

УДК 539.42

## ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ СПЕКТРА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ, СЛЕДУЮЩЕЙ ИЗ ОДНОЙ ПРОБЛЕМЫ СМЕШАННОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПЛАСТИНЫ С ТРЕЩИНОЙ<sup>1</sup>

© 2013 Е.М. Адылина<sup>2</sup>

В работе предложен метод численного отыскания собственных значений класса нелинейных задач на собственные значения, следующих из проблем определения напряженно-деформированного состояния у вершины трещины в материалах со степенными определяющими уравнениями в условиях смешанного деформирования в полном диапазоне смешанных форм деформирования от нормального отрыва до чистого сдвига. С помощью предложенного подхода найдены новые собственные значения задачи, отличные от известного собственного значения, соответствующего классическому решению Хатчинсона — Райса — Розенгрена.

**Ключевые слова:** напряженно-деформированное состояние у вершины трещины, степенной определяющий закон, смешанное деформирование, метод разложения по собственным функциям, нелинейная задача на собственные значения.

### 1. Смешанное деформирование элементов конструкций с трещинами

Вопросы смешанного деформирования образцов с трещинами и дефектами являются предметом пристального внимания и интенсивного изучения в современной нелинейной механике разрушения [1–3]. В последние годы возрастает интерес специалистов в области механики разрушения к задачам о наклонных трещинах и о трещинах, находящихся в условиях одновременно приложенных нормального растягивающего напряжения и поперечного сдвига, которые в механике разрушения относятся к классу смешанных мод нагружения.

В механике разрушения традиционно выделяют три вида трещин, отвечающих трем видам нагружения: трещины нормального отрыва, поперечного и продоль-

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект РФФИ № 12-08-00390).

<sup>2</sup>Адылина Екатерина Михайловна ([adylinaem@samsu.ru](mailto:adylinaem@samsu.ru)), кафедра математического моделирования в механике Самарского государственного университета, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

ного (антиплоского) сдвига [4; 5]. Выделение трех типов трещин восходит к линейной механике разрушения, где суперпозиция решений, полученных для трех типов нагружения, дает решение, справедливое вблизи вершины трещины, для произвольного нагружения тела с дефектом [6]:

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \sum_{m=1}^3 \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^m f_k^{m,ij}(\theta) r^{k/2-1}, \quad (1)$$

$$f_k^{1,11} = \frac{k}{2} [(2 + k/2 + (-1)^k) \cos(k/2 - 1)\theta - (k/2 - 1) \cos(k/2 - 3)\theta],$$

$$f_k^{1,22} = \frac{k}{2} [(2 - k/2 - (-1)^k) \cos(k/2 - 1)\theta + (k/2 - 1) \cos(k/2 - 3)\theta],$$

$$f_k^{1,12} = \frac{k}{2} [(k/2 - 1) \sin(k/2 - 3)\theta - (k/2 + (-1)^k) \sin(k/2 - 1)\theta],$$

$$f_k^{2,11} = -\frac{k}{2} [(2 + k/2 - (-1)^k) \sin(k/2 - 1)\theta - (k/2 - 1) \sin(k/2 - 3)\theta],$$

$$f_k^{2,22} = -\frac{k}{2} [(2 - k/2 + (-1)^k) \sin(k/2 - 1)\theta + (k/2 - 1) \sin(k/2 - 3)\theta],$$

$$f_k^{2,12} = \frac{k}{2} [(k/2 - 1) \cos(k/2 - 3)\theta - (k/2 - (-1)^k) \cos(k/2 - 1)\theta],$$

$$f_k^{3,13} = \sin(k/2 - 1)\theta, \quad f_k^{3,13} = \cos(k/2 - 1)\theta,$$

где  $r, \theta$  – полярные координаты с полюсом в вершине трещины;  $K_I, K_{II}$  – коэффициенты интенсивности напряжений для трещин нормального отрыва, поперечного и продольного сдвига:

$$K_I = \sqrt{2\pi} a_1^1, \quad K_{II} = -\sqrt{2\pi} a_1^2, \quad T = 4a_2^2, \quad K_{III} = \sqrt{2\pi} a_1^3. \quad (2)$$

Указанные типы нагружения элемента конструкции с трещинами в линейно-упругих материалах, в идеально пластических телах достаточно хорошо изучены [7; 8]. Однако распределение напряжений, деформаций и перемещений вблизи кончика дефекта в условиях смешанного нагружения трещины в нелинейных материалах (для упрочняющихся по степенному закону материалов, для материалов, следующих степенному закону Норгтона теории установившейся ползучести) изучено недостаточно. По всей видимости, в современной научной литературе полностью отсутствуют результаты исследования влияния накопления рассеянных повреждений на направление развития трещин в условиях смешанного нагружения. Существуют различные критерии определения направления развития трещины, например, локальные критерии, основанные на асимптотическом распределении напряжений в окрестности вершины трещины или острого надреза. Поэтому асимптотическое исследование полей у вершины в условиях смешанного нагружения трещины является важной задачей современной нелинейной механики разрушения, и смешанное нагружение элементов конструкций с дефектами является объектом пристального внимания научного сообщества в последнее время и активно исследуется многими российскими и зарубежными механиками [1–8]. Первое обращение к исследованию смешанных форм деформирования, по всей видимости, было

сделано в работах Си [9; 10], где рассмотрены поля напряжений и деформаций вблизи вершины трещины, находящейся под действием растягивающей и сдвиговой нагрузок (т. о. рассматривалось смешанное нагружение, отвечающее трещинам типа I и типа II). Си впервые ввел параметр смешанности нагружения:

$$M^p = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \left| \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sigma_{\theta\theta}(r, \theta = 0)}{\sigma_{r\theta}(r, \theta = 0)} \right|. \quad (3)$$

Параметр смешанности нагружения  $M^p$  принимает нулевое значение  $M^p = 0$  для чистого поперечного сдвига и значение, равное единице  $M^p = 1$ , для нормального отрыва;  $0 < M^p < 1$  для всех промежуточных типов приложенной нагрузки.

В [9] приведены распределения напряжений, деформаций и перемещений у вершины трещины в материале, следующему степенному закону деформационной теории пластичности, для отдельных значений параметра смешанности нагружения в условиях плоской деформации.

Систематическое изложение расчетов угловых распределений напряжений и деформаций у вершины трещины в материале со степенным определяющим законом для различных значений параметра смешанности нагружения приведено в [1], где разработан метод и приведены результаты расчетов упругопластических коэффициентов интенсивности напряжений в полном диапазоне смешанных форм деформирования от нормального отрыва до чистого сдвига, что позволило рассмотреть состояние произвольно ориентированной прямолинейной трещины в виде математического разреза при двухосном нагружении различной интенсивности. На основе выполненных расчетов установлен характер влияния вида смешанных форм нагружения и пластических свойств материала, описываемых показателем деформационного упрочнения. В [11] собраны существенные результаты, полученные для смешанных форм деформирования, к 2003 году.

В настоящей работе предложен численный метод определения всего спектра собственных значений в нелинейной задаче на собственные значения, следующей из проблемы определения напряженно-деформированного состояния в окрестности вершины трещины в условиях смешанного деформирования для материала со степенными определяющими уравнениями (степенной закон деформационной теории пластичности, степенной закон установившейся ползучести). Предлагаемый метод может быть использован для нахождения промежуточно-асимптотического автомодельного представления поля напряжений в связанной (ползучесть – поврежденность) задаче о трещине в условиях смешанного нагружения в материале со степенными определяющими уравнениями теории установившейся ползучести. Следует дополнительно отметить, что класс нелинейных задач на собственные значения, возникающих в нелинейной механике разрушения, представляется важным в связи с необходимостью применения многомасштабных, многоуровневых моделей [12–14], в соответствии с которыми в окрестности вершины трещины необходимо вводить в рассмотрение совокупность областей с доминирующим действием различных асимптотик поля напряжений и проводить процедуру асимптотического сращивания получаемых решений. Аккуратное построение всех промежуточных зон с той или иной асимптотикой и проведение процедуры сращивания требует знания всего спектра собственных значений, и, по всей видимости, эти задачи до сих пор не решены. В литературе известны только две математически полностью реализованные процедуры сращивания: классическое решение Райса для трещины антиплоского сдвига [15] и аналитическое решение задачи о трещине конечной длины в бесконечной пластине [6].

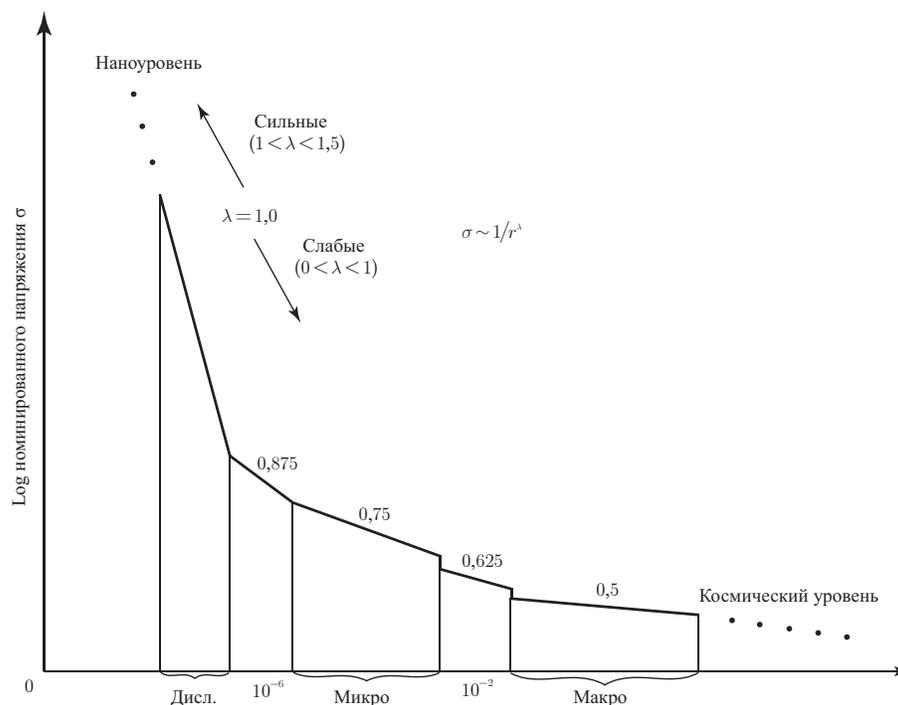


Рис. 1. Порядки сингулярности поля напряжений в окрестности вершины трещины

Для иллюстрации локальной повреждаемости на различных уровнях и отражения многомасштабного характера разрушения может быть использована схема, изображенная на рис. 1 и приведенная впервые в [16]. Как отмечается в [16], развитие концепций мезомеханики предполагает более последовательный подход к решению задач, находящихся в междисциплинарных областях, таких как материаловедение и механика сплошных сред. К таким задачам относятся проблемы усталостного разрушения, ползучести, термическое и механическое взаимодействие. На рис. 1 представлена диаграмма различных сингулярностей напряжений вблизи дефектов большого и маленького размеров – дислокаций, микро- и макродефектов. Приведенный график отражает необходимость введения многоуровневого подхода, предполагающего построение иерархической цепочки областей с различными порядками особенностей поля напряжений вблизи вершины трещины, что с математической точки зрения ведет к определению всего спектра собственных значений, как правило, в нелинейных задачах на собственные значения, получающихся в результате применения метода разделения переменных (или метода разложения по собственным функциям) при анализе полей напряжений, деформаций и перемещений в окрестности вершины трещины.

Определение всего спектра собственных значений нелинейной задачи на собственные значения, что является предметом данной работы, даст возможность правильно описать структуру окрестности вершины трещины в условиях смешанного деформирования и построить конфигурации области полностью поврежденного материала, окружающей вершину трещины.

## 2. Математическая постановка задачи и основные уравнения

Определение напряженно-деформированного состояния у вершины трещины в двумерной постановке задачи в полярной системе координат с полюсом в вершине трещины приводит к необходимости решения системы уравнений равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} = 0 \quad (4)$$

и условия совместности деформаций

$$2 \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varepsilon_{r\theta}}{\partial \theta} \right) = \frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial \theta^2} - r \frac{\partial \varepsilon_{rr}}{\partial r} + r \frac{\partial^2 (r \varepsilon_{\theta\theta})}{\partial r^2} \quad (5)$$

вместе с определяющими уравнениями, задающими степенную связь между деформациями и напряжениями  $\varepsilon_{ij} = 3B\sigma_e^{n-1}s_{ij}/2$ , которые для случая плоского деформированного состояния принимают форму

$$\varepsilon_{rr} = -\varepsilon_{\theta\theta} = 3B\sigma_e^{n-1}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})/4, \quad \varepsilon_{r\theta} = 3B\sigma_e^{n-1}\sigma_{r\theta}/2, \quad (6)$$

где  $\sigma_e = \sqrt{3} \left[ (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 + 4\sigma_{r\theta}^2 \right]^{1/2} / 2$  – интенсивность напряжений для случая плоского деформированного состояния. Граничные условия задачи представляют собой условия отсутствия поверхностных усилий на берегах трещины

$$\sigma_{\theta\theta}(r, \theta = \pm\pi) = 0, \quad \sigma_{r\theta}(r, \theta = \pm\pi) = 0. \quad (7)$$

## 3. Асимптотическое решение задачи и сведение задачи к задаче на собственные значения

Одним из наиболее распространенных методов определения напряженно-деформированного состояния в окрестности вершины трещины является метод разложения по собственным функциям [18; 19], в соответствии с которым асимптотическое представление функции напряжений Эри в окрестности вершины трещины ( $r \rightarrow 0$ ) разыскивается в сепарабельной форме

$$\chi(r, \theta) = Kr^{\lambda+1}f(\theta), \quad (8)$$

и компоненты тензора напряжений в окрестности вершины трещины имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta}(r, \theta) &= Kr^{\lambda-1}(\lambda+1)\lambda f(\theta), \quad \sigma_{rr}(r, \theta) = Kr^{\lambda-1}[(\lambda+1)f(\theta) + f''(\theta)], \\ \sigma_{r\theta}(r, \theta) &= -Kr^{\lambda-1}\lambda f'(\theta). \end{aligned} \quad (9)$$

Асимптотическое представление интенсивности напряжений в окрестности вершины трещины имеет форму:  $\sigma_e(r, \theta) = Kr^{\lambda-1}f_e(\theta)$ , где  $f_e^2 = [f'' + (1 - \lambda^2)f]^2 + 4\lambda^2 f'^2$ . Поэтому компоненты тензора деформаций в окрестности вершины трещины имеют следующую структуру:

$$\varepsilon_{rr} = -\varepsilon_{\theta\theta} = K^n Br^{(\lambda-1)n} \tilde{\varepsilon}_{rr}(\theta), \quad \varepsilon_{r\theta} = K^n Br^{(\lambda-1)n} \tilde{\varepsilon}_{r\theta}(\theta), \quad (10)$$

где  $\tilde{\varepsilon}_{rr}(\theta) = 3f_e^{n-1} [f'' + (1 - \lambda^2)f] / 4$ ,  $\tilde{\varepsilon}_{r\theta}(\theta) = -3f_e^{n-1}\lambda f'(\theta)/2$ .

Подстановка выражений (10) для компонент тензора деформаций в условие совместности (5) позволяет получить нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) четвертого порядка относительно функции  $f(\theta)$ :

$$2[(\lambda - 1)n + 1] \frac{d\tilde{\varepsilon}_{r\theta}}{d\theta} = \frac{d^2\tilde{\varepsilon}_{rr}}{d\theta^2} - (\lambda - 1)n[(\lambda - 1)n + 2]\tilde{\varepsilon}_{rr} \quad (11)$$

или

$$\begin{aligned} & f_e^2 f^{IV} \left\{ (n-1) [(1-\lambda^2)f + f'']^2 + f_e^2 \right\} + (n-1)(n-3) \times \\ & \times \left\{ [(1-\lambda^2)f + f''] [(1-\lambda^2)f' + f'''] + 4\lambda^2 f' f'' \right\}^2 [(1-\lambda^2)f + f''] + \\ & + (n-1) f_e^2 \left\{ [(1-\lambda^2)f' + f''']^2 + [(1-\lambda^2)f + f''] (1-\lambda^2)f'' + \right. \\ & \left. + 4\lambda^2 (f''^2 + f' f''') \right\} [(1-\lambda^2)f + f''] + 2(n-1) f_e^2 \times \\ & \times \left\{ [(1-\lambda^2)f + f''] [(1-\lambda^2)f' + f'''] + 4\lambda^2 f' f'' \right\} [(1-\lambda^2)f' + f'''] + \\ & + C_1(n-1) f_e^2 \left\{ [(1-\lambda^2)f + f''] [(1-\lambda^2)f' + f'''] + 4\lambda^2 f' f'' \right\} f' + \\ & + C_1 f_e^4 f'' - C_2 f_e^4 [(1-\lambda^2)f + f''] + f_e^4 (1-\lambda^2) f'' = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

где приняты обозначения  $C_1 = 4\lambda[(\lambda - 1)n + 1]$ ,  $C_2 = (\lambda - 1)n[(\lambda - 1)n + 2]$ .

Решение нелинейного ОДУ (12) должно удовлетворять краевым условиям, следующим из требования отсутствия поверхностных усилий на берегах трещины (7)

$$f(\theta = \pm\pi) = 0, \quad f'(\theta = \pm\pi) = 0. \quad (13)$$

Таким образом, для уравнения (12), решение которого подчиняется краевым условиям (13), сформулирована нелинейная задача на собственные значения: необходимо найти собственные значения  $\lambda$ , отвечающие нетривиальным решениям уравнения (12), удовлетворяющим краевым условиям (13). При исследовании трещин нормального отрыва и поперечного сдвига для численного решения уравнения (12) прибегают к условиям симметрии или антисимметрии, и уравнение (12) интегрируется на отрезке  $[0, \pi]$  с начальными условиями: для трещины нормального отрыва

$$f(\theta = 0) = 1, \quad f'(\theta = 0) = 0, \quad f''(\theta = 0) = A_2, \quad f'''(\theta = 0) = 0 \quad (14)$$

и для трещины поперечного сдвига

$$f(\theta = 0) = 0, \quad f'(\theta = 0) = 1, \quad f''(\theta = 0) = 0, \quad f'''(\theta = 0) = A_3. \quad (15)$$

Одно собственное значение хорошо известно и соответствует классической задаче Хатчинсона – Райса – Розенгрена (ХРР) [20–22]:  $\lambda = n/(n + 1)$ . Однако в настоящее время при построении многоуровневых моделей разрушения и построения иерархической цепочки областей, окружающих вершину трещины, интерес представляют другие собственные значения, отличные от собственных чисел, отвечающих задаче ХРР [12; 13; 18; 19; 23; 24]. Для численного отыскания всего спектра собственных значений может быть использован один из методов семейства методов Рунге – Кутты – Фельберга и метод пристрелки. Процедура предполагает подбор двух величин – собственного значения  $\lambda$  и значения производной второго

порядка  $f''(0) = A_2$  в случае трещины нормального отрыва и производной третьего порядка  $f'''(0) = A_3$  для трещины поперечного сдвига – таким образом, чтобы выполнялись краевые условия на верхнем берегу трещины (при  $\theta = \pi$ ). Описанный подход был реализован в [12; 13], где были найдены собственные значения, отличные от собственных значений  $\lambda = n/(n+1)$  для трещин типа I и II.

#### 4. Численное решение нелинейной задачи на собственные значения

В случае смешанного деформирования соображения симметрии и антисимметрии использованы быть не могут, и необходимо искать решение уравнения (12) на отрезке  $[-\pi, \pi]$ . В условиях смешанного нагружения при численном решении уравнения (12) отрезок интегрирования  $[-\pi, \pi]$  можно разбить на два отрезка:  $[-\pi, 0]$  и  $[0, \pi]$ . Сначала уравнение (12) интегрируется на отрезке  $[0, \pi]$ , и краевая задача сводится к задаче Коши с начальными условиями

$$\begin{aligned} f(\theta = 0) = 1, \quad f'(\theta = 0) = -(\lambda + 1)/\operatorname{tg}(M^p\pi/2), \\ f''(\theta = 0) = A_2, \quad f'''(\theta = 0) = A_3. \end{aligned} \quad (16)$$

Значение производной первого порядка находится из заданного вида смешанного нагружения (значение параметра смешанности нагружения (3), задающего вид нагружения, известно). Неизвестные постоянные  $A_2$  и  $A_3$  определяются таким образом, чтобы выполнялись краевые условия на верхнем берегу трещины:

$$f(\theta = \pi) = 0, \quad f'(\theta = \pi) = 0. \quad (17)$$

После того как подобраны постоянные  $A_2$  и  $A_3$ , уравнение (12) интегрируется на отрезке  $[-\pi, 0]$ , для чего двухточечная краевая задача для уравнения (12) с граничными условиями

$$\begin{aligned} f(\theta = -\pi) = 0, \quad f'(\theta = -\pi) = 0, \\ f(\theta = 0) = 1, \quad f'(\theta = 0) = -(\lambda + 1)/\operatorname{tg}(M^p\pi/2) \end{aligned} \quad (18)$$

заменяется задачей Коши с начальными условиями

$$f(\theta = -\pi) = 0, \quad f'(\theta = -\pi) = 0, \quad f''(-\pi) = B_2, \quad f'''(\theta = -\pi) = B_3. \quad (19)$$

Неизвестные постоянные  $B_2$  и  $B_3$  подбираются таким образом, чтобы выполнялись условия равновесия элемента, расположенного на луче  $\theta = 0$ . Уравнения равновесия данного элемента требуют непрерывности компонент тензора напряжений  $\sigma_{\theta\theta}$  и  $\sigma_{r\theta}$  на луче  $\theta = 0$ , что влечет за собой непрерывность функций  $f(\theta)$  и  $f'(\theta)$  при  $\theta = 0$  (и, следовательно, краевые условия (18)). Поэтому две неизвестные постоянные  $B_2$  и  $B_3$  определяются таким образом, чтобы решение, разыскиваемое на отрезке  $[-\pi, 0]$ , удовлетворяло бы краевым условиям при  $\theta = 0$ .

Угловые распределения компонент тензора напряжений, найденные в результате применения описанного подхода для различных значений показателя упругости, показаны на рис. 2–4. Следует отметить, что перед построением численного решения и угловых распределений напряжений (угловые распределения компонент тензора напряжений в окрестности вершины трещины для различных значений параметра смешанности нагружения для  $n = 5$  показаны на рис. 2, 4; угловые

распределения компонент тензора напряжений в окрестности вершины трещины для различных значений параметра смешанности нагружения для  $n = 10$  показаны на рис. 3, 4) априори предполагалось, что  $\lambda = n/(n+1)$ , т. е. собственное значение известно и совпадает с собственным значением задачи ХРР.

Если необходимо найти другие собственные значения задачи, отличные от  $\lambda = n/(n+1)$ , и в целом весь спектр собственных значений, то возникает вопрос: какие дополнительные физические или математические соображения должны быть привлечены для отыскания всего спектра собственных значений. Если считать, что  $\lambda$  – искомая величина, то при интегрировании уравнения (12) имеется три неизвестных параметра  $\lambda$ ,  $A_2$  и  $A_3$  и только два условия (17), из которых они могут быть определены. Очевидно, что для отыскания собственного значения  $\lambda$  необходимо дополнительное условие. С целью определения всего спектра собственных значений  $\lambda$  можно проанализировать поведение радиальной компоненты тензора напряжений  $\sigma_{rr}$  и из рис. 4 увидеть, что радиальная компонента тензора напряжений является непрерывной функцией полярного угла для всех значений параметра смешанности нагружения и показателя упрочнения материала, тогда как при построении решения непрерывность этой компоненты не требовалась (т. е. до реализации процедуры построения численного решения было выбрано  $\lambda = n/(n+1)$  и компонента  $\sigma_{rr}$  (рис. 4) оказалась непрерывной для всех значений параметра смешанности нагружения и показателя нелинейности материала). В связи с этим при отыскании собственных значений, отличных от собственных чисел задачи ХРР, следует потребовать непрерывность радиальной компоненты тензора напряжений при  $\theta = 0$ . Поэтому далее при построении новых собственных значений накладывалось дополнительное условие – требование непрерывности компоненты тензора напряжений  $\sigma_{rr}$  при  $\theta = 0$ . Результаты вычислений приведены в табл. 1–5, где собраны новые значения  $\lambda$  и пристрелочные значения  $f''(0)$ ,  $f'''(0)$ ,  $f''(-\pi)$  и  $f'''(-\pi)$  для всех значений параметра смешанности нагружения и практически важных значений показателя нелинейности материала  $n$ . Угловые распределения компонент тензора напряжений и деформаций ползучести для новых вычисленных собственных значений для всех значений параметра смешанности нагружения представлены на рис. 5, 6.

Таблица 1

**Собственные значения для различных значений параметра смешанности нагружения ( $n = 2$ )**

$M^p$	$\lambda$	$f''(0)$	$f'''(0)$	$f''(-\pi)$	$f'''(-\pi)$
$M^p = 0.05$	-0.277383	0.212914	13.17290	11.12380	-5.00594
$M^p = 0.1$	-0.275935	0.162144	5.700720	5.91865	-2.618340
$M^p = 0.2$	-0.272740	0.051311	2.229110	3.30480	-1.423600
$M^p = 0.3$	-0.271672	-0.031622	1.164410	2.43193	-1.03065
$M^p = 0.4$	-0.274875	-0.081945	0.633297	2.00617	-0.846276
$M^p = 0.5$	-0.282565	-0.097775	0.293679	1.75326	-0.743140
$M^p = 0.6$	-0.290857	-0.074799	0.044030	1.56252	-0.663002
$M^p = 0.7$	-0.302004	-0.028899	-0.168206	1.41890	-0.602043
$M^p = 0.8$	-0.306883	-0.016024	-0.338521	1.26416	-0.527263
$M^p = 0.9$	-0.309309	-0.010655	-0.492138	1.11000	-0.447280
$M^p = 0.95$	-0.309875	-0.009488	-0.566444	1.03179	-0.404607

Таблица 2

Собственные значения для различных значений параметра смешанности нагружения ( $n = 3$ )

$M^p$	$\lambda$	$f''(0)$	$f'''(0)$	$f''(-\pi)$	$f'''(-\pi)$
$M^p = 0.05$	-0.2620259	1.715020	9.241630	14.3370	-10.95920
$M^p = 0.1$	-0.250783	1.208650	3.922910	7.771991	-5.880720
$M^p = 0.2$	-0.2350409	0.689215	1.490620	4.425133	-3.300030
$M^p = 0.3$	-0.227669	0.427800	0.694287	3.291540	-2.437720
$M^p = 0.4$	-0.2226759	0.283135	0.270648	2.720220	-2.012810
$M^p = 0.5$	-0.2305125	0.221522	-0.026934	2.363551	-1.754966
$M^p = 0.6$	-0.224064	0.242293	-0.295340	2.142481	-1.605673
$M^p = 0.7$	-0.248870	0.237327	-0.499586	1.933300	-1.459421
$M^p = 0.8$	-0.256052	0.231799	-0.676516	1.736700	-1.319388
$M^p = 0.9$	-0.260520	0.229168	-0.840622	1.547066	-1.179299
$M^p = 0.95$	-0.261580	0.228567	-0.920801	1.452840	-1.107937

Таблица 3

Собственные значения для различных значений параметра смешанности нагружения ( $n = 4$ )

$M^p$	$\lambda$	$f''(0)$	$f'''(0)$	$f''(-\pi)$	$f'''(-\pi)$
$M^p = 0.05$	-0.249125	2.587723	7.980687	16.155590	-14.498
$M^p = 0.1$	-0.233549	1.719647	3.3712810	8.7395293	-7.7396
$M^p = 0.2$	-0.215000	0.978250	1.1788467	5.0028869	-4.3600
$M^p = 0.3$	-0.206711	0.635351	0.4547028	3.6870311	-3.1900
$M^p = 0.4$	-0.204499	0.450211	0.0652619	3.0645543	-2.6462
$M^p = 0.5$	-0.206815	0.376605	-0.226999	2.655462	-2.2977
$M^p = 0.6$	-0.214375	0.381905	-0.4960030	2.395667	-2.0866
$M^p = 0.7$	-0.220462	0.359169	-0.6931969	2.1497512	-1.8824
$M^p = 0.8$	-0.227500	0.341902	-0.8681769	1.9282333	-1.6987
$M^p = 0.9$	-0.234528	0.335559	-1.038674	1.7230207	-1.5271
$M^p = 0.95$	-0.236000	0.333577	-1.121558	1.6174351	-1.4353

Таблица 4

Собственные значения для различных значений параметра смешанности нагружения ( $n = 5$ )

$M^p$	$\lambda$	$f''(0)$	$f'''(0)$	$f''(-\pi)$	$f'''(-\pi)$
$M^p = 0.05$	-0.237872	3.080269	7.474145	17.168290	-16.59101
$M^p = 0.1$	-0.221158	2.007918	3.081809	9.286569	-8.84890
$M^p = 0.2$	-0.202342	1.142387	0.988910	5.316140	-4.98511
$M^p = 0.3$	-0.194812	0.753230	0.302029	3.972174	-3.70051
$M^p = 0.4$	-0.192320	0.546480	-0.068735	3.263461	-3.03392
$M^p = 0.5$	-0.194290	0.472467	-0.364145	2.830609	-2.63612
$M^p = 0.6$	-0.200055	0.463181	-0.626727	2.539084	-2.37534
$M^p = 0.7$	-0.204759	0.430847	-0.818362	2.269456	-2.13255
$M^p = 0.8$	-0.210625	0.405497	-0.988799	2.029076	-1.91625
$M^p = 0.9$	-0.218248	0.394459	-1.159518	1.811569	-1.72195
$M^p = 0.95$	-0.221500	0.394789	-1.248002	1.707946	-1.62792

Таблица 5

Собственные значения для различных значений параметра смешанности нагружения ( $n = 6$ )

$M^P$	$\lambda$	$f''(0)$	$f'''(0)$	$f''(-\pi)$	$f'''(-\pi)$
$M^P = 0.1$	-0.212455	2.1903296	2.8944113	9.633254	-9.57751
$M^P = 0.2$	-0.190112	1.0242387	0.9510237	5.556210	-5.18488
$M^P = 0.3$	-0.186912	0.7953230	0.2920235	3.997423	-3.92455
$M^P = 0.4$	-0.184120	0.5916482	-0.064735	3.643461	-3.24674
$M^P = 0.5$	-0.189290	0.5325467	-0.324145	2.910611	-2.67612
$M^P = 0.6$	-0.191251	0.5164002	-0.717632	2.69296290	-2.56788
$M^P = 0.7$	-0.195100	0.4781327	-0.905221	2.23463164	-2.29870
$M^P = 0.8$	-0.200081	0.4475003	-1.071907	2.0928403	-2.059081
$M^P = 0.9$	-0.207204	0.4315791	-1.239828	1.8631670	-1.84427

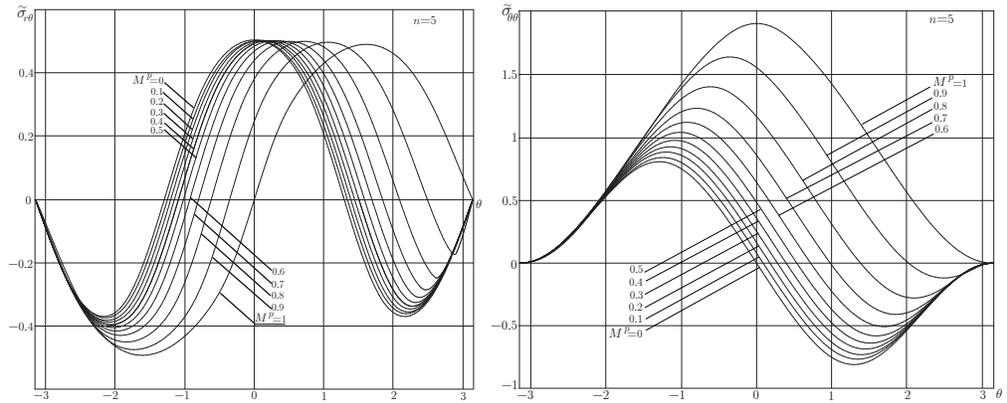


Рис. 2. Угловые распределения компонент тензора напряжений  $\sigma_{r\theta}$  и  $\sigma_{\theta\theta}$  для  $n = 5$

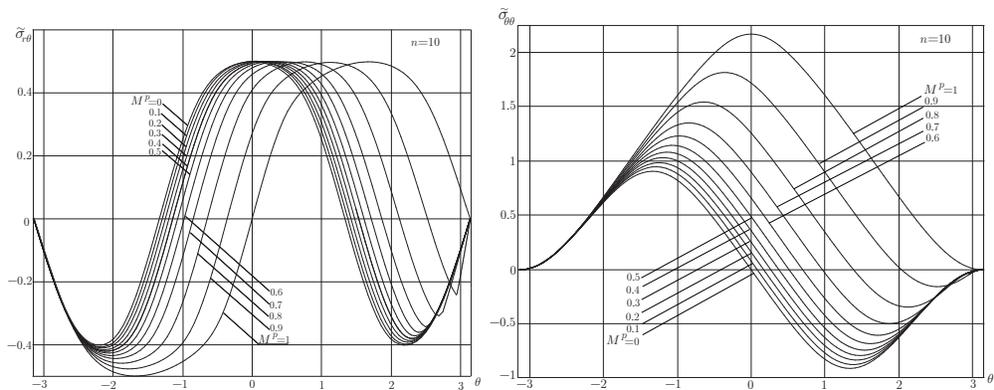


Рис. 3. Угловые распределения компонент тензора напряжений  $\sigma_{r\theta}$  и  $\sigma_{\theta\theta}$  для  $n = 10$

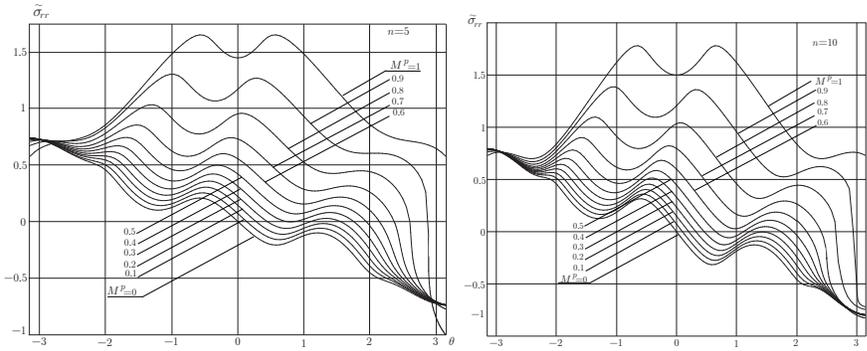


Рис. 4. Угловые распределения компонент тензора напряжений  $\sigma_{rr}$  для  $n = 5$  и  $n = 10$

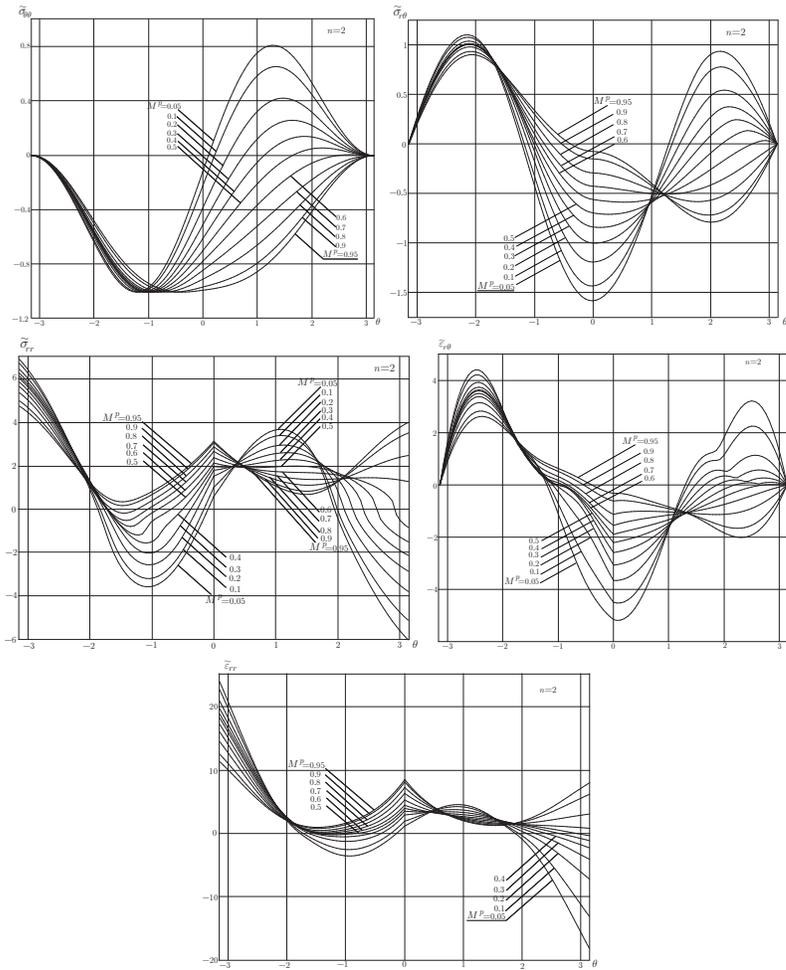


Рис. 5. Угловые распределения компонент напряжений и скоростей деформаций ползучести для  $n = 2$  и различных значений параметра смешанности нагружения

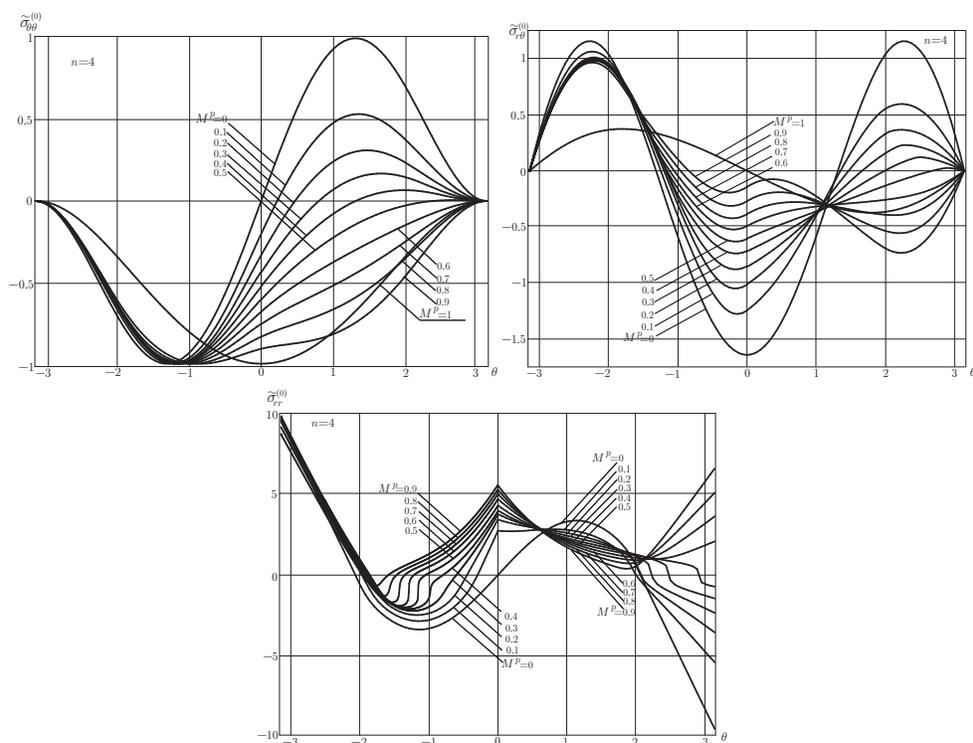


Рис. 6. Угловые распределения компонент напряжений для  $n = 4$  и различных значений параметра смешанности нагружения

## Выводы

В статье предложена процедура численного отыскания всего спектра собственных значений в нелинейной задаче на собственные значения, следующей из проблемы определения напряженно-деформированного состояния у вершины трещины в материале со степенными определяющими уравнениями в условиях смешанного деформирования в полном диапазоне смешанных форм деформирования от чистого сдвига до нормального отрыва. С помощью предложенного метода найдены собственные значения, отличные от собственных значений, отвечающих задаче ХРР.

Полученные новые собственные значения могут быть использованы для построения многомасштабного, многоуровневого описания процессов разрушения в окрестности вершины трещины. Экспериментаторами [17; 26] установлено наличие взаимосвязанных разномасштабных промежуточных уровней деформаций внутри твердого тела. Структурные исследования проводились методами оптической, электронной растровой микроскопии и лазерной профилометрии, с помощью чего выявлен механизм "разрыхления" материала в вершине трещины. Численный анализ, выполненный в настоящей работе, позволяет оценить асимптотику механических полей у вершины трещины, на расстояниях, сопоставимых с зоной разрыхления (с областью диспергированного материала).

## Литература

- [1] Шлянников В.Н., Кислова С.Ю. Параметры смешанных форм деформирования для трещины в виде математического разреза // Известия Саратовского университета. Сер.: Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9. Вып. 1. С. 77–84.
- [2] Шлянников В.Н., Туманов А.В. Упругие параметры смешанных форм деформирования полуэллиптической трещины при двухосном нагружении // Известия Саратовского университета. Сер.: Математика. Механика. Информатика. 2010. Т. 10. Вып. 2. С. 73–80.
- [3] Степанова Л.В., Элекина Т.Б. Смешанное нагружение (нормальный отрыв и поперечный сдвиг) элемента конструкции с трещиной в материале с дробно-линейным законом ползучести // Вестник СамГУ. 2009. № 2(68). С. 123–139.
- [4] Пестриков В.М., Морозов Е.М. Механика разрушения. СПб.: Профессия, 2012.
- [5] Бьюи Х.Д. Механика разрушения: Обратные задачи и решения. М.: Физматлит, 2011. 412 с.
- [6] Hello G., Tahar M.B., Roelandt J.M. Analytical determination of coefficients in crack-tip stress expansions for a finite crack in an infinite plane medium // Int. J. of Solids and Structures. 2012. V. 49. P. 556–566.
- [7] Pan J., Lin P.C. Analytical solutions for crack-tip sectors in perfectly plastic Mises materials under mixed in-plane and out-of-plane shear loading conditions // Engng. Fracture Mechanics. 2006. V. 73. P. 1797–1813.
- [8] Rahman M., Hancock J.W. Elastic perfectly-plastic asymptotic mixed mode crack tip fields in plane stress // Int. J. Solids and Structures. 2006. V. 43. P. 3692–3704.
- [9] Shih C.F. Elastic-plastic analysis of combined mode crack problems // Ph. D. Thesis, Harvard University, Cambridge, M.A. 1973.
- [10] Shih C.F. Small scale yielding analysis of mixed mode plane-strain crack problems // Fracture Analysis ASTM STP 560. 1974. P. 187–210.
- [11] Shlyannikov V.N. Elastic-Plastic Mixed-Mode Fracture Criteria and Parameters. Berlin: Springer, 2003.
- [12] Степанова Л.В. О собственных значениях в задаче о трещине антиплоского сдвига в материале со степенными определяющими уравнениями // Журнал прикл. механики и техн. физики. 2008. Т. 49. № 1. С. 173–180.
- [13] Степанова Л.В. Анализ собственных значений в задаче о трещине в материале со степенным определяющим законом // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2009. № 8. С. 1332–1347.
- [14] Адылина Е.М., Степанова Л.В. О построении многомасштабных моделей неупругого разрушения // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2012. № 9(100). С. 70–83.
- [15] Rice J.R. Mathematical analysis in mechanics of fracture. Fracture. V. 2, Ed. H. Liebowitz. New York: Academic Press, 1968. P. 191–311.
- [16] Си Дж. Мезомеханика, понятие сегментации и мультискейлинговый подход: нано-микро-макро // Физическая мезомеханика. 2008. Т. 11. № 3. С. 5–18.
- [17] Елсукова Т.Ф., Панин В.Е., Ваулина О.Ю. Масштабно-структурные уровни знакопеременной интенсивной пластической деформации и усталостного разрушения поликристаллов: тезисы докладов Международной конференции по физической мезомеханике, компьютерному конструированию и разработке новых материалов, 7–11 сентября 2009 г., Томск, Россия. Томск: ИФПМ СО РАН, 2009. С. 64–65.

- [18] Астафьев В.И., Степанова Л.В. Асимптотика дальнего поля напряжений в задаче о росте трещины в условиях ползучести в среде с поврежденностью // Изв. РАН. Сер.: Механика твердого тела. 2005. № 2. С. 145–154.
- [19] Степанова Л.В., Федина М.Е. Автомодельное решение задачи о трещине отрыва в связанной постановке // Прикладная математика и механика. 2008. Т. 72. Вып. 3. С. 516–527.
- [20] Hutchinson J.W. Singular behaviour at the end of tensile crack in a hardening material // J. Mech. Phys. Solids. 1968. V. 16. № 1. P. 13–31.
- [21] Rice J.R., Rosengren G.F. Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material // J. Mech. Phys. Solids. 1968. V. 16. № 1. P. 1–12.
- [22] Hutchinson J.W. Plastic stress and strain fields at a crack tip // J. Mech. Phys. Solids. 1968. V. 16. № 5. P. 337–347.
- [23] Аддылина Е.М., Игонин С.А., Степанова Л.В. О нелинейной задаче на собственные значения, следующей из анализа напряжений у вершины усталостной трещины // Вестник Самарского государственного университета. 2012. № 3/1(94). С. 83–102.
- [24] Степанова Л.В., Федина М.Е. Асимптотика дальнего поля напряжений в задаче о росте трещины в условиях ползучести в среде с поврежденностью // Прикладная механика и техническая физика. 2005. № 4. С. 133–145.
- [25] Баренблатт Г.И. Автомодельные явления – анализ размерностей и скейлинг. Долгопрудный: Издательский дом "Интеллект", 2009.
- [26] Елсукова Т.Ф., Попкова Ю.Ф., Ваулина О.Ю. Исследование механизмов пластической деформации на мезоуровне в вершине усталостной трещины при знакопеременном изгибе: тезисы докладов Международной конференции по физической мезомеханике, компьютерному конструированию и разработке новых материалов, 7–11 сентября 2009 г., Томск, Россия. Томск: ИФПМ СО РАН, 2009. С. 65–66.

Поступила в редакцию 22/IV/2013;  
в окончательном варианте — 22/VI/2013.

NUMERICAL METHOD OF CONSTRUCTION OF EIGEN  
VALUE SPECTRUM OF A NON LINEAR PROBLEM  
ARISING FROM ONE PROBLEM  
OF MIXED DEFORMATION OF PLATE WITH CRACK

© 2013 E.M. Adylina<sup>3</sup>

In the work a method of numerical finding of eigen values of class of non linear problems on eigen values arising from the problem of defining stressedly-deformed state near the apex of crack in the materials with exponential determining equations in conditions of compound deforming in full range of mixed forms of deformation from normal fracture up to simple shear is suggested. With the help of suggested approach new eigen values of the problem, different from the known eigen value, that corresponds to the classical solution of Hutchison-Rice-Rosengren are obtained.

**Key words:** stressedly-deformed state near the apex of crack, exponential defining law, mixed deformation, decomposition technique on eigen functions, non linear eigen value problem.

Paper received 22/IV/2013.

Paper accepted 22/IV/2013.

---

<sup>3</sup>Adylina Ekaterina Mihailovna ([adylinaem@samsu.ru](mailto:adylinaem@samsu.ru)), the Dept. of Mathematical Modelling in Mechanics, Samara State University, Samara, 443011, Russian Federation.