УДК 512.554

ОБ ОБОБЩЕННЫХ δ-ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯХ[1]

© 2013 И.Б. Кайгородов[2]

В этой работе рассматриваются вопросы, посвященные обобщению понятия δ-дифференцирования в неассоциативных алгебрах. Кроме того, проведено построение новых примеров нетривиальных δ-дифференцирований для алгебр Ли.

Ключевые слова: δ-дифференциорвание, алгебра Ли, альтернативная алгебра, йорданова супералгебра, супералгебра Ли.

Введение

Понятие антидифференцирования алгебры, являющееся частным случаем δ-дифференцирования, т. е. (-1)-дифференцированием, рассматривалось в работах [1; 2]. В дальнейшем в работе [3] появляется определение δ-дифференцирования алгебры. Напомним, что при фиксированном δ из основного поля F, под δ-дифференцированием алгебры A понимают линейное отображение ϕ, удовлетворяющее условию

$$\phi(xy) = \delta(\phi(x)y + x\phi(y)) \tag{1}$$

для произвольных элементов $x, y \in A$. Описанию δ-дифференцирований посвящены работы [3]-[15], где изучались δ-дифференцирования алгебр и супералгебр Ли, йордановых алгебр и супералгебр, алгебр Филиппова и др. А в работах [16; 17] изучались обобщения δ-дифференцирований n-арных алгебр.

1. Об обобщенных δ-дифференцированиях алгебр и супералгебр

Пусть F — поле характеристики отличной от 2. Напомним определение супералгебры. Алгебра G над полем F называется супералгеброй (или $\mathbb{Z}_2$-градуированной алгеброй), если она представима в виде $G = G_0 \oplus G_1$, при этом справедливы соотношения $G_iG_j \subseteq G_{i+j(mod2)}, i, j = 0, 1$.

[1]Работа выполнена при поддержке Совета по грантам Президента РФ (проект МК-330.2013.1).

[2]Кайгородов Иван Борисович (kib@math.nsc.ru), лаборатория теории колец Института математики им. С.Л. Соболева, 630090, Российская Федерация, г. Новосибирск, пр. Коптюга, 4.

При фиксированном элементе $\delta \in F$, для супералгебры $A = A_0 \oplus A_1$, однородное линейное отображение $\phi : A \to A$ будем называть четным *δ-супердифференцированием*, если $\phi(A_i) \subseteq A_i$ и для однородных $x, y \in A_0 \cup A_1$ выполнено

$$\phi(xy) \quad = \quad \delta(\phi(x)y + x\phi(y)).$$

Под центроидом $\Gamma(A)$ супералгебры A мы будем понимать множество линейных отображений $\chi : A \to A$, что для произвольных элементов a, b верно

$$\chi(ab) = \chi(a)b = a\chi(b).$$

Ясно, что 1-супердифференцирование является обычным супердифференцированием; 0-супердифференцированием является произвольный эндоморфизм ϕ супералгебры A такой, что $\phi(A^2) = 0$. Ненулевое δ-супердифференцирование будем считать нетривиальным, если $\delta \neq 0, 1$ и $\phi \notin \Gamma(A)$. Легко видеть, что четное δ-супердифференцирование будет являться δ-дифференцированием.

Пусть A — алгебра над F с умножением ab и обладающая дополнительной билинейной операцией $\{\ ,\ \} : A \times A \to A$. Через Ax обозначим изоморфную копию алгебры A и на прямой сумме векторных пространств $A \oplus Ax$ зададим умножение $\cdot$ по следующему правилу

$$a \cdot b = ab, a \cdot (bx) = (ab)x, (ax) \cdot b = (ab)x, (ax) \cdot (bx) = \{a, b\}, \text{ где } a, b \in A.$$

Мы получим структуру супералгебры на $B : B_0 = A, B_1 = Ax$. Примерами таких супералгебр являются супералгебры, построенные по процессу Кантора [10; 19]. Данный процесс мы будем называть обобщенным процессом Кантора.

При рассмотрении четных δ-супердифференцирований супералгебры B мы приходим к понятию обобщенного δ-дифференцирования алгебры A. Для этого достаточно заметить, что для ϕ — четного δ-супердифференцирования B верно

$$\delta\phi(ax)b + \delta(ax)\phi(b) = \phi((ax)b) = \phi(a(bx)) = \delta\phi(a)(bx) + \delta a\phi(bx). \tag{2}$$

В силу четности δ-супердифференцирования ϕ, мы можем положить, что $\phi(bx) = \chi(b)x$, где $\chi \in End(A)$. Таким образом, соотношение (2) преобразуется к выражению

$$\delta\chi(a)b + \delta a\phi(b) = \chi(ab) = \delta\phi(a)b + \delta a\chi(b). \tag{3}$$

Далее для алгебры A линейное отображение χ, связанное с δ-дифференцированием ϕ посредством соотношения (3), мы будем называть *обобщенным δ-дифференцированием*. Обобщенные δ-дифференцирования неявно возникают в работе [10] при рассмотрении δ-супердифференцирований обобщенного дубля Кантора, построенного на первичной ассоциативной алгебре.

Отметим, что обобщенное δ-дифференцирование тесно связано с обобщенным дифференцированием, то есть таким линейным отображением σ алгебры A, которое связано с некоторым дифференцированием D алгебры A посредством соотношения

$$\sigma(ab) = \sigma(a)b + aD(b).$$

Примером обобщенного дифференцирования, не являющегося обыкновенным дифференцированием, может служить отображение вида $D + \psi$, где $D \in Der(A), \psi \in \Gamma(A)$. Обобщенные дифференцирования рассматривались, к примеру, в работе [20].

Далее, во всех леммах этого раздела мы будем подразумевать, что χ — обобщенное δ-дифференцирование, связанное с δ-дифференцированием ϕ, и $\chi_\phi = \chi - \phi$.

Все алгебры будут рассматриваться над кольцом характеристики, отличной от 2, а супералгебры над полем характеристики, отличной от 2.

Лемма 1. Пусть χ — обобщенное δ-дифференцирование (супер)алгебры A, тогда χ_ϕ является $\frac{\delta}{2}$-дифференцированием A и $\chi_\phi(ab) = \delta a\chi_\phi(b) = \delta\chi_\phi(a)b$.

Доказательство. Рассматривая разность между выражениями (3) и (1), мы получим

$$\chi_\phi(ab) = \delta a\chi_\phi(b) = \delta\chi_\phi(a)b.$$

Далее, воспользовавшись полученным равенством, легко имеем

$$\chi_\phi(ab) = \frac{1}{2}(\delta a\chi_\phi(b) + \delta\chi_\phi(a)b).$$

Данное означает, что χ_ϕ является $\frac{\delta}{2}$-дифференцированием алгебры A. Лемма доказана.

Ясно, что обобщенное 1-дифференцирование является отображением вида $D+$ $+\psi$, где D — дифференцирование, а ψ — элемент центроида. Обобщенным 0-дифференцированием является произвольный эндоморфизм χ с условием $\chi(A^2) = 0$. Обобщенное δ-дифференцирование χ является нетривиальным, если $\delta \neq 0, 1$ и χ не является δ-дифференцированием. Следует отметить, что условие $\chi_\phi = 0$ непосредственно влечет тривиальность χ.

Далее, в теоремах 2, 3 и 4 будут рассматриваться алгебры с тривиальным аннулятором, то есть с условием $Ann(A) = \{x|xA = Ax = 0\} = 0$. Примером таких алгебр являются первичные алгебры.

Теорема 2. Алгебра Ли A с тривиальным аннулятором не имеет нетривиальных обобщенных δ-дифференцирований.

Доказательство. В силу показанного в лемме 1, мы можем заключить, что выполняется следующая цепочка соотношений

$$\delta(x\chi_\phi(z))y + \delta x(y\chi_\phi(z)) = \delta(xy)\chi_\phi(z) = \chi_\phi((xy)z) =$$
$$\chi_\phi((xz)y + x(yz)) = \delta^2((x\chi_\phi(z))y + x(y\chi_\phi(z))).$$

Откуда имеем $0 = (x\chi_\phi(z))y + x(y\chi_\phi(z)) = \chi_\phi(xy)z$. Таким образом, $\chi_\phi(A^2) \subseteq$ $\subseteq Ann(A) = \{0\}$. Отсюда получаем $\chi_\phi(x)y = 0$ и $\chi_\phi(A) \subseteq Ann(A) = \{0\}$, что эквивалентно тривиальности χ. Теорема доказана.

Теорема 3. Супералгебра Ли A с тривиальным аннулятором не имеет нетривиальных обобщенных δ-дифференцирований.

Доказательство. Легко понять, что пространство $End(A)$ является $\mathbb{Z}_2$-градуированным, то есть любое линейное отображение $\psi \in End(A)$ мы можем представить в виде суммы четного и нечетного отображений $\psi_0 + \psi_1$, где $\psi_0(A_i) \subseteq A_i$ и $\psi_1(A_i) \subseteq A_{i+1}$.

Будем считать, что χ и ϕ являются четными отображениями, то есть верно $\chi(A_i) \subseteq A_i, \phi(A_i) \subseteq A_i$. Тогда, в силу показанного в лемме 1, мы можем заключить, что для однородных элементов $x, y, z \in A_0 \cup A_1$ выполняется следующая цепочка соотношений:

$$\delta(x\chi_\phi(z))y + (-1)^{p(x)p(z)}\delta x(y\chi_\phi(z)) = \delta(xy)\chi_\phi(z) = \chi_\phi((xy)z) =$$
$$\chi_\phi((xz)y + (-1)^{p(x)p(z)}x(yz)) = \delta^2((x\chi_\phi(z))y + (-1)^{p(x)p(z)}x(y\chi_\phi(z))).$$

Откуда получаем

$$0 = (x\chi_\phi(z))y + (-1)^{p(x)p(z)}x(y\chi_\phi(z)) = (xy)\chi_\phi(z).$$

Понятно, что из законов дистрибутивности также следует, что равенство $\chi_\phi(xy)z = 0$ выполняется для произвольных $x, y, z \in A$, где χ_ϕ — четное отображение, определенное выше.

Пусть χ и ϕ являются нечетными отображениями, то есть верно

$$\chi(A_i) \subseteq A_{i+1}, \phi(A_i) \subseteq A_{i+1}.$$

Положим $x_i, y_i \in A_i$ и $x, y, z \in A$.

Легко заметить, что

$$\delta(x_0\chi_\phi(z))y + \delta x_0(y\chi_\phi(z)) = \delta(x_0y)\chi_\phi(z) = \chi_\phi((x_0y)z) =$$
$$= \chi_\phi((x_0z)y + x_0(yz)) = \delta^2((x_0\chi_\phi(z))y + x_0(y\chi_\phi(z))).$$

Откуда имеем

$$0 = (x_0\chi_\phi(z))y + x_0(y\chi_\phi(z)) = (x_0y)\chi_\phi(z),$$

то есть $\chi_\phi(x_0y)z = 0$.

Отметим, что

$$\chi_\phi(x_1y_0) = \delta\chi_\phi(x_1)y_0 = -\delta y_0\chi_\phi(x_1) = -\delta\chi_\phi(y_0)x_1 = -\delta x_1\chi_\phi(y_0) = -\chi_\phi(x_1y_0),$$

то есть $\chi_\phi(x_1y_0)z = 0$.

Заметим, что

$$\chi_\phi(x_1y_1) = \delta\chi_\phi(x_1)y_1 = -\delta y_1\chi_\phi(x_1) = -\chi_\phi(y_1x_1) = -\chi_\phi(x_1y_1),$$

то есть $\chi_\phi(x_1y_1)z = 0$ и $\chi_\phi(x_1y)z = 0$.

Теперь мы можем заключить, что $\chi_\phi(xy)z = 0$, где x, y, z — произвольные элементы A и χ_ϕ либо четное, либо нечетное отображение.

Таким образом, $\chi_\phi(A^2) \subseteq Ann(A) = \{0\}$. Откуда получаем $\chi_\phi(x)y = 0$ и $\chi_\phi(A) \subseteq Ann(A) = \{0\}$, что эквивалентно тривиальности χ. Теорема доказана.

Теорема 4. Альтернативная алгебра A с тривиальным аннулятором не имеет нетривиальных обобщенных δ-дифференцирований.

Доказательство. В силу показанного в лемме 1, мы можем заключить, что выполняется следующая цепочка соотношений:

$$\delta\chi_\phi(y)x^2 = \chi_\phi(yx^2) = \chi_\phi((yx)x) = \delta^2((\chi_\phi(y)x)x) = \delta^2\chi_\phi(y)x^2.$$

Таким образом, мы получаем $y\chi_\phi(x^2) = 0$, то есть $\chi_\phi(x^2) \subseteq Ann(A) = \{0\}$. Откуда, посредством линеаризации, легко вытекает, что $\chi_\phi(xy + yx) = 0$ и $\chi_\phi(z)(xy + yx) = 0$.

Повторяя дословно доказательство из [21, лемма 2, с. 160], получаем $\chi_\phi(((ab)c)d) = 0$. Таким образом, $\chi_\phi(a) = 0$ и χ тривиально. Теорема доказана.

Теорема 5. Унитальная (супер)алгебра A не имеет нетривиальных обобщенных δ-дифференцирований.

Доказательство. Заметим, что если e — единица (супер)алгебры A, то
$$\chi_\phi(e) = \chi_\phi(ee) = \delta\chi_\phi(e) \text{ и } \chi_\phi(e) = 0.$$
Таким образом, легко видеть, что
$$\chi_\phi(x) = \chi_\phi(ex) = 2\chi_\phi(e)x = 0.$$
Откуда мы получаем тривиальность χ. Теорема доказана.

В частности, теорема 5 дает отсутствие нетривиальных обобщенных δ-дифференцирований для полупростых конечномерных йордановых алгебр и всего класса структуризуемых алгебр над произвольным полем характеристики, отличной от 2.

Теорема 6. Полупростая конечномерная йорданова супералгебра A над алгебраически замкнутым полем характеристики, отличной от 2, не имеет нетривиальных обобщенных δ-дифференцирований.

Доказательство. Согласно работе [22], если A полупростая конечномерная йорданова супералгебра над алгебраически замкнутым полем характеристики, отличной от 2, то $A = \bigoplus_{i=1}^{s} T_i \oplus J_1 \oplus \ldots \oplus J_t$, где $J_1, \ldots, J_t$ — простые йордановы супералгебры и $T_i = J_{i1} \oplus \ldots \oplus J_{ir_i} + K_i \cdot 1$, $K_1, \ldots, K_s$ — расширения поля F и $J_{i1}, \ldots, J_{ir_i}$ — простые неунитальные йордановы супералгебры над полем K_i. Пусть некоторая супералгебра J представима в виде прямой суммы супералгебр $B \oplus C$ и b — элемент супералгебры B, который не является делителем нуля, а c — произвольный элемент C. Тогда
$$0 = \chi_\phi(bc) = \delta b \chi_\phi(c),$$
откуда получаем, что $\chi_\phi(c) \in C$, благодаря чему можем заключить, что $\chi_\phi(J_i) \subseteq J_i$ и $\chi_\phi(T_i) \subseteq T_i$. Также легко заметить, что $\phi(J_i) \subseteq J_i$ и $\phi(T_i) \subseteq T_i$. Исходя из теоремы 5, мы заключаем, что ограничение χ на унитальные супералгебры T_i и J_i тривиально.

Следовательно, нам достаточно показать тривиальность ограничения χ на J_i в случае, когда J_i является неунитальной простой конечномерной йордановой супералгеброй. Данные супералгебры исчерпываются супералгебрами $K_3, V_{1/2}(Z, D)$ и супералгеброй K_9 в случае характеристики поля $p = 3$. Их определения можно найти, к примеру, в работах [6; 12; 22]. В частности, известно, что четные части супералгебр $K_3, K_9, V_{1/2}(Z, D)$ являются унитальными алгебрами. Согласно [12, теорема 10], в этом случае J_i не имеет нетривиальных δ-дифференцирований при $\delta \neq \frac{1}{2}$. Таким образом, по лемме 1 и определению нетривиального обобщенного δ-дифференцирования $\chi_\phi = 0$ при $\delta \neq 2$. Случай $\delta = 2$ рассмотрим подробнее. Легко понять, что если e — единица $(J_i)_0$, то $\chi_\phi(e) \in (J_i)_1$. Из определения супералгебр $K_3, V_{1/2}(Z, D)$ известно, что $2ez = z$, при $z \in (J_i)_1$. Следовательно, если $J_i = K_3, V_{1/2}(Z, D)$, то для $z \in (J_i)_1$ верно $\chi_\phi(z) = 2\chi_\phi(ez) = 4e\chi_\phi(z)$, то есть $\chi_\phi(z) = 0$ (при $p \neq 3$) и $\chi_\phi(z) \in (J_i)_0$ (при $p = 3$). Если $J_i = K_3$, то известно, что для нее существуют такие $w, t \in (J_i)_1$, что $e = wt$, откуда, если $p \neq 3$, вытекает $\chi_\phi(e) = 0$. Пусть теперь $p \neq 3, J_i = V_{1/2}(Z, D)$, тогда
$$0 = \chi_\phi(ax) = 4(\chi_\phi(a) \cdot x) \text{ и } \chi_\phi(a) = a_{\chi_\phi} x,$$
то есть $D(a_{\chi_\phi}) = 0$, что дает $a_{\chi_\phi} = \alpha^{a_{\chi_\phi}} e, \alpha^{a_{\chi_\phi}}$ — элемент основного поля супералгебры J_i. Заметим, что

$$\alpha^{a_{\chi_\phi}} ex = \chi_\phi(a) = 2\chi_\phi(e)a = \alpha^{e_{\chi_\phi}} ax$$

и, учитывая, что e и a мы можем взять линейно независимые, получаем $\chi_\phi = 0$.

Если $p = 3$ и $J_i = V_{1/2}(Z, D)$, то при $z, y \in (J_i)_0$ мы получаем $\chi_\phi(e) = bx$ и

$$\chi_\phi(z) = 2\chi_\phi(e) \cdot z = (zb)x,$$

$$\chi_\phi(zx) = \chi_\phi(e) \cdot zx = D(b)z - bD(z).$$

Таким образом, имеем, что

$$\chi_\phi(zx \cdot yx) = 2\chi_\phi(zx) \cdot yx,$$

$$((D(z)y - zD(y))b)x = ((D(b)z - bD(z))y)x,$$

то есть $D(zyb) = 0$, что влечет $D(b) = 0$ и $b = \beta e$, где β — элемент основного поля супералгебры J_i. Следовательно, $D(\beta z) = 0$. Замечая, что z может быть линейно независимо с e, и в силу того, что D обнуляет только элементы вида γe, где γ — элемент основного поля супералгебры J_i, получаем $\beta = 0$. Полученное дает тривиальность χ.

Если $p = 3$ и $J_i = K_9, K_3$, то при $z, t \in (J_i)_1$ имеем

$$\chi_\phi(zt) = 2\chi_\phi(z) \cdot t = 2t \cdot \chi_\phi(z) = \chi_\phi(tz) = -\chi_\phi(zt).$$

Отметим, что здесь мы воспользовались тем, что $\chi_\phi(z) \in (J_i)_0$. Таким образом, $\chi_\phi((J_i)_1^2) = 0$, что влечет $\chi_\phi(e) = 0$ и тривиальность χ.

Исходя из вышеприведенных рассуждений, теорема доказана.

2. О δ-дифференцированиях обобщенного дубля Кантора

Напомним, что в работе [10] было введено и рассматривалось понятие обобщенного дубля Кантора. Как следует из результатов работы [11], особый интерес представляет рассмотрение δ-дифференцирований обобщенного дубля Кантора, построенного на супералгебре с тривиальной нечетной компонентой. Данное заключение вытекает из того факта, что простые унитальные супералгебры йордановой скобки имеют нетривиальные δ-дифференцирования только тогда, когда они построены на супералгебрах с тривиальной нечетной частью [11].

Пусть A — алгебра с операцией $\{\ ,\ \} : A \times A \to A$ и $K(A)$ — супералгебра, полученная с помощью обобщенного процесса Кантора, описанного в параграфе 2. Через $\Delta_\delta(A)$ и $\Gamma(A)$ обозначим, соответственно, множество δ-дифференцирований A и центроид алгебры A, а через $\Delta_\delta(A, \{\ ,\ \})$ — множество δ-дифференцирований A по операции $\{\ ,\ \}$. Для ϕ — линейного отображения супералгебры $K(A)$ под $\phi|_A$ будем подразумевать ограничение отображения ϕ на подалгебру A.

Теорема 7. Пусть ϕ — нетривиальное четное δ-дифференцирование супералгебры $K(A)$, где A — первичная альтернативная алгебра над полем характеристики, отличной от 2, 3. Тогда

$$\delta = \frac{1}{2} \text{ и } \phi(ax) = \phi|_A(a)x, \text{ где } \phi|_A \in \Gamma(A) \cap \Delta_{\frac{1}{2}}(A, \{\ ,\ \}).$$

Доказательство. Пользуясь предварительными рассуждениями из параграфа 2 и теоремой 4, легко понять, что при ϕ — четном δ-дифференцировании супералгебры $K(A)$ мы имеем $\phi(ax) = \phi(a)x$ для любого $a \in A$. С другой стороны, мы видим, что

$$\phi(ax \cdot bx) = \delta\phi(ax)bx + \delta ax \cdot \phi(bx),$$

то есть

$$\phi\{a, b\} = \delta\{\phi(a), b\} + \delta\{a, \phi(b)\}.$$

Таким образом, четные δ-дифференцирования супералгебры $K(A)$ определяются множеством отображений $\Delta_\delta(A) \cap \Delta_\delta(A, \{\ ,\ \})$, где каждое отображение $\psi \in \Delta_\delta(A) \cap \Delta_\delta(A, \{\ ,\ \})$ продолжается на нечетную компоненту супералгебры $K(A)$ по принципу $\psi(ax) = \psi(a)x$.

Напомним, что в силу [5], первичные альтернативные алгебры (над полем характеристики, отличной от 2, 3) не имеют нетривиальных δ-дифференцирований, то есть супералгебра $K(A)$, построенная на первичной альтернативной алгебре A, не имеет нетривиальных четных δ-дифференцирований при $\delta \neq \frac{1}{2}$.

Исходя из вышесказанного, множество четных $\frac{1}{2}$-дифференцирований супералгебры $K(A)$ определяются посредством множества $\Gamma(A) \cap \Delta_{\frac{1}{2}}(A, \{\ ,\ \})$ и условия $\phi(ax) = \phi|_A(a)x$, где $\phi|_A \in \Gamma(A) \cap \Delta_{\frac{1}{2}}(A, \{\ ,\ \})$. Теорема доказана.

Теорема 8. Пусть ϕ — нетривиальное четное δ-дифференцирование супералгебры $K(A)$, где A — первичная лиева алгебра (либо первичная супералгебра Ли, рассматриваемая как алгебра). Тогда $\delta = \frac{1}{2}, -1$; множество четных (-1)-дифференцирований (соответственно, четных $\frac{1}{2}$-дифференцирований) супералгебры $K(A)$ определяется посредством множества отображений $\Delta_{-1}(A) \cap$ $\cap \Delta_{-1}(A, \{\ ,\ \})$ (соответственно, $\Delta_{\frac{1}{2}}(A) \cap \Delta_{\frac{1}{2}}(A, \{\ ,\ \})$) и условия $\phi(ax) = \phi(a)x$.

Доказательство. Пользуясь предварительными рассуждениями из параграфа 2 и теоремой 2 (в случае супералгебры теоремой 3), легко понять, что при ϕ — четном δ-дифференцировании супералгебры $K(A)$ мы имеем $\phi(ax) = \phi(a)x$ для любого $a \in A$. С другой стороны, мы видим, что

$$\phi(ax \cdot bx) = \delta\phi(ax)bx + \delta ax \cdot \phi(bx),$$

то есть

$$\phi\{a, b\} = \delta\{\phi(a), b\} + \delta\{a, \phi(b)\}.$$

Таким образом, четные δ-дифференцирования супералгебры $K(A)$ определяются множеством отображений $\Delta_\delta(A) \cap \Delta_\delta(A, \{\ ,\ \})$, где каждое отображение $\psi \in \Delta_\delta(A) \cap \Delta_\delta(A, \{\ ,\ \})$ продолжается на нечетную компоненту супералгебры $K(A)$ по принципу $\psi(ax) = \psi(a)x$.

Согласно результатам [1; 3; 4] (в случае супералгебры [9]), первичные лиевые алгебры (соответственно, первичные лиевы супералгебры, рассматриваемые как алгебры) не имеют нетривиальных δ-дифференцирований при $\delta \neq -1, \frac{1}{2}$. Таким образом, множество четных δ-дифференцирований супералгебры $K(A)$, построенной на первичной лиевой алгебре A (либо первичной лиевой супералгебре A, рассматриваемой как алгебра), исчерпывается случаями (-1)-дифференцирований и $\frac{1}{2}$-дифференцирований. Множество (-1)-дифференцирований (соответственно, $\frac{1}{2}$-дифференцирований) супералгебры $K(A)$ определяется посредством множества отображений $\Delta_{-1}(A) \cap \Delta_{-1}(A, \{\ ,\ \})$ (соответственно, $\Delta_{\frac{1}{2}}(A) \cap \Delta_{\frac{1}{2}}(A, \{\ ,\ \})$) и условия $\phi(ax) = \phi(a)x$. Теорема доказана.

Теорема 9. Пусть ϕ — нетривиальное четное δ-дифференцирование супералгебры $K(A)$, где A — унитальная алгебра или полупростая йорданова супералгебра над алгебраически замкнутым полем характеристики, отличной от 2. Тогда

$$\delta = \frac{1}{2} \text{ и } \phi(ax) = \phi|_A(a)x, \text{ где } \phi|_A \in \Delta_{\frac{1}{2}}(A) \cap \Delta_{\frac{1}{2}}(A, \{\ ,\ \}).$$

Доказательство. Утвеждение вытекает из результатов об описании δ-дифференцирований полупростой йордановой алгебры над алгебраически замкнутым полем характеристики, отличной от 2 [12] и δ-дифференцирований унитальной алгебры [6, теорема 2.1]. Согласно этим результатам, на данных классах алгебр и супералгебр возможны только нетривиальные $\frac{1}{2}$-дифференцирования. Таким образом, пользуясь схемой доказательств теорем 7 и 8, мы получаем требуемое. Теорема доказана.

Рассмотрим супералгебру $K(A)$, построенную по обобщенному процессу Кантора (см. предыдущий раздел), где A — простая алгебра Ли с умножением $[\ ,\ ]$. Умножение $\cdot$ супералгебры $K(A)$ будет задаваться следующим правилом:

$$a \cdot b = [a, b], \ \ a \cdot bx = [a, b]x, \ \ ax \cdot b = [a, b]x, \ \ ax \cdot bx = [a, b].$$

Легко заметить, что полученная алгебра $K(A) = A \oplus Ax$ будет алгеброй Ли. В данном случае множество четных (-1)-дифференцирований (соответственно, $\frac{1}{2}$-дифференцирований) супералгебры $K(A)$ определяется множеством $\Delta_{-1}(A)$ (соответственно, $\Delta_{\frac{1}{2}}(A)$) и условием $\phi(ax) = \phi(a)x$ для $\phi \in \Delta_\delta(A), \delta = -1, \frac{1}{2}$.

Исходя из вышеизложенного, теоремы 8 и известных примеров нетривиальных (-1)-дифференцирований для простой алгебры sl_2 [1] и нетривиальных $\frac{1}{2}$-дифференцирований для простой алгебры Витта W_1 [4], мы получаем новые примеры нетривиальных (-1)-дифференцирований и $\frac{1}{2}$-дифференцирований для алгебр Ли, построенных из простых лиевых алгебр по обобщенному процессу Кантора.

Как заметил П. Зусманович во время проведения «AGMP-7», построенные примеры алгебр Ли изоморфны алгебрам вида $A \otimes B$, где A — алгебра Ли, а B — подходящая ассоциативно-коммутативная алгебра. Отметим, что δ-дифференцирования алгебр типа $A \otimes B$ рассматривались в работе [9].

В заключение автор выражает благодарность проф. П.С. Колесникову и проф. А.П. Пожидаеву за внимание к работе и конструктивные замечания.

Литература

[1] Hopkins N.C. Generalizes Derivations of Nonassociative Algebras // Nova J. Math. Game Theory Algebra. 1996. T. 5. № 3. P. 215–224.

[2] Филиппов В.Т. Об алгебрах Ли, удовлетворяющих тождеству 5-й степени // Алгебра и логика. 1995. Т. 34. № 6. С. 681–705.

[3] Филиппов В.Т. О δ-дифференцированиях алгебр Ли // Сиб. матем. ж. 1998. Т. 39. № 6. С. 1409–1422.

[4] Филиппов В.Т. О δ-дифференцированиях первичных алгебр Ли // Сиб. матем. ж. 1999. Т. 40. № 1. С. 201–213.

[5] Филиппов В.Т. О δ-дифференцированиях первичных альтернативных и мальцевских алгебр // Алгебра и логика. 2000. Т. 39. № 5. С. 618–625.

[6] Кайгородов И.Б. О δ-дифференцированиях простых конечномерных йордановых супералгебр // Алгебра и логика. 2007. Т. 47. № 5. С. 585–605.

[7] Кайгородов И.Б. О δ-дифференцированиях классических супералгебр Ли // Сиб. матем. ж. 2009. Т. 50. № 3. С. 547–565.

[8] Кайгородов И.Б. О δ-супердифференцированиях простых конечномерных йордановых и лиевых супералгебр // Алгебра и логика. 2010. Т. 49. № 2. С. 195–215.

[9] Zusmanovich P. On δ-derivations of Lie algebras and superalgebras // J. of Algebra. 2010. T. 324. № 12. P. 3470–3486.

[10] Кайгородов И.Б. Об обобщенном дубле Кантора // Вестник Самарского гос. университета. 2010. Т. 78. № 4. С. 42–50.

[11] Желябин В.Н., Кайгородов И.Б. О δ-супердифференцированиях простых супералгебр йордановой скобки // Алгебра и анализ. 2011. Т. 23. № 4. С. 40–58.

[12] Кайгородов И.Б. О δ-супердифференцированиях полупростых конечномерных йордановых супералгебр // Математические заметки. 2012. Т. 91. № 2. С. 200–213.

[13] Кайгородов И.Б. О δ-дифференцированиях n-арных алгебр // Известия РАН. Серия математическая. 2012. Т. 76. № 6. С. 81–94.

[14] Kaygorodov I., Okhapkina E. δ-derivations of semisimple structurable algebras // J. of Algebra and its Applications. 2014. T. 13. № 4. 1350130 (12 pages).

[15] Kaygorodov I., Popov Yu. Alternative algebras admitting derivations with invertible values and invertible derivations // Известие РАН (в печати).

[16] Кайгородов И.Б. $(n+1)$-арные дифференцирования простых n-арных алгебр // Алгебра и логика. 2011. Т. 50. № 5. С. 689–691.

[17] Кайгородов И.Б. Об $(n+1)$-арных дифференцированиях простых n-арных алгебр Мальцева // Алгебра и анализ. 2013. Т. 25. № 4. С. 86–100.

[18] Кайгородов И.Б. О $(n+1)$-арных дифференцированиях полупростых алгебр Филиппова // Математические заметки (в печати).

[19] Кантор И.Л. Йордановы и лиевы супералгебры, определяемые алгеброй Пуассона // Алгебра и анализ. Томск: Изд-во ТГУ. 1990. С. 89–126.

[20] Hvala B. Generalized derivations in rings // Comm. Algebra. 1998. T. 26. № 4. P. 1147–1166.

[21] Кольца, близкие к ассоциативным / К.А. Жевлаков [и др.]. М: Наука, 1978.

[22] Zelmanov E. Semisimple finite dimensional Jordan superalgebras // Lie algebras, rings and related topics. Papers of the 2nd Tainan-Moscow international algebra workshop '97, Tainan, Taiwan, January 11–17, 1997. Hong Kong: Springer, 2000. P. 227–243.

Поступила в редакцию 14/*VI*/2013;
в окончательном варианте — 14/*VI*/2013.

GENERALIZED δ-DERIVATIONS

© 2013 I.B. Kaygorodov[3]

In the paper the questions devoted to generalization of notion of δ-derivation on non-associative algebras. Apart from that new examples of non-trivial δ-derivations for Lie algebras were constructed.

Key words: δ-derivation, Lie algebra, alternative algebra, Jordan superalgebra, Lie superalgebra.

Paper received 14/ *VI*/2013.
Paper accepted 14/ *VI*/2013.

[3]Kaygorodov Ivan Borisovich (`kib@math.nsc.ru`), Laboratory of Ring Theory, Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, 630090, Russian Federation.