УДК 517.956

О ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

© 2013 Е.А. Созонтова[1]

В работе исследованы характеристические задачи для системы гиперболического типа с тремя независимыми переменными. С помощью метода Римана и теории интегральных уравнений получены условия однозначной разрешимости поставленных задач.

Ключевые слова: гиперболическая система, метод Римана, характеристическая задача.

Рассмотрим в области $G = \{x_0 < x < x_1,\ y_0 < y < y_1,\ z_0 < z < z_1\}$ систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} U_{xy} + A_1U_x + B_1U_y + C_1U + D_1V + E_1W = F_1, \\ V_{yz} + A_2V_y + B_2V_z + C_2V + D_2U + E_2W = F_2, \\ W_{xz} + A_3W_z + B_3W_x + C_3W + D_3U + E_3V = F_3, \end{cases} \tag{1}$$

где $A_i,\ B_i,\ C_i,\ D_i,\ E_i,\ F_i$ являются функциями переменных $x,\ y,\ z$, причем $A_i,\ B_i \in C^1,\ C_i,\ D_i,\ E_i,\ F_i \in C\ \ (i = \overline{1,3})$.

Данная система является одним из частных случаев систем с доминирующими частными производными, изучению которых посвящены статьи [1–5]. В настоящей статье доказаны существование и единственность решения задачи, являющейся аналогом задачи Гурса [1; 2] для системы уравнений (1), а также получены условия однозначной разрешимости характеристических задач с граничными условиями на четырех, пяти и шести гранях характеристического параллелепипеда. Отметим, что задачи для гиперболических уравнений с доминирующей частной производной с условиями на всех характеристиках рассмотрены в работах [6; 7]. В статье [3] подобные задачи рассмотрены для гиперболической системы с кратными доминирующими производными, где были получены достаточные условия на коэффициенты системы типа тождеств и неравенств, обеспечивающие существование и единственность решения. Как будет показано ниже, подобные условия для системы (1) не требуются.

Преобразуем уравнения системы (1) к виду

$$\begin{gathered} (U_y + A_1U)_x + B_1(U_y + A_1U) + (C_1 - A_1B_1 - A_{1x})U + D_1V + E_1W = F_1, \\ (V_z + A_2V)_y + B_2(V_z + A_2V) + (C_2 - A_2B_2 - A_{2y})V + D_2U + E_2W = F_2, \\ (W_x + A_3W)_z + B_3(W_x + A_3W) + (C_3 - A_3B_3 - A_{3z})W + D_3U + E_3V = F_3. \end{gathered}$$

[1]Созонтова Елена Александровна (sozontova-elena@rambler.ru), кафедра математического анализа, алгебры и геометрии Елабужского института Казанского (Приволжского) федерального университета, 423600, Российская Федерация, г. Елабуга, ул. Казанская, 89.

Введем обозначения

$$U_y + A_1U = U_1,\ \ A_{1x} + A_1B_1 - C_1 = H_1,$$
$$V_z + A_2V = V_1,\ \ A_{2y} + A_2B_2 - C_2 = H_2,$$
$$W_x + A_3W = W_1,\ \ A_{3z} + A_3B_3 - C_3 = H_3,$$

которые позволяют записать систему (1) в виде

$$\begin{cases} W_x + A_3W = W_1, \\ U_{1x} + B_1U_1 - H_1U + D_1V + E_1W = F_1, \\ U_y + A_1U = U_1, \\ V_{1y} + B_2V_1 - H_2V + D_2U + E_2W = F_2, \\ V_z + A_2V = V_1, \\ W_{1z} + B_3W_1 - H_3W + D_3U + E_3V = F_3. \end{cases} \tag{2}$$

Далее с помощью подстановок

$$U = u\exp(-\int\limits_{y_0}^{y} A_1(x,t,z)dt), \qquad U_1 = u_1\exp(-\int\limits_{x_0}^{x} B_1(t,y,z)dt),$$
$$V = v\exp(-\int\limits_{z_0}^{z} A_2(x,y,t)dt), \qquad V_1 = v_1\exp(-\int\limits_{y_0}^{y} B_2(x,t,z)dt),$$
$$W = w\exp(-\int\limits_{x_0}^{x} A_3(t,y,z)dt), \qquad W_1 = w_1\exp(-\int\limits_{z_0}^{z} B_3(x,y,t)dt)$$

система (2) приводится к виду

$$\begin{cases} w_x = s_1w_1, \\ u_{1x} = a_1u + b_1v + c_1w + f_1, \\ u_y = s_2u_1, \\ v_{1y} = a_2u + b_2v + c_2w + f_2, \\ v_z = s_3v_1, \\ w_{1z} = a_3u + b_3v + c_3v + f_3, \end{cases} \tag{3}$$

где

$$s_1 = \exp(\int\limits_{x_0}^{x} A_3(t,y,z)dt - \int\limits_{z_0}^{z} B_3(x,y,t)dt),\ \ a_1 = H_1\exp(\int\limits_{x_0}^{x} B_1(t,y,z)dt - \int\limits_{y_0}^{y} A_1(x,t,z)dt),$$
$$b_1 = -D_1\exp(\int\limits_{x_0}^{x} B_1(t,y,z)dt - \int\limits_{z_0}^{z} A_2(x,y,t)dt),$$
$$c_1 = -E_1\exp(\int\limits_{x_0}^{x} (B_1 - A_3)(t,y,z)dt),\ \ f_1 = F_1\exp(\int\limits_{x_0}^{x} B_1(t,y,z)dt).$$

Остальные переменные коэффициенты определяются аналогичным образом.

Задача 1. Найти в области G регулярное решение системы (3), удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned} u(x,y_0,z) &= \varphi_1(x,z), & u_1(x_0,y,z) &= \psi_1(y,z), \\ v(x,y,z_0) &= \varphi_2(x,y), & v_1(x,y_0,z) &= \psi_2(x,z), \\ w(x_0,y,z) &= \varphi_3(y,z), & w_1(x,y,z_0) &= \psi_3(x,y), \end{aligned} \tag{4}$$

где $\varphi_3,\ \psi_1 \in C^1(\overline{X}),\ \varphi_1,\ \psi_2 \in C^1(\overline{Y}),\ \varphi_2,\ \psi_3 \in C^1(\overline{Z})$ ($X,\ Y,\ Z$ – грани характеристического параллелепипеда G $x = x_0,\ y = y_0,\ z = z_0$ соответственно).

Докажем существование и единственность решения задачи 1. Проинтегрируем первое и второе уравнения системы (3) в пределах от x_0 до x, третье и четвертое — в пределах от y_0 до y, пятое и шестое — в пределах от z_0 до z. Получим систему интегральных уравнений

$$\begin{cases} w(x,y,z) = \varphi_3(y,z) + \int\limits_{x_0}^{x} (s_1 w_1)(\alpha,y,z)d\alpha, \\ u_1(x,y,z) = \psi_1(y,z) + \int\limits_{x_0}^{x} (a_1 u + b_1 v + c_1 w + f_1)(\alpha,y,z)d\alpha, \\ u(x,y,z) = \varphi_1(x,z) + \int\limits_{y_0}^{y} (s_2 u_1)(x,\beta,z)d\beta, \\ v_1(x,y,z) = \psi_2(x,z) + \int\limits_{y_0}^{y} (a_2 u + b_2 v + c_2 w + f_2)(x,\beta,z)d\beta, \\ v(x,y,z) = \varphi_2(x,y) + \int\limits_{z_0}^{z} (s_3 v_1)(x,y,\gamma)d\gamma, \\ w_1(x,y,z) = \psi_3(x,y) + \int\limits_{z_0}^{z} (a_3 u + b_3 v + c_3 v + f_3)(x,y,\gamma)d\gamma. \end{cases} \tag{5}$$

Решение системы (5) существует и единственно в классе непрерывных функций [8, с. 59]. Таким образом, справедливо утверждение

Теорема 1. Если в замыкании области G выполняются включения $s_1,\ s_2,\ s_3 \in C^1(\overline{G}),\ a_i,\ b_i,\ c_i,\ f_i \in C(\overline{G})$ $(i = \overline{1,3})$, то решение задачи 1 существует и единственно.

Для дальнейшего изложения нам потребуются формулы решения задачи 1, записанные в терминах матрицы Римана [1].

Запишем систему (3) в векторно-матричной форме

$$L_1(U) = F,\ \ L_1(U) = AU_x + BU_y + CU_z - DU,$$

где

$$U = \begin{matrix} w \\ u_1 \\ u \\ v_1 \\ v \\ w_1 \end{matrix},\ \ F = \begin{matrix} 0 \\ f_1 \\ 0 \\ f_2 \\ 0 \\ f_3 \end{matrix},$$

$$A = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix},\ \ B = \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix},$$

$$C = \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix},\ \ D = \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_1 \\ c_1 & 0 & a_1 & 0 & b_1 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & 0 & a_2 & 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_3 & 0 & 0 \\ c_3 & 0 & a_3 & 0 & b_3 & 0 \end{matrix}.$$

Введем матрицу Римана $R = \text{colon}\ (R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6)$, где векторы $R_i(x,y,z,\xi,\eta,\zeta) = (r_{i1}, r_{i2}, r_{i3}, r_{i4}, r_{i5}, r_{i6})$ $(i = \overline{1,\ 6})$ являются решениями систем уравнений

$$\begin{cases} r_{i1}(x,y,z,\xi,\eta,\zeta) = \delta_{i1} - \int\limits_{\xi}^{x} (c_1 r_{i2} + c_2 r_{i4} + c_3 r_{i6})(\alpha,y,z,\xi,\eta,\zeta)d\alpha, \\ r_{i2}(x,y,z,\xi,\eta,\zeta) = \delta_{i2} - \int\limits_{\xi}^{x} (s_2 r_{i3})(\alpha,y,z,\xi,\eta,\zeta)d\alpha, \\ r_{i3}(x,y,z,\xi,\eta,\zeta) = \delta_{i3} - \int\limits_{\eta}^{y} (a_1 r_{i2} + a_2 r_{i4} + a_3 r_{i6})(x,\beta,z,\xi,\eta,\zeta)d\beta, \\ r_{i4}(x,y,z,\xi,\eta,\zeta) = \delta_{i4} - \int\limits_{\eta}^{y} (s_3 r_{i5})(\beta,y,z,\xi,\eta,\zeta)d\beta, \\ r_{i5}(x,y,z,\xi,\eta,\zeta) = \delta_{i5} - \int\limits_{\zeta}^{z} (b_1 r_{i2} + b_2 r_{i4} + b_3 r_{i6})(x,y,\gamma,\xi,\eta,\zeta)d\gamma, \\ r_{i6}(x,y,z,\xi,\eta,\zeta) = \delta_{i6} - \int\limits_{\zeta}^{z} (s_1 r_{i1})(x,y,\gamma,\xi,\eta,\zeta)d\gamma, \end{cases} \tag{6}$$

где δ_{ij} — символ Кронекера. Матрица R по первым трем аргументам удовлетворяет системе

$$L^*(V) = 0, \ \ L^*(V) = -AV_x - BV_y - CV_z - DV$$

и имеет место тождество

$$RL(U) = (RAU)_x + (RBU)_y + (RCU)_z. \tag{7}$$

Распишем первую строку в (7)

$$r_{12}f_1 + r_{14}f_2 + r_{16}f_3 = (r_{11}w + r_{12}u_1)_x + (r_{13}u + r_{14}v_1)_y + (r_{15}v + r_{16}w_1)_z.$$

Интегрируя данное соотношение по области $G_1 = \{x_0 < x < \xi, \ y_0 < y < \eta, \ z_0 < z < \zeta\}$ и учитывая, что

$$\begin{array}{ll} r_{11}(\xi,\beta,\gamma,\xi,\eta,\zeta) \equiv 1, & r_{12}(\xi,\beta,\gamma,\xi,\eta,\zeta) \equiv 0, \\ r_{13}(\alpha,\eta,\gamma,\xi,\eta,\zeta) \equiv 0, & r_{14}(\alpha,\eta,\gamma,\xi,\eta,\zeta) \equiv 0, \\ r_{15}(\alpha,\beta,\zeta,\xi,\eta,\zeta) \equiv 0, & r_{16}(\alpha,\beta,\zeta,\xi,\eta,\zeta) \equiv 0, \end{array}$$

получим следующее интегральное уравнение

$$\begin{gathered} \int\limits_{y_0}^{\eta}\int\limits_{z_0}^{\zeta} w(\xi,\beta,\gamma)d\beta d\gamma = \int\limits_{y_0}^{\eta}\int\limits_{z_0}^{\zeta} (r_{11}w + r_{12}u_1)(x_0,\beta,\gamma,\xi,\eta,\zeta)d\beta d\gamma + \\ + \int\limits_{x_0}^{\xi}\int\limits_{z_0}^{\zeta} (r_{13}u + r_{14}v_1)(\alpha,y_0,\gamma,\xi,\eta,\zeta)d\alpha d\gamma + \int\limits_{x_0}^{\xi}\int\limits_{y_0}^{\eta} (r_{15}v + r_{16}w_1)(\alpha,\beta,z_0,\xi,\eta,\zeta)d\alpha d\beta + \\ + \int\limits_{x_0}^{\xi}\int\limits_{y_0}^{\eta}\int\limits_{z_0}^{\zeta} (r_{12}f_1 + r_{14}f_2 + r_{16}f_3)(\alpha,\beta,\gamma,\xi,\eta,\zeta)d\alpha d\beta d\gamma. \end{gathered} \tag{8}$$

Продифференцируем соотношение (8) по переменной η. Учитывая, что $r_{12}(\alpha,\eta,\gamma,\xi,\eta,\zeta) \equiv 0, \ \ r_{14}(\alpha,\eta,\gamma,\xi,\eta,\zeta) \equiv 0,$ получим

$$\begin{gathered} \int\limits_{z_0}^{\zeta} w(\xi,\eta,\gamma)d\gamma = \int\limits_{z_0}^{\zeta} (r_{11}w)(x_0,\eta,\gamma,\xi,\eta,\zeta)d\gamma + \\ + \int\limits_{y_0}^{\eta}\int\limits_{z_0}^{\zeta} (r_{11\eta}w + r_{12\eta}u_1)(x_0,\beta,\gamma,\xi,\eta,\zeta)d\beta d\gamma + \int\limits_{x_0}^{\xi}\int\limits_{z_0}^{\zeta} (r_{13\eta}u + r_{14\eta}v_1)(\alpha,y_0,\gamma,\xi,\eta,\zeta)d\alpha d\gamma + \\ + \int\limits_{x_0}^{\xi} (r_{15}v + r_{16}w_1)(\alpha,\eta,z_0,\xi,\eta,\zeta)d\alpha + \int\limits_{x_0}^{\xi}\int\limits_{y_0}^{\eta} (r_{15\eta}v + r_{16\eta}w_1)(\alpha,\beta,z_0,\xi,\eta,\zeta)d\alpha d\beta + \\ + \int\limits_{x_0}^{\xi}\int\limits_{z_0}^{\zeta} (r_{16}f_3)(\alpha,\eta,\gamma,\xi,\eta,\zeta)d\alpha d\gamma + \int\limits_{x_0}^{\xi}\int\limits_{y_0}^{\eta}\int\limits_{z_0}^{\zeta} (r_{12\eta}f_1 + r_{14\eta}f_2 + r_{16\eta}f_3)(\alpha,\beta,\gamma,\xi,\eta,\zeta)d\alpha d\beta d\gamma. \end{gathered} \tag{9}$$

Продифференцируем теперь соотношение (9) по переменной ζ. Учитывая, что $r_{11}(x_0,\eta,\zeta,\xi,\eta,\zeta)\equiv 1$, $r_{16}(\alpha,\eta,\zeta,\xi,\eta,\zeta)\equiv 0$, и заменяя ξ на x, η на y, ζ на z, окончательно получаем

$$\begin{gathered}
w(x,y,z)=w(x_0,y,z)+\int\limits_{z_0}^{z}(r_{11\zeta}w)(x_0,y,\gamma,x,y,z)d\gamma+\int\limits_{y_0}^{y}(r_{11\eta}w+r_{12\eta}u_1)(x_0,\beta,z,x,y,z)d\beta+\\
+\int\limits_{y_0}^{y}\int\limits_{z_0}^{z}(r_{11\eta\zeta}w+r_{12\eta\zeta}u_1)(x_0,\beta,\gamma,x,y,z)d\beta d\gamma+\int\limits_{x_0}^{x}(r_{13\eta}u+r_{14\eta}v_1)(\alpha,y_0,z,x,y,z)d\alpha+\\
+\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{z_0}^{z}(r_{13\eta\zeta}u+r_{14\eta\zeta}v_1)(\alpha,y_0,\gamma,x,y,z)d\alpha d\gamma+\int\limits_{x_0}^{x}(r_{15\zeta}v+r_{16\zeta}w_1)(\alpha,y,z_0,x,y,z)d\alpha+\\
+\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y}(r_{15\eta\zeta}v+r_{16\eta\zeta}w_1)(\alpha,\beta,z_0,x,y,z)d\alpha d\beta+\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{z_0}^{z}(r_{16\zeta}f_3)(\alpha,y,\gamma,x,y,z)d\alpha d\gamma+\\
+\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y}(r_{12\eta}f_1+r_{14\eta}f_2+r_{16\eta}f_3)(\alpha,\beta,z,x,y,z)d\alpha d\beta+\\
+\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y}\int\limits_{z_0}^{z}(r_{12\eta\zeta}f_1+r_{14\eta\zeta}f_2+r_{16\eta\zeta}f_3)(\alpha,\beta,\gamma,x,y,z)d\alpha d\beta d\gamma.
\end{gathered}$$

Аналогичным образом находим

$$\begin{gathered}
u_1(x,y,z)=u_1(x_0,y,z)+r_{21}(x_0,y,z,x,y,z)w(x_0,y,z)+\int\limits_{z_0}^{z}(r_{21\zeta}w+r_{22\zeta}u_1)(x_0,y,\gamma,x,y,z)d\gamma+\\
+\int\limits_{y_0}^{y}(r_{21\eta}w+r_{22\eta}u_1)(x_0,\beta,z,x,y,z)d\beta+\int\limits_{y_0}^{y}\int\limits_{z_0}^{z}(r_{21\eta\zeta}w+r_{22\eta\zeta}u_1)(x_0,\beta,\gamma,x,y,z)d\beta d\gamma+\\
+\int\limits_{x_0}^{x}(r_{23\eta}u+r_{24\eta}v_1)(\alpha,y_0,z,x,y,z)d\alpha+\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{z_0}^{z}(r_{23\eta\zeta}u+r_{24\eta\zeta}v_1)(\alpha,y_0,\gamma,x,y,z)d\alpha d\gamma+\\
+\int\limits_{x_0}^{x}(r_{25\zeta}v+r_{26\zeta}w_1)(\alpha,y,z_0,x,y,z)d\alpha+\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y}(r_{25\eta\zeta}v+r_{26\eta\zeta}w_1)(\alpha,\beta,z_0,x,y,z)d\alpha d\beta+\\
+\int\limits_{x_0}^{x}f_1(\alpha,y,z)d\alpha+\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y}(r_{22\eta}f_1)(\alpha,\beta,z,x,y,z)d\alpha d\beta+\\
+\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{z_0}^{z}(r_{26\zeta}f_3)(\alpha,y,\gamma,x,y,z)d\alpha d\gamma+\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y}\int\limits_{z_0}^{z}(r_{22\eta\zeta}f_1+r_{24\eta\zeta}f_2+r_{26\eta\zeta}f_3)(\alpha,\beta,\gamma,x,y,z)d\alpha d\beta d\gamma,
\end{gathered}\tag{10}$$

$$\begin{gathered}
u(x,y,z)=u(x,y_0,z)+\int\limits_{x_0}^{x}(r_{33\xi}u)(\alpha,y_0,z,x,y,z)d\alpha+\int\limits_{y_0}^{y}(r_{31\xi}w+r_{32\xi}u_1)(x_0,\beta,z,x,y,z)d\beta+\\
+\int\limits_{y_0}^{y}\int\limits_{z_0}^{z}(r_{31\xi\zeta}w+r_{32\xi\zeta}u_1)(x_0,\beta,\gamma,x,y,z)d\beta d\gamma+\int\limits_{z_0}^{z}(r_{33\zeta}u+r_{34\zeta}v_1)(x,y_0,\gamma,x,y,z)d\gamma+\\
+\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{z_0}^{z}(r_{33\xi\zeta}u+r_{34\xi\zeta}v_1)(\alpha,y_0,\gamma,x,y,z)d\alpha d\gamma+\int\limits_{y_0}^{y}(r_{35\zeta}v+r_{36\zeta}w_1)(x,\beta,z_0,x,y,z)d\beta+\\
+\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y}(r_{35\xi\zeta}v+r_{36\xi\zeta}w_1)(\alpha,\beta,z_0,x,y,z)d\alpha d\beta+\int\limits_{y_0}^{y}\int\limits_{z_0}^{z}(r_{32\zeta}f_1)(x,\beta,\gamma,x,y,z)d\beta d\gamma+\\
+\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y}(r_{32\xi}f_1+r_{34\xi}f_2+r_{36\xi}f_3)(\alpha,\beta,z,x,y,z)d\alpha d\beta+\\
+\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y}\int\limits_{z_0}^{z}(r_{32\xi\zeta}f_1+r_{34\xi\zeta}f_2+r_{36\xi\zeta}f_3)(\alpha,\beta,\gamma,x,y,z)d\alpha d\beta d\gamma,
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
v_1(x,y,z)=v_1(x,y_0,z)+r_{43}(x,y_0,z,x,y,z)u(x,y_0,z)+\int\limits_{x_0}^{x}(r_{43\xi}u+r_{44\xi}v_1)(\alpha,y_0,z,x,y,z)d\alpha+\\
+\int\limits_{y_0}^{y}(r_{41\xi}w+r_{42\xi}u_1)(x_0,\beta,z,x,y,z)d\beta+\int\limits_{y_0}^{y}\int\limits_{z_0}^{z}(r_{41\xi\zeta}w+r_{42\xi\zeta}u_1)(x_0,\beta,\gamma,x,y,z)d\beta d\gamma+\\
+\int\limits_{z_0}^{z}(r_{43\zeta}u+r_{44\zeta}v_1)(x,y_0,\gamma,x,y,z)d\gamma+\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{z_0}^{z}(r_{43\xi\zeta}u+r_{44\xi\zeta}v_1)(\alpha,y_0,\gamma,x,y,z)d\alpha d\gamma+\\
+\int\limits_{y_0}^{y}(r_{45\zeta}v+r_{46\zeta}w_1)(x,\beta,z_0,x,y,z)d\beta+\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y}(r_{45\xi\zeta}v+r_{46\xi\zeta}w_1)(\alpha,\beta,z_0,x,y,z)d\alpha d\beta+
\end{gathered}$$

$$+\int\limits_{y_0}^{y} f_2(x,\beta,z)d\beta+\int\limits_{y_0}^{y}\int\limits_{z_0}^{z}(r_{44\zeta}f_2)(x,\beta,\gamma,x,y,z)d\beta d\gamma+$$
$$+\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y}(r_{42\xi}f_1)(\alpha,\beta,z,x,y,z)d\alpha d\beta+\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y}\int\limits_{z_0}^{z}(r_{42\xi\zeta}f_1+r_{44\xi\zeta}f_2+r_{46\xi\zeta}f_3)(\alpha,\beta,\gamma,x,y,z)d\alpha d\beta d\gamma, \tag{11}$$

$$v(x,y,z)=v(x,y,z_0)+\int\limits_{y_0}^{y}(r_{55\eta}v)(x,\beta,z_0,x,y,z)d\beta+\int\limits_{z_0}^{z}(r_{51\xi}w+r_{52\xi}u_1)(x_0,y,\gamma,x,y,z)d\gamma+$$
$$+\int\limits_{y_0}^{y}\int\limits_{z_0}^{z}(r_{51\xi\eta}w+r_{52\xi\eta}u_1)(x_0,\beta,\gamma,x,y,z)d\beta d\gamma+\int\limits_{z_0}^{z}(r_{53\eta}u+r_{54\eta}v_1)(x,y_0,\gamma,x,y,z)d\gamma+$$
$$+\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{z_0}^{z}(r_{53\xi\eta}u+r_{34\xi\eta}v_1)(\alpha,y_0,\gamma,x,y,z)d\alpha d\gamma+\int\limits_{x_0}^{x}(r_{55\xi}v+r_{56\xi}w_1)(\alpha,y,z_0,x,y,z)d\alpha+$$
$$+\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y}(r_{55\xi\eta}v+r_{56\xi\eta}w_1)(\alpha,\beta,z_0,x,y,z)d\alpha d\beta+\int\limits_{y_0}^{y}\int\limits_{z_0}^{z}(r_{54\eta}f_2)(x,\beta,\gamma,x,y,z)d\beta d\gamma+$$
$$+\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{z_0}^{z}(r_{52\xi}f_1+r_{54\xi}f_2+r_{56\xi}f_3)(\alpha,y,\gamma,x,y,z)d\alpha d\gamma+$$
$$+\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y}\int\limits_{z_0}^{z}(r_{52\xi\eta}f_1+r_{54\xi\eta}f_2+r_{56\xi\eta}f_3)(\alpha,\beta,\gamma,x,y,z)d\alpha d\beta d\gamma,$$

$$w_1(x,y,z)=w_1(x,y,z_0)+r_{65}(x,y,z_0,x,y,z)v(x,y,z_0)+\int\limits_{y_0}^{y}(r_{65\eta}v+r_{66\eta}w_1)(x,\beta,z_0,x,y,z)d\beta+$$
$$+\int\limits_{z_0}^{z}(r_{61\xi}w+r_{62\xi}u_1)(x_0,y,\gamma,x,y,z)d\gamma+\int\limits_{y_0}^{y}\int\limits_{z_0}^{z}(r_{61\xi\eta}w+r_{62\xi\eta}u_1)(x_0,\beta,\gamma,x,y,z)d\beta d\gamma+$$
$$+\int\limits_{z_0}^{z}(r_{63\eta}u+r_{64\eta}v_1)(x,y_0,\gamma,x,y,z)d\gamma+\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{z_0}^{z}(r_{63\xi\eta}u+r_{64\xi\eta}v_1)(\alpha,y_0,\gamma,x,y,z)d\alpha d\gamma+$$
$$+\int\limits_{x_0}^{x}(r_{65\xi}v+r_{66\xi}w_1)(\alpha,y,z_0,x,y,z)d\alpha+\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y}(r_{65\xi\eta}v+r_{66\xi\eta}w_1)(\alpha,\beta,z_0,x,y,z)d\alpha d\beta+$$
$$+\int\limits_{z_0}^{z}f_3(x,y,\gamma)d\gamma+\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{z_0}^{z}(r_{66\xi}f_3)(\alpha,y,\gamma,x,y,z)d\alpha d\gamma+$$
$$+\int\limits_{y_0}^{y}\int\limits_{z_0}^{z}(r_{64\eta}f_2)(x,\beta,\gamma,x,y,z)d\beta d\gamma+\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y}\int\limits_{z_0}^{z}(r_{62\xi\eta}f_1+r_{64\xi\eta}f_2+r_{66\xi\eta}f_3)(\alpha,\beta,\gamma,x,y,z)d\alpha d\beta d\gamma. \tag{12}$$

Задача 2 (с условиями на четырех характеристиках). Найти в области G регулярное решение системы (3), удовлетворяющее условиям

$$\begin{array}{ll} u(x,y_0,z)=\varphi_1(x,z), & u_1(x_1,y,z)=\omega_1(y,z),\\ v(x,y,z_0)=\varphi_2(x,y), & v_1(x,y_0,z)=\psi_2(x,z),\\ w(x_0,y,z)=\varphi_3(y,z), & w_1(x,y,z_0)=\psi_3(x,y), \end{array} \tag{13}$$

где $\varphi_3\in C^1(\overline{X})$, φ_1, $\psi_2\in C^1(\overline{Y})$, φ_2, $\psi_3\in C^1(\overline{Z})$, $\omega_1\in C^1(\overline{X_1})$.

Будем исследовать разрешимость задачи 2 путем сведения ее к задаче 1. Для этого по данным (13) необходимо получить $u_1(x_0,y,z)=\psi_1(y,z)$. Положим в (10) $x=x_1$, получим следующее интегральное уравнение:

$$\begin{gathered} u_1(x_0,y,z)+\int\limits_{z_0}^{z}r_{22\zeta}(x_0,y,\gamma,x_1,y,z)u_1(x_0,y,\gamma)d\gamma+\\ +\int\limits_{y_0}^{y}r_{22\eta}(x_0,\beta,z,x_1,y,z)u_1(x_0,\beta,z)d\beta+\\ +\int\limits_{y_0}^{y}\int\limits_{z_0}^{z}r_{22\eta\zeta}(x_0,\beta,\gamma,x_1,y,z)u_1(x_0,\beta,\gamma)d\beta d\gamma=F_1(y,z)+\omega_1(y,z), \end{gathered} \tag{14}$$

где

$$F_1(y,z)=-\Bigg(r_{21}(x_0,y,z,x_1,y,z)w(x_0,y,z)+\int\limits_{z_0}^{z}(r_{21\zeta}w)(x_0,y,\gamma,x_1,y,z)d\gamma+$$
$$+\int\limits_{y_0}^{y}(r_{21\eta}w)(x_0,\beta,z,x_1,y,z)d\beta+\int\limits_{z_0}^{z}\int\limits_{y_0}^{y}(r_{21\eta\zeta}w)(x_0,\beta,\gamma,x_1,y,z)d\beta d\gamma+$$
$$+\int\limits_{x_0}^{x_1}(r_{23\eta}u+r_{24\eta}v_1)(\alpha,y_0,z,x_1,y,z)d\alpha+$$
$$+\int\limits_{x_0}^{x_1}\int\limits_{z_0}^{z}(r_{23\eta\zeta}u+r_{24\eta\zeta}v_1)(\alpha,y_0,\gamma,x_1,y,z)d\alpha d\gamma+$$
$$+\int\limits_{x_0}^{x_1}(r_{25\zeta}v+r_{26\zeta}w_1)(\alpha,y,z_0,x_1,y,z)d\alpha+\int\limits_{x_0}^{x_1}\int\limits_{y_0}^{y}(r_{25\eta\zeta}v+r_{26\eta\zeta}w_1)(\alpha,\beta,z_0,x_1,y,z)d\alpha d\beta+$$
$$+\int\limits_{x_0}^{x_1}f_1(\alpha,y,z)d\alpha+\int\limits_{x_0}^{x_1}\int\limits_{y_0}^{y}(r_{22\eta}f_1)(\alpha,\beta,z,x_1,y,z)d\alpha d\beta+\int\limits_{x_0}^{x_1}\int\limits_{z_0}^{z}(r_{26\zeta}f_3)(\alpha,y,\gamma,x_1,y,z)d\alpha d\gamma+$$
$$+\int\limits_{x_0}^{x_1}\int\limits_{y_0}^{y}\int\limits_{z_0}^{z}(r_{22\eta\zeta}f_1+r_{24\eta\zeta}f_2+r_{26\eta\zeta}f_3)(\alpha,\beta,\gamma,x_1,y,z)d\alpha d\beta d\gamma\Bigg).$$

Уравнение (14) является уравнением Вольтерра второго рода для определения $u_1(x_0,y,z)$, решение которого существует и единственно в классе непрерывных функций [9] (функция $F_1(y,z)$ известна). Таким образом, задача 2 свелась к задаче 1, и, следовательно, справедливо утверждение

Теорема 2. Если в замыкании области G выполняются включения $s_1,\ s_2,\ s_3\in C^1(\overline{G}),\ a_i,\ b_i,\ c_i,\ f_i\in C(\overline{G})\ (i=\overline{1,3})$, то существует единственное решение задачи 2.

Задача 3 (с условиями на пяти характеристиках). Найти в области G регулярное решение системы (3), удовлетворяющее условиям

$$\begin{array}{ll} u(x,y_0,z)=\varphi_1(x,z), & u_1(x_1,y,z)=\omega_1(y,z),\\ v(x,y,z_0)=\varphi_2(x,y), & v_1(x,y_1,z)=\omega_2(x,z),\\ w(x_0,y,z)=\varphi_3(y,z), & w_1(x,y,z_0)=\psi_3(x,y),\end{array}\qquad(15)$$

где $\varphi_3\in C^1(\overline{X}),\ \varphi_1\in C^1(\overline{Y}),\ \varphi_2,\ \psi_3\in C^1(\overline{Z}),\ \omega_1\in C^1(\overline{X_1}),\ \omega_2\in C^1(\overline{Y_1})$.

Исследовать задачу 3 будем так же, как и задачу 2, путем ее редукции к задаче 1. Для этого по данным (15) определим $u_1(x_0,y,z)=\psi_1(y,z),\ v_1(x,y_0,z)==\psi_2(x,z)$. Положим в (10) $x=x_1$, в (11) — $y=y_1$. Получим систему двух интегральных уравнений

$$u_1(x_0,y,z)+\int\limits_{z_0}^{z}r_{22\zeta}(x_0,y,\gamma,x_1,y,z)u_1(x_0,y,\gamma)d\gamma+\int\limits_{y_0}^{y}r_{22\eta}(x_0,\beta,z,x_1,y,z)u_1(x_0,\beta,z)d\beta+$$
$$+\int\limits_{y_0}^{y}\int\limits_{z_0}^{z}r_{22\eta\zeta}(x_0,\beta,\gamma,x_1,y,z)u_1(x_0,\beta,\gamma)d\beta d\gamma+\int\limits_{x_0}^{x_1}r_{24\eta}(\alpha,y_0,z,x_1,y,z)v_1(\alpha,y_0,z)d\alpha+$$
$$+\int\limits_{x_0}^{x_1}\int\limits_{z_0}^{z}r_{24\eta\zeta}(\alpha,y_0,\gamma,x_1,y,z)v_1(\alpha,y_0,\gamma)d\alpha d\gamma=F_1(y,z)+\omega_1(y,z),$$

$$v_1(x,y_0,z)+\int\limits_{x_0}^{x}r_{44\xi}(\alpha,y_0,z,x,y_1,z)v_1(\alpha,y_0,z)d\alpha+\int\limits_{z_0}^{z}r_{44\zeta}(x,y_0,\gamma,x,y_1,z)v_1(x,y_0,\gamma)d\gamma+$$
$$+\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{z_0}^{z}r_{44\xi\zeta}(\alpha,y_0,\gamma,x,y_1,z)v_1(\alpha,y_0,\gamma)d\alpha d\gamma+\int\limits_{y_0}^{y_1}r_{42\xi}(x_0,\beta,z,x,y_1,z)u_1(x_0,\beta,z)d\beta+$$
$$+\int\limits_{y_0}^{y_1}\int\limits_{z_0}^{z}r_{42\xi\zeta}(x_0,\beta,\gamma,x,y_1,z)u_1(x_0,\beta,\gamma)d\beta d\gamma=F_2(x,z)+\omega_2(x,z),$$

где

$$
\begin{aligned}
F_1(y,z) = -\Bigg(& r_{21}(x_0,y,z,x_1,y,z)w(x_0,y,z) + \int\limits_{z_0}^{z}(r_{21\zeta}w)(x_0,y,\gamma,x_1,y,z)d\gamma + \\
& + \int\limits_{y_0}^{y}(r_{21\eta}w)(x_0,\beta,z,x_1,y,z)d\beta + \int\limits_{y_0}^{y}\int\limits_{z_0}^{z}(r_{21\eta\zeta}w)(x_0,\beta,\gamma,x_1,y,z)d\beta d\gamma + \\
& + \int\limits_{x_0}^{x_1}(r_{23\eta}u)(\alpha,y_0,z,x_1,y,z)d\alpha + \int\limits_{x_0}^{x_1}\int\limits_{z_0}^{z}(r_{23\eta\zeta}u)(\alpha,y_0,\gamma,x_1,y,z)d\alpha d\gamma + \\
& + \int\limits_{x_0}^{x_1}(r_{25\zeta}v + r_{26\zeta}w_1)(\alpha,y,z_0,x_1,y,z)d\alpha + \int\limits_{x_0}^{x_1}\int\limits_{y_0}^{y}(r_{25\eta\zeta}v + r_{26\eta\zeta}w_1)(\alpha,\beta,z_0,x_1,y,z)d\alpha d\beta + \\
& + \int\limits_{x_0}^{x_1} f_1(\alpha,y,z)d\alpha + \int\limits_{x_0}^{x_1}\int\limits_{y_0}^{y}(r_{22\eta}f_1)(\alpha,\beta,z,x_1,y,z)d\alpha d\beta + \int\limits_{x_0}^{x_1}\int\limits_{z_0}^{z}(r_{26\zeta}f_3)(\alpha,y,\gamma,x_1,y,z)d\alpha d\gamma + \\
& + \int\limits_{x_0}^{x_1}\int\limits_{y_0}^{y}\int\limits_{z_0}^{z}(r_{22\eta\zeta}f_1 + r_{24\eta\zeta}f_2 + r_{26\eta\zeta}f_3)(\alpha,\beta,\gamma,x_1,y,z)d\alpha d\beta d\gamma\Bigg),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_2(x,z) = -\Bigg(& r_{43}(x,y_0,z,x,y_1,z)u(x,y_0,z) + \int\limits_{x_0}^{x}(r_{43\xi}u)(\alpha,y_0,z,x,y_1,z)d\alpha + \\
& + \int\limits_{y_0}^{y_1}(r_{41\xi}w)(x_0,\beta,z,x,y_1,z)d\beta + \int\limits_{y_0}^{y_1}\int\limits_{z_0}^{z}(r_{41\xi\zeta}w)(x_0,\beta,\gamma,x,y_1,z)d\beta d\gamma + \\
& + \int\limits_{z_0}^{z}(r_{43\zeta}u)(x,y_0,\gamma,x,y_1,z)d\gamma + \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{z_0}^{z}(r_{43\xi\zeta}u)(\alpha,y_0,\gamma,x,y_1,z)d\alpha d\gamma + \\
& + \int\limits_{y_0}^{y_1}(r_{45\zeta}v + r_{46\zeta}w_1)(x,\beta,z_0,x,y_1,z)d\beta + \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y_1}(r_{45\xi\zeta}v + r_{46\xi\zeta}w_1)(\alpha,\beta,z_0,x,y_1,z)d\alpha d\beta + \\
& + \int\limits_{y_0}^{y_1} f_2(x,\beta,z)d\beta + \int\limits_{y_0}^{y_1}\int\limits_{z_0}^{z}(r_{44\zeta}f_2)(x,\beta,\gamma,x,y_1,z)d\beta d\gamma + \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y_1}(r_{42\xi}f_1)(\alpha,\beta,z,x,y_1,z)d\alpha d\beta + \\
& + \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y_1}\int\limits_{z_0}^{z}(r_{42\xi\zeta}f_1 + r_{44\xi\zeta}f_2 + r_{46\xi\zeta}f_3)(\alpha,\beta,\gamma,x,y_1,z)d\alpha d\beta d\gamma\Bigg).
\end{aligned}
$$

Решение данной системы $(u_1(x_0,y,z),\ v_1(x,y_0,z))$ существует и единственно в классе непрерывных функций [8, с. 59]. Итак, задача 3 редуцируется к задаче 1 и, следовательно, сраведливо утверждение

Теорема 3. Если в замыкании области G выполняются включения $s_1,\ s_2,\ s_3 \in C^1(\overline{G})$, $a_i,\ b_i,\ c_i,\ f_i \in C(\overline{G})$ $(i = \overline{1,3})$, то решение задачи 3 существует и единственно.

Задача 4 (с условиями на шести характеристиках). Найти в области G регулярное решение системы (3), удовлетворяющее условиям

$$
\begin{aligned}
u(x,y_0,z) &= \varphi_1(x,z), & u_1(x_1,y,z) &= \omega_1(y,z), \\
v(x,y,z_0) &= \varphi_2(x,y), & v_1(x,y_1,z) &= \omega_2(x,z), \\
w(x_0,y,z) &= \varphi_3(y,z), & w_1(x,y,z_1) &= \omega_3(x,y),
\end{aligned}
\tag{16}
$$

где $\varphi_1 \in C^1(\overline{Y}),\ \varphi_2 \in C^1(\overline{Z}),\ \varphi_3 \in C^1(\overline{X}),\ \omega_1 \in C^1(\overline{X_1}),\ \omega_2 \in C^1(\overline{Y_1}),\ \omega_3 \in C^1(\overline{Z_1})$.

Для исследования разрешимости задачи 4 по данным (16) необходимо определить $u_1(x_0,y,z) = \psi_1(y,z),\ v_1(x,y_0,z) = \psi_2(x,z),\ w_1(x,y,z_0) = \psi_3(x,y)$. Для этого положим в (10) $x = x_1$, в (11) — $y = y_1$, в (12) — $z = z_1$. Получим систему трех интегральных уравнений

$$u_1(x_0,y,z)+\int\limits_{z_0}^{z} r_{22\zeta}(x_0,y,\gamma,x_1,y,z)u_1(x_0,y,\gamma)d\gamma+$$
$$+\int\limits_{y_0}^{y} r_{22\eta}(x_0,\beta,z,x_1,y,z)u_1(x_0,\beta,z)d\beta+\int\limits_{y_0}^{y}\int\limits_{z_0}^{z} r_{22\eta\zeta}(x_0,\beta,\gamma,x_1,y,z)u_1(x_0,\beta,\gamma)d\beta d\gamma+$$
$$+\int\limits_{x_0}^{x_1} r_{24\eta}(\alpha,y_0,z,x_1,y,z)v_1(\alpha,y_0,z)d\alpha+$$
$$+\int\limits_{x_0}^{x_1}\int\limits_{z_0}^{z} r_{24\eta\zeta}(\alpha,y_0,\gamma,x_1,y,z)v_1(\alpha,y_0,\gamma)d\alpha d\gamma+\int\limits_{x_0}^{x_1} r_{26\zeta}(\alpha,y,z_0,x_1,y,z)w_1(\alpha,y,z_0)d\alpha+$$
$$+\int\limits_{x_0}^{x_1}\int\limits_{y_0}^{y} r_{26\eta\zeta}(\alpha,\beta,z_0,x_1,y,z)w_1(\alpha,\beta,z_0)d\alpha d\beta=F_1(y,z)+\omega_1(y,z),$$

$$v_1(x,y_0,z)+\int\limits_{x_0}^{x} r_{44\xi}(\alpha,y_0,z,x,y_1,z)v_1(\alpha,y_0,z)d\alpha+$$
$$+\int\limits_{z_0}^{z} r_{44\zeta}(x,y_0,\gamma,x,y_1,z)v_1(x,y_0,\gamma)d\gamma+\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{z_0}^{z} r_{44\xi\zeta}(\alpha,y_0,\gamma,x,y_1,z)v_1(\alpha,y_0,\gamma)d\alpha d\gamma+$$
$$+\int\limits_{y_0}^{y_1} r_{42\xi}(x_0,\beta,z,x,y_1,z)u_1(x_0,\beta,z)d\beta+$$
$$+\int\limits_{y_0}^{y_1}\int\limits_{z_0}^{z} r_{42\xi\zeta}(x_0,\beta,\gamma,x,y_1,z)u_1(x_0,\beta,\gamma)d\beta d\gamma+\int\limits_{y_0}^{y_1} r_{46\zeta}(x,\beta,z_0,x,y_1,z)w_1(x,\beta,z_0)d\beta+$$
$$+\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y_1} r_{46\xi\zeta}(\alpha,\beta,z_0,x,y_1,z)w_1(\alpha,\beta,z_0)d\alpha d\beta=F_2(x,z)+\omega_2(x,z),$$

$$w_1(x,y,z_0)+\int\limits_{y_0}^{y} r_{66\eta}(x,\beta,z_0,x,y,z_1)w_1(x,\beta,z_0)d\beta+$$
$$+\int\limits_{x_0}^{x} r_{66\xi}(\alpha,y,z_0,x,y,z_1)w_1(\alpha,y,z_0)d\alpha+\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y} r_{66\xi\eta}(\alpha,\beta,z_0,x,y,z_1)w_1(\alpha,\beta,z_0)d\alpha d\beta+$$
$$+\int\limits_{z_0}^{z_1} r_{62\xi}(x_0,y,\gamma,x,y,z_1)u_1(x_0,y,\gamma)d\gamma+$$
$$+\int\limits_{y_0}^{y}\int\limits_{z_0}^{z_1} r_{62\xi\eta}(x_0,\beta,\gamma,x,y,z_1)u_1(x_0,\beta,\gamma)d\beta d\gamma+\int\limits_{z_0}^{z_1} r_{64\eta}(x,y_0,\gamma,x,y,z_1)v_1(x,y_0,\gamma)d\gamma+$$
$$+\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{z_0}^{z_1} r_{64\xi\eta}(\alpha,y_0,\gamma,x,y,z_1)v_1(\alpha,y_0,\gamma)d\alpha d\gamma=F_3(x,y)+\omega_3(x,y),$$

где

$$F_1(y,z)=-\Bigg(r_{21}(x_0,y,z,x_1,y,z)w(x_0,y,z)+\int\limits_{z_0}^{z}(r_{21\zeta}w)(x_0,y,\gamma,x_1,y,z)d\gamma+$$
$$+\int\limits_{y_0}^{y}(r_{21\eta}w)(x_0,\beta,z,x_1,y,z)d\beta+\int\limits_{y_0}^{y}\int\limits_{z_0}^{z}(r_{21\eta\zeta}w)(x_0,\beta,\gamma,x_1,y,z)d\beta d\gamma+$$
$$+\int\limits_{x_0}^{x_1}(r_{23\eta}u)(\alpha,y_0,z,x_1,y,z)d\alpha+\int\limits_{x_0}^{x_1}\int\limits_{z_0}^{z}(r_{23\eta\zeta}u)(\alpha,y_0,\gamma,x_1,y,z)d\alpha d\gamma+$$
$$+\int\limits_{x_0}^{x_1}(r_{25\zeta}v)(\alpha,y,z_0,x_1,y,z)d\alpha+\int\limits_{x_0}^{x_1}\int\limits_{y_0}^{y}(r_{25\eta\zeta}v)(\alpha,\beta,z_0,x_1,y,z)d\alpha d\beta+$$
$$+\int\limits_{x_0}^{x_1} f_1(\alpha,y,z)d\alpha+\int\limits_{x_0}^{x_1}\int\limits_{y_0}^{y}(r_{22\eta}f_1)(\alpha,\beta,z,x_1,y,z)d\alpha d\beta+\int\limits_{x_0}^{x_1}\int\limits_{z_0}^{z}(r_{26\zeta}f_3)(\alpha,y,\gamma,x_1,y,z)d\alpha d\gamma+$$
$$+\int\limits_{x_0}^{x_1}\int\limits_{y_0}^{y}\int\limits_{z_0}^{z}(r_{22\eta\zeta}f_1+r_{24\eta\zeta}f_2+r_{26\eta\zeta}f_3)(\alpha,\beta,\gamma,x_1,y,z)d\alpha d\beta d\gamma\Bigg),$$

$$F_2(x,z)=-\Bigg(r_{43}(x,y_0,z,x,y_1,z)u(x,y_0,z)+\int\limits_{x_0}^{x}(r_{43\xi}u)(\alpha,y_0,z,x,y_1,z)d\alpha+$$
$$+\int\limits_{y_0}^{y_1}(r_{41\xi}w)(x_0,\beta,z,x,y_1,z)d\beta+\int\limits_{y_0}^{y_1}\int\limits_{z_0}^{z}(r_{41\xi\zeta}w)(x_0,\beta,\gamma,x,y_1,z)d\beta d\gamma+$$
$$+\int\limits_{z_0}^{z}(r_{43\zeta}u)(x,y_0,\gamma,x,y_1,z)d\gamma+\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{z_0}^{z}(r_{43\xi\zeta}u)(\alpha,y_0,\gamma,x,y_1,z)d\alpha d\gamma+$$
$$+\int\limits_{y_0}^{y_1}(r_{45\zeta}v)(x,\beta,z_0,x,y_1,z)d\beta+\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y_1}(r_{45\xi\zeta}v)(\alpha,\beta,z_0,x,y_1,z)d\alpha d\beta+$$
$$+\int\limits_{y_0}^{y_1}f_2(x,\beta,z)d\beta+\int\limits_{y_0}^{y_1}\int\limits_{z_0}^{z}(r_{44\zeta}f_2)(x,\beta,\gamma,x,y_1,z)d\beta d\gamma+\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y_1}(r_{42\xi}f_1)(\alpha,\beta,z,x,y_1,z)d\alpha d\beta+$$
$$+\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y_1}\int\limits_{z_0}^{z}(r_{42\xi\zeta}f_1+r_{44\xi\zeta}f_2+r_{46\xi\zeta}f_3)(\alpha,\beta,\gamma,x,y_1,z)d\alpha d\beta d\gamma\Bigg),$$

$$F_3(x,y)=-\Bigg(r_{65}(x,y,z_0,x,y,z_1)v(x,y,z_0)+\int\limits_{y_0}^{y}(r_{65\eta}v)(x,\beta,z_0,x,y,z_1)d\beta+$$
$$+\int\limits_{z_0}^{z_1}(r_{61\xi}w)(x_0,y,\gamma,x,y,z_1)d\gamma+\int\limits_{y_0}^{y}\int\limits_{z_0}^{z_1}(r_{61\xi\eta}w)(x_0,\beta,\gamma,x,y,z_1)d\beta d\gamma+$$
$$+\int\limits_{z_0}^{z_1}(r_{63\eta}u)(x,y_0,\gamma,x,y,z_1)d\gamma+\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{z_0}^{z_1}(r_{63\xi\eta}u)(\alpha,y_0,\gamma,x,y,z_1)d\alpha d\gamma+$$
$$+\int\limits_{x_0}^{x}(r_{65\xi}v)(\alpha,y,z_0,x,y,z_1)d\alpha+\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y}(r_{65\xi\eta}v)(\alpha,\beta,z_0,x,y,z_1)d\alpha d\beta+$$
$$+\int\limits_{z_0}^{z_1}f_3(x,y,\gamma)d\gamma+\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{z_0}^{z_1}(r_{66\xi}f_3)(\alpha,y,\gamma,x,y,z_1)d\alpha d\gamma+\int\limits_{y_0}^{y}\int\limits_{z_0}^{z_1}(r_{64\eta}f_2)(x,\beta,\gamma,x,y,z_1)d\beta d\gamma+$$
$$+\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y}\int\limits_{z_0}^{z_1}(r_{62\xi\eta}f_1+r_{64\xi\eta}f_2+r_{66\xi\eta}f_3)(\alpha,\beta,\gamma,x,y,z_1)d\alpha d\beta d\gamma\Bigg).$$

Функции $F_1(y,z)$, $F_2(x,z)$, $F_3(x,y)$ известны.

Решение данной системы $(u_1(x_0,y,z),\ v_1(x,y_0,z),\ w_1(x,y,z_0))$ существует и единственно в классе непрерывных функций. Таким образом, задача 4 редуцируется к задаче 1, и справедливо утверждение

Теорема 4. Если в замыкании области G выполняются включения $s_1,\ s_2,\ s_3\in C^1(\overline{G})$, $a_i,\ b_i,\ c_i,\ f_i\in C(\overline{G})$ $(i=\overline{1,3})$, то существует единственное решение задачи 4.

Литература

[1] Чекмарев Т.В. Формулы решения задачи Гурса для одной линейной системы уравнений с частными производными // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18. № 9. С. 1614–1622.

[2] Миронова Л.Б. О методе Римана в R^n для одной системы с кратными характеристиками // Изв. вузов. Сер.: Математика. 2006. № 1. С. 34–39.

[3] Миронова Л.Б. О характеристических задачах для одной системы с двукратными старшими частными производными // Вестник СамГТУ. Сер.: Физ.-мат. науки. 2006. Вып. 43. С. 31–37.

[4] Жегалов В.И., Миронова Л.Б. Об одной системе уравнений с двукратными старшими частными производными // Изв. вузов. Сер.: Математика. 2007. № 3. С. 12–21.

[5] Жегалов В.И. Задача с нормальными производными в граничных условиях для системы дифференциальных уравнений // Изв. вузов. Сер.: Математика. 2008. № 8. С. 70–72.

[6] Уткина Е.А. Задача Дирихле для одного уравнения четвертого порядка // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 4. С. 400–404.
[7] Уткина Е.А. Задачи Дирихле для одного трехмерного уравнения // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2010. № 2. С. 84–95.
[8] Интегральные уравнения / П.П. Забрейко [и др.]. М.: Наука, 1968. 448 с.
[9] Севастьянов В.А. О методе И.Н. Векуа решения интегральных уравнений типа Вольтерра / Деп. в ВИНИТИ. 1997. № 1373–В97. 9 с.

Поступила в редакцию 18/ V/2013;
в окончательном варианте — 18/ V/2013.

ON CHARACTERISTIC PROBLEMS FOR ONE HYPERBOLIC SYSTEM IN THREE-DIMENSIONAL SPACE

© 2013 E.A. Sozontova[2]

We consider characteristic problems for a hyperbolic system with three independent variables. Using the Riemann method and theory of integral equations we obtain conditions of one-valued solvability for this problems.

Key words: hyperbolic system, Riemann method, characteristic problem.

Paper received 18/ V/2013.
Paper accepted 18/ V/2013.

[2]Sozontova Elena Alexandrovna (sozontova-elena@rambler.ru), the Dept. of Mathematical Analysis, Algebra and Geometry, Elabuga Institute of Kazan Federal University, Elabuga, 423600, Russian Federation.