, $\left\|y\right\|^2 = y^T y$, при всех $t > t_0$ выполняется неравенство $\left\|y\left(t\right)\right\| \leqslant \varepsilon$.

Определение 2. Движение, соответствующее решению системы уравнений (1.19), асимптотически устойчиво по отношению к уравнениям связей (1.4), если оно устойчиво и выполняется условие $\lim\limits_{t\to\infty}\left\|y\left(t\right)\right\| = 0$.

Определение 3. Движение, соответствующее решению системы уравнений (1.19), экспоненциально устойчиво по отношению к уравнениям связей (1.4), если оно устойчиво и выполняется условие $\left\|y\right\| \leqslant \left\|y_0\right\| e^{\alpha(t-t_0)}$, $\alpha < 0$.

Устойчивость и асимптотическая устойчивость решений систем дифференциальных уравнений динамики (2.1) по отношению к уравнениям связей (1.4) применительно к системе уравнений (2.1), (2.2) соответствует устойчивости по части переменных [16]. Исследование устойчивости проводится методом функций Ляпунова [17]. Используя соответствующий критерий при определении выражений кинетической энергии и диссипативной функции расширенной системы (2.1), (2.2), от которых зависит правая часть уравнения возмущений связей (2.2), можно обеспечить асимптотическую или экспоненциальную устойчивость тривиального решения $y = 0$ уравнения (2.2). Достаточные условия экспоненциальной устойчивости формулируются следующей теоремой.

Теорема 1. Если $A = -K^{-1}L$, матрица $L = L\left(x, t\right)$ и постоянная матрица K являются симметричными, определенно-положительными и удовлетворяют условиям

1. $\left\|L\left(x, t\right)\right\| \geqslant \lambda_0 > 0$,

2. $k_1 \leqslant \|K\| \leqslant k_2$,

то уравнение (2.2) имеет экспоненциально устойчивое тривиальное решение $y = 0$.

Составим функцию Ляпунова в виде положительно определенной квадратичной формы с постоянной матрицей коэффициентов K: $2V = y^T K y$. Производная функции V, вычисленная в силу системы уравнений (2.1), (2.2), является определенно-отрицательной квадратичной формой относительно составляющих вектора y: $\dot{V} = -y^T L\,(x,t)\,y$. Оценим величину производной функции Ляпунова

$$\dot{V} = -y^T L\,(x,t)\,y \leqslant -\lambda_0\,\|y\|^2\,. \tag{2.5}$$

Из неравенства (2.5) с учетом оценки $k_1\,\|y\|^2 \leqslant y^T K y \leqslant k_2\,\|y\|^2$ следует, что $\dot{V} \leqslant \alpha V$, $\alpha = -2\lambda_0/k_2$ или $V \leqslant V_0 e^{\alpha(t-t_0)}$. Следовательно,

$$\|y\|^2 \leqslant 2V/k_1 \leqslant 2V_0 e^{\alpha(t-t_0)}/k_1 \leqslant (k_2/k_1)\,\|y_0\|^2\,e^{\alpha(t-t_0)}.$$

Заключение

Для решения задачи стабилизации связей строится расширенная система, позволяющая учитывать возможные отклонения от уравнений связей при отклонении начальных данных от уравнений связей. Построение уравнений возмущений связей позволяет обеспечить необходимое условие стабилизации связей — асимптотическую устойчивость тривиального решения. При этом уравнения связей описывают интегральное многообразие уравнений динамики исходной системы.

Литература

[1] Ольсон Г. Динамические аналогии. М.: Изд-во иностр. лит., 1947. 224 с.

[2] Layton R.A. Principles of Analytical System Dynamics. N. Y.: Springer, 1998. 158 p.

[3] Грдина Я.И. Динамика живых организмов. Екатеринославль, 1911. 107 с.

[4] Коренев Г.В. Введение в механику человека. М.: Наука, 1977. 263 с.

[5] Пятницкий Е.С. Избранные труды: в 3 т. Т. 3. Теоретическая биомеханика. М.: Физматлит, 2006. 448 с.

[6] Саитов Р.И. Математическая модель процесса познания // Проблемы физико-математического образования в педагогических вузах России на современном этапе: материалы II Уральской региональной межвузовской научно-практической конференции, Уфа, 19–21 мая 1997 г. Уфа, 1997. Ч. 2. С. 66–67.

[7] Сиразетдинов Т.К. Динамическая модель прогнозирования и оптимальное управление экономическим объектом // Изв. вузов. Сер.: Авиационная техника, 1972. № 4. С. 3–8.

[8] Сиразетдинов Т.К. Динамическое моделирование экономических объектов. Казань: Фэн, 1996. 223 с.

[9] Сиразетдинов Т.К., Родионов В.В., Сиразетдинов Р.Т. Динамические модели экономического региона. Казань: Фэн, 2005. 320 с.

[10] Мещерский И.В. Работы по механике тел переменной массы. М.; Л.: Гостехиздат, 1952. 280 с.

[11] Галиуллин А.С. Методы решения обратных задач динамики. М.: Наука, 1986. 224 с.

[12] Новоселов В.С. Аналитическая механика с систем с переменными массами. Л.: Изд-во ЛГУ, 1969. 240 с.

[13] Мухарлямов Р.Г. Моделирование динамики простейших экономических объектов как систем с программными связями // Вестник РУДН. Сер.: Физ.-мат. науки. 2007. № 1. С. 25–34.

[14] Ахметов А.А., Мухарлямов Р.Г. Применение методов моделирования механических систем для управления экономическими объектами // Вестник КГТУ. 2008. № 2. С. 81–84.

[15] Pynter H.M. Analysis and Design of Engineering Systems. Cambridge, MA: MIT Press, 1961. 370 p.

[16] Озиранер А.С., Румянцев В.В. Метод функций Ляпунова в задаче об устойчивости движения относительно части переменных // ПММ. 1972. Т. 36. Вып. 2. С. 364–383.

[17] Мухарлямов Р.Г. Построение множества систем дифференциальных уравнений устойчивого движения по интегральному многообразию // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5. № 4. С. 688–699.

Поступила в редакцию 21/*XI*/2013;
в окончательном варианте — 21/*XI*/2013.

DYNAMICS CONTROL AND CONSTRAINT STABILIZATION

 N.V. Abramov,[4] R.G. Mukharlyamov[5]

Results of researchers on dynamics modeling of the systems containing different physical elements are proposed. The construction method of the physical systems dynamics equations, providing constraints stabilization, is discussed. The problem of corresponding constraints reactions or determination of control actions is reduced to the construction of the system of differential equations, assuming that the partial integrals are given. The conditions of asymptotic stability and exponential stability an integral manifold's corresponding constraint equations are defined.

Key words: mechanics, program constraints, reaction, stability, numerical solution, stabilization, dynamics, equation, construction, system.

Paper received 21/*XI*/2013.
Paper accepted 21/*XI*/2013.

[4]Abramov Nikolay Vasilievich (abramoff@mail.ru), the Dept. of Natural-Science Disciplines, Nizhnevartovsk Branch of Tyumen State Oil and Gas University, Nizhnevartovsk, 628600, Russian Federation.

[5]Mukharlyamov Robert Garabshevich (robgar@mail.ru), the Dept. of Theoretical Mechanics, Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, 117198, Russian Federation.