УДК 517.925+531.01

О ЗАМКНУТЫХ СИММЕТРИЧНЫХ КЛАССАХ ФУНКЦИЙ, СОХРАНЯЮЩИХ ЛЮБОЙ ОДНОМЕСТНЫЙ ПРЕДИКАТ

© 2013 Н.Л. Поляков[1], М.В. Шамолин[2]

В работе дано эффективное описание симметричных замкнутых классов дискретных функций, сохраняющих любой одноместный предикат.

Ключевые слова: замкнутый класс, клон, соответствие Галуа, теория коллективного выбора.

Введение

Интерес к замкнутым классам дискретных функций, сохраняющих любой одноместный предикат, возникает в связи с некоторыми проблемами *теории коллективного выбора* (theory of social choice), связанными с *теоремами о невозможности* (см. [1; 2]). По существу, такие классы рассмотрены в работе [3]. В теории коллективного выбора рассматриваются *системы предпочтений* на множестве альтернатив A и *правила голосования*. Под системой предпочтений часто понимают произвольную функцию выбора на множестве A, а под правилом голосования в т. н. простом случае (см. [3]) – произвольную функцию $f\colon A^n \to A$ $(1 \leqslant n < \omega)$, удовлетворяющую условию

$$\bigvee_{i<n} f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = x_i$$

для всех $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1} \in A$. Легко заметить, что это условие эквивалентно тому, что функция f сохраняет любой одноместный предикат (об отношении сохранения функцией f предиката P см. ниже).

Естественной с точки зрения теории коллективного выбора является задача нахождения множества всех правил голосования $\mathcal{F}$, которые сохраняют некоторое множество систем предпочтения $\mathfrak{D}$ в том смысле, что для каждой n-местной функции $f \in \mathcal{F}$ и функций $\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \ldots, \mathfrak{c}_n \in \mathfrak{D}$ функция $\mathfrak{c}$, определенная равенством

$$\mathfrak{c}(p) = f(\mathfrak{c}_1(p), \mathfrak{c}_2(p), \ldots, \mathfrak{c}_n(p))$$

для всех $p \in 2^A \setminus \{\varnothing\}$, принадлежит множеству $\mathfrak{D}$. Очевидно, для каждого множества систем предпочтений $\mathfrak{D}$ множество всех сохраняющих его правил голосования

[1]Поляков Николай Львович (gelvella@mail.ru), кафедра "Математика-1" Финансового университета при Правительстве РФ, 125993, Российская Федерация, г. Москва, ул. Щербаковская, 38.

[2]Шамолин Максим Владимирович (shamolin@imec.msu.ru), Институт механики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, 119899, Российская Федерация, г. Москва, Мичуринский пр., 1.

$\mathcal{F}$ *замкнуто относительно композиции* и содержит все *проекции*, т. е. является *клоном*.

Обычно в теории коллективного выбора рассматривают симметричные множества предпочтений, т. е. такие множества $\mathfrak{D}$ функций выбора на множестве A, которые для каждой функции $\mathfrak{c} \in \mathfrak{D}$ и перестановки $\sigma \in S_A$ содержат функцию $\mathfrak{c}_\sigma$, определенную равенством

$$\mathfrak{c}_\sigma(p) = \sigma^{-1}(\mathfrak{c}(\sigma p))$$

для всех $p \in 2^A \setminus \{\varnothing\}$. Легко проверить, что множество $\mathcal{F}$ всех правил голосования, которые сохраняют симметричное множество функций выбора $\mathfrak{D}$, вместе с каждой функцией f содержит функцию f_σ, определенную равенством

$$f_\sigma(\mathbf{a}) = \sigma^{-1}(f(\sigma \mathbf{a}))$$

для всех $a \in \operatorname{dom} f$. Множества $\mathcal{F}$ конечноместных функций на множестве A (не обязательно состоящие из правил голосования), которые обладают этим свойством, мы будем называть *симметричными*. Симметричные замкнутые классы дискретных функций рассматривались рядом авторов в связи с задачами классификации, восходящими к работе Поста [4; 7]. В работе [5] найден критерий полноты для симметричных замкнутых классов и описаны все симметричные замкнутые классы, которые содержат все константы. Однако множество правил голосования при $|A| \geqslant 2$, напротив, не содержит ни одной константы, поэтому описание из [5] не охватывает симметричных клонов, сохраняющих все одноместные предикаты. Классификацию последних дает настоящая статья. Эта классификация может быть эффективно использована в теории коллективного выбора. Постовскую классификацию и элементарные свойства замкнутых классов булевых функций (см., напр., [4; 6]) мы будем считать известными и будем использовать без дополнительных ссылок.

1. Основные определения и обозначения

Будем считать фиксированным конечное непустое множество A. Во избежание тривиальных рассуждений будем считать, что $|A| \geqslant 2$. Элементы декартовой степени A^n, $n < \omega$, отождествляются с последовательностями $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$, $a_i \in A$, $i < n$, т. е. с функциями $\mathbf{a}\colon \{0, 1, \ldots, n-1\} \to A$; поэтому для любой последовательности $\mathbf{a} \in A^{<\omega}$ мы употребляем стандартные обозначения $\operatorname{dom} \mathbf{a}$ и $\operatorname{ran} \mathbf{a}$ соответственно для ее области определения и области значений. Будем использовать обозначение A^n_m для множества $\{\mathbf{a} \in A^n \colon |\operatorname{ran} \mathbf{a}| = m\}$. В естественном смысле будем использовать обозначения $A^n_{<m} \rightleftharpoons \bigcup\limits_{k<m} A^n_k$, $A^{\leqslant n}_{<m} \rightleftharpoons \bigcup\limits_{k<m,\, l<n} A^l_k$ и т. п.

Множество всех n-местных функций на множестве A обозначается символом $\mathcal{O}_{[n]}(A)$ или просто $\mathcal{O}_{[n]}$. Символом $\mathcal{O}$ обозначается множество $\bigcup\limits_{n<\omega} \mathcal{O}_{[n]}$. Для краткости для любого множества $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}$ и натурального числа n вместо $\mathcal{F} \cap \mathcal{O}_{[n]}$ будем писать $\mathcal{F}_{[n]}$. Функция из множества $\mathcal{O}_n$, которая для некоторого фиксированного натурального числа $i < n$ каждой последовательности $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \ldots a_{n-1}) \in A^n$ ставит в соответствие элемент a_i, называется (n-местной i-й) проекцией или селекторной функцией и обозначается символом e^n_i. При обозначении селекторных функций верхний индекс n мы будем опускать, если это не вызывает разночтений. Множество всех селекторных функций из $\mathcal{O}$ мы будем обозначать символом $\mathcal{E}$. Операцией суперпозиции называется частичная операция на множестве $\mathcal{O}^{<\omega}$, которая каждому кортежу $(f, f_0, f_1, \ldots, f_{m-1})$, где f есть m-местная, а f_0, f_1,...,

f_{m-1} суть n-местные функции из $\mathcal{O}$, ставит в соответствие функцию $h \in \mathcal{O}_{[n]}$, обозначаемую символом $f(f_0, f_1, \dots, f_{m-1})$, заданную равенствами

$$h(\mathbf{a}) = f(f_0(\mathbf{a}), f_1(\mathbf{a}), \dots, f_{m-1}(\mathbf{a}))$$

для всех $a \in A^n$. Каждое множество $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(A)$, содержащее все проекции и замкнутое относительно суперпозиции, называется *клоном.* Если множество $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(A)$ есть клон, то множество A называется *носителем* клона $\mathcal{F}$. Клоны $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ с носителями, соответственно, B и C называются *эквивалентными*, если алгебраические структуры $(A, \mathcal{F})$ и $(B, \mathcal{G})$ являются изоморфными моделями одной и той же сигнатуры.

Ограничением $f \restriction P$ произвольной функции $f \in \mathcal{O}$ на множество P называется функция $f \cap (P \times A)$. Если $\mathcal{F}$ есть произвольное подмножество множества $\mathcal{O}$, то символом $\mathcal{F} \restriction P$ мы будем обозначать множество $\{f \restriction P \colon f \in \mathcal{F}\}$.

Функция $f \in \mathcal{O}_{[n]}$ *сохраняет предикат* $P \subseteq A^m$, если для любых n кортежей

$$(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1m}),\ (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2m}),\ \dots,\ (a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nm}),$$

принадлежащих предикату P, кортеж

$$(f(a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1}),\ f(a_{12}, a_{22}, \dots, a_{n2}),\ \dots,\ f(a_{1m}, a_{2m}, \dots, a_{nm}))$$

также принадлежит предикату P. Хорошо известно [8], что отношение сохранения функцией f предиката P естественным образом порождает *соответствие Галуа* между булевыми решетками подмножеств множеств $\mathcal{O}$ и $\bigcup\limits_{n<\omega} 2^{A^n}$, причем Галуа-замкнутые множества $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}$ суть в точности клоны. Легко проверить, что любая функция $f \in \mathcal{O}$ сохраняет каждый одноместный предикат $P \subseteq A$ тогда и только тогда, когда удовлетворяет условию

$$f(\mathbf{a}) \in \operatorname{ran} \mathbf{a} \qquad (*)$$

для всех $\mathbf{a} \in \operatorname{dom} f$. Клон всех функций $f \in \mathcal{O}$, удовлетворяющих условию $(*)$, мы будем обозначать символом $\mathcal{V}$.

2. Основная теорема

Для каждого $m \in \omega + 1$ и множества $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}$ обозначим для краткости символом $\mathcal{F}_{\langle m \rangle}$ множество $\mathcal{F} \restriction A^{<\omega}_{<m}$. Для множеств $U \subseteq \mathcal{O}_{\langle m \rangle}$ свойства *замкнутости относительно композиции* и *симметричности* определяются так же, как для множеств $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}$. Для каждого множества $U \subseteq \mathcal{V}_{\langle m \rangle}$ будем обозначать символом U^+ множество всех функций $f \in \mathcal{V}$, удовлетворяющих условию $f \restriction A^{<\omega}_{<m} \in U$. Отметим, что множество $\mathcal{F}_{\langle m \rangle}$ замкнуто относительно композиции для каждого клона $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{V}$. Обратно, если множество $U \subseteq \mathcal{V}_{\langle m \rangle}$ замкнуто относительно композиции, то U^+ есть подклон клона $\mathcal{V}$. При этом, если множество U симметрично, то симметричным будет и клон U^+.

Пусть $\mathcal{F}$ есть подклон $\mathcal{V}$. Для каждого двухэлементного множества $B \subseteq A$ множество $\mathcal{F} \restriction B^{<\omega}$ есть клон, эквивалентный некоторому постовскому классу Π функций, сохраняющих $\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}$. Если клон $\mathcal{F}$ симметричный, то класс Π не зависит от выбора множества B. Мы будем обозначать такой постовский класс символом $\Pi(\mathcal{F})$. Очевидно, для каждого симметричного клона $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{V}$ класс $\Pi(\mathcal{F})$ вместе с каждой функцией f содержит двойственную к ней функцию.

Для каждого клона $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}$, содержащего хотя бы одну неселекторную функцию, определим параметр $\mathrm{r}(\mathcal{F})$ равенством

$$\mathrm{r}(\mathcal{F}) = \min\{n < \omega \colon \mathcal{F}_{[n]} \neq \mathcal{E}_{[n]}\}.$$

Положим $\mathrm{r}(\mathcal{E}) = \omega$. Заметим, что $\mathrm{r}(\mathcal{F}) \geqslant 2$ для всякого клона $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{V}$. Вначале мы дадим описание симметричных клонов $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{V}$ с условием $\mathrm{r}(\mathcal{F}) \geqslant 3$.

Пусть дан постовский класс Π самодвойственных функций, сохраняющих $\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}$. Для каждого натурального числа n и функции $h \in \Pi_{[n]}$ определим функцию $h_A\colon A^n_{<3} \to A$ равенством

$$h_A(\mathbf{a}) = \sigma^{-1} h(\sigma \mathbf{a})$$

для каждого $\mathbf{a} \in A^n_{<3}$,где σ – произвольное инъективное отображение из $\operatorname{ran} \mathbf{a}$ в $\{0,1\}$. Корректность определения легко проверяется. Обозначим символом Π_A множество $\{h_A\colon h \in \Pi\}$. Легко проверить, что множество Π_A замкнуто относительно композиции и симметрично.

Напомним, что существует всего четыре постовских класса самодвойственных функций, сохраняющих ноль и единицу. Следуя обозначениям Поста, будем обозначать их символами O_1, D_1, D_2 и L_4. Они, соответственно, порождаются функциями $e(x) = x$, $w(x,y,z) = \overline{x}y \vee \overline{x}z \vee yz$, $\partial(x,y,z) = xy \vee yz \vee xz$ и $\ell(x,y,z) = x \oplus y \oplus z$.

Предложение 1. *Пусть дан произвольный клон $F \subseteq \mathcal{V}$. Пусть $r = \mathrm{r}(\mathcal{F}) \geqslant 3$. Тогда*

(*a*) $\Pi(\mathcal{F}) \in \{O_1, D_1, D_2, L_4\}$ *и* $\mathcal{F}_{\langle 3 \rangle} = \Pi(\mathcal{F})_A$*;*

(*b*) *если* $\mathrm{r}(\mathcal{F}) \geqslant 4$*, то* $\mathcal{F}_{\langle r \rangle} = \mathcal{E}_{\langle r \rangle}$ *(в частности,* $\Pi(\mathcal{F}) = O_1$*).*

Доказательство. Покажем, что имеет место следующий факт:

пусть дана последовательность $\mathbf{a} = a_0 a_1 \ldots a_{n-1} \in A^n_{<r}$*, функция* $f \in \mathcal{F}_{[n]}$ *и функция* $\sigma\colon A \to A$*. Тогда* $f(\sigma \mathbf{a}) = \sigma f(\mathbf{a})$.

Действительно, сначала заметим, что факт верен, если функция f селекторная. Пусть, далее, $\mathbf{b} = (b_0, b_1, \ldots, b_{t-1})$ есть некоторая инъективная последовательность всех различных элементов из $\operatorname{ran} \mathbf{a}$. Положим $\tau = \mathbf{b}^{-1}\mathbf{a}$. Рассмотрим функцию $f' = f(e^t_{\tau(0)}, e^t_{\tau(1)}, \ldots, e^t_{\tau(n-1)}) \in \mathcal{F}_{[t]}$. Поскольку $t < r$, из условия следует, что f' есть селекторная функция. Тогда имеем

$$\sigma f(\mathbf{a}) = \sigma f'(\mathbf{b}) = f'(\sigma \mathbf{b}) = f(e^t_{\tau(0)}(\sigma \mathbf{b}), e^t_{\tau(1)}(\sigma \mathbf{b}), \ldots, e^t_{\tau(n-1)}(\sigma \mathbf{b})) = f(\sigma \mathbf{a}).$$

Факт доказан.

Без ограничения общности будем считать, что множество A содержит элементы 0 и 1. Для каждой функции $f \in \mathcal{F}$ положим $f^* = f \restriction \{0,1\}^{<\omega}$. В силу включения $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{V}$ множество $\{f^*\colon f \in \mathcal{F}\}$, т. е. множество $\mathcal{F} \restriction \{0,1\}^{<\omega}$, есть клон с носителем $\{0,1\}$, а следовательно, постовский класс. Обозначим его символом $\Pi(\mathcal{F})$. Вновь из включения $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{V}$ следует, что каждая функция f^*, $f \in \mathcal{F}$, сохраняет $\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}$. Рассмотрим нетождественную биекцию $\sigma\colon \{0,1\} \to \{0,1\}$. Из доказанного факта следует, что функция f^* самодвойственная. Кроме того, из доказанного факта следует равенство $f \restriction A^{<\omega}_{<3} = f^*_A$ для любой функции $f \in \mathcal{F}$. Это доказывает пункт (a).

Пусть теперь $t \geqslant 4$. Для доказательства утверждения (b), заметим, что если $\Pi(\mathcal{F}) \neq O_1$, то класс $\Pi(\mathcal{F})$ содержат неселекторные функции от трех переменных, что, конечно, остается верным и для клона $\mathcal{F}$. Следовательно, в рассматриваемом случае класс $\Pi(\mathcal{F})$ состоит только из селекторных функций. Пусть f есть произвольная функция из $\mathcal{F}_{[n]}$ и i – такой номер, что $f^* = e^n_i$. Для каждой последовательности $\mathbf{a} \in A^n_{<r}$ выберем функцию $\sigma\colon A \to A$, для которой $\sigma(a_i) = 1$ и $\sigma(x) = 0$ для всех $x \in A \setminus \{a_i\}$. По доказанному факту имеем $\sigma f(\mathbf{a}) = f(\sigma \mathbf{a}) = f^*(\sigma \mathbf{a}) = 1$, откуда $f(\mathbf{a}) = a_i$. Следовательно, $f \restriction A^n_{<r} \in \mathcal{E}_{\langle r \rangle}$, пункт (b) доказан. $\square$

Замечание 2. *Из предложения 1 следует, что для любого клона* $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{V}$ *либо* $\mathbf{r}(\mathcal{F}) = \omega$, *либо* $\mathbf{r}(\mathcal{F}) \leqslant \max\{3, |A|\}$.

Функцию $f \in \mathcal{V}_{[n]}$ будем называть *сильно монотонной*, если для всех последовательностей $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \in A^n_{<3}$, $\mathbf{b} = (b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}) \in A^n$ и элементов $a \in \operatorname{ran} \mathbf{a}$, $b \in \operatorname{ran} \mathbf{a}$ выполнено

$$\{i < n \colon a_i = a\} \subseteq \{i < n \colon b_i = b\} \to (f(\mathbf{a}) = a \to f(\mathbf{b}) = b).$$

Пусть символ $\mathcal{M}$ обозначает множество всех сильно монотонных функций $f \in \mathcal{V}$.

Предложение 3. *Множество* $\mathcal{M}$ *есть симметричный подклон клона* $\mathcal{V}$, $\mathbf{r}(\mathcal{M}) = 3$ *и* $\Pi(\mathcal{M}) = D_2$.

Доказательство. Замкнутость множества $\mathcal{M}$ относительно композиции и его симметричность проверяются непосредственно. Включение $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{M}$ очевидно. Из определения множества $\mathcal{M}$ легко следует неравенство $\mathbf{r}(\mathcal{M}) \geqslant 3$. Классы L_4 и D_1 содержат немонотонные функции, поэтому класс $\Pi(\mathcal{M})$ есть один из классов O_1, D_2. Остается заметить, что любая функция $f \in \mathcal{V}_{[3]}$, для которой $f \restriction A^3_{<3} = \partial_A$, сильно монотонна. $\square$

Для каждого клона $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}$, не содержащегося в $\mathcal{M}$, определим параметр $\mathbf{m}(\mathcal{F})$ равенством

$$\mathbf{m}(\mathcal{F}) = \min\{n < \omega \colon \mathcal{F}_{\langle n \rangle} \nsubseteq \mathcal{M}_{\langle n \rangle}\}.$$

Если $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{M}$, положим $\mathbf{m}(\mathcal{F}) = \omega$. Очевидно, либо $\mathbf{m}(\mathcal{F}) = \omega$, либо $2 \leqslant \mathbf{m}(\mathcal{F}) \leqslant |A|$ для каждого клона $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{V}$. Кроме того, если $\Pi(\mathcal{F}) \in \{L_4, D_1\}$, то $\mathbf{m}(\mathcal{F}) = 2$, если $\Pi(\mathcal{F}) = O_1$, то $\mathbf{m}(\mathcal{F}) = \mathbf{r}(\mathcal{F})$, а если $\mathrm{r}(\mathcal{F}) \geqslant 3$ и $\Pi(\mathcal{F}) = D_2$, то $\mathbf{m}(\mathcal{F}) \geqslant 3$.

Пусть дан клон $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}$ и натуральное число r. Будем говорить, что клон $\mathcal{F}$ удовлетворяет условию

SEP^e_r, если для каждой последовательности $\mathbf{a} \in A^r_r$, номера $i < r$ и элемента $a \in \operatorname{ran} \mathbf{a}$ существует такая функция $f \in \mathcal{F}_{[r]}$, что $f(\mathbf{a}) = a$ и $f \restriction A^r_{<r} = e^r_i \restriction A^r_{<r}$.

Предложение 4. *Пусть дан произвольный симметричный клон* $F \subseteq \mathcal{V}$. *Пусть* $3 \leqslant r = \mathrm{r}(\mathcal{F}) < \omega$ *и* $m = \mathbf{m}(\mathcal{F})$. *Тогда выполнено одно из условий:*

(*a*) $\Pi_{\mathcal{F}} \neq D_2$, *и клон* $\mathcal{F}$ *удовлетворяет условию* SEP^e_r;

(*b*) $\Pi_{\mathcal{F}} = D_2$, *и, если* $m < \omega$, *то клон* $\mathcal{F}$ *удовлетворяет условию* SEP^e_m.

Доказательство. Пусть вначале $r \geqslant 4$. Тогда по предложению 1 каждая функция $f \in \mathcal{F}_{[r]}$ совпадает с некоторой проекцией на множестве $A^r_{<r}$. По определению параметра $\mathbf{r}(\mathcal{F})$ существуют номер $j < r$, функция $g \in \mathcal{F}_{[r]}$ и последовательность $\mathbf{b} \in A^r_r$, для которых $f(\mathbf{b}) \neq b_j$ и $f \restriction A^r_{<r} = e^r_j \restriction A^r_{<r}$. Тогда функцию f с требуемыми свойствами легко найти среди функций $f_\sigma(e_{\tau(0)}, e_{\tau(1)}, \ldots, e_{\tau(r-1)})$, где $\sigma \in S_A$ и $\tau \in S_r$ (упражнение).

Пусть теперь $\mathbf{r}(\mathcal{F}) = 3$. Если $\Pi(\mathcal{F}) = O_1$, рассуждения аналогичны. Если $\Pi(\mathcal{F}) \in \{L_4, D_1\}$, то класс $\Pi(\mathcal{F})$ содержит функцию $\ell(x, y, z) = x \oplus y \oplus z$. Каждую функцию $g \in \mathcal{V}_{[3]}$, для которой $g \restriction A^3_{<3} = \ell_A$, назовем ℓ-функцией. По предложению 1 (и учитывая включение $L_4 \subseteq D_1$) клон $\mathcal{F}$ содержит, по крайней мере, одну ℓ-функцию. Пользуясь симметричностью клона $\mathcal{F}$ для каждой последовательности $\mathbf{a} = (a_0, a_1, a_2)$ и номера $i < 2$, можно найти ℓ-функцию $g_i \in \mathcal{F}$, для которой $g_i(\mathbf{a}) = a_i$ (например, если $g(\mathbf{a}) = a_0$, то можно положить $g_0 = g$, $g_1 = g_{(0,1)}(e_1, e_0, e_2)$ и $g_2 = g_{(0,2)}(e_2, e_1, e_0)$). Рассмотрим функции e_0, $g_0(e_0, g_0, g_1)$ и $g_0(e_0, g_0, g_2)$. Они принимают значения a_0, a_1, a_2 соответственно на последовательности $\mathbf{a}$ и совпадают с проекцией e_0 на множестве $A^3_{<3}$. Далее нужно вновь воспользоваться симметричностью клона $\mathcal{F}$.

Пусть теперь $\Pi(\mathcal{F}) = D_2$ и $m < \omega$. Тогда для некоторого натурального числа $n \geqslant m$ существуют функция $g \in \mathcal{F}_{[n]}$, последовательности $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \in A^n_2$, $\mathbf{b} = (b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}) \in A^n_m$ и элементы $a \in \operatorname{ran} \mathbf{a}$, $b \in \operatorname{ran} \mathbf{b}$, для которых нарушено условие сильной монотонности. Поскольку все функции $h \in D_2$ монотонны, можно считать, что $\{i < n : a_i = a\} = \{i < n : b_i = b\}$. Тогда с помощью отождествления переменных легко найти функцию $g' \in \mathcal{F}$, для которой существуют такой номер $i < m$ и такие последовательности $\mathbf{c} = (c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}) \in (\operatorname{ran} \mathbf{a})^m_2$ и $\mathbf{d} = (d_0, d_1, \ldots, d_{n-1}) \in (\operatorname{ran} \mathbf{b})^m_m$, что $g'(\mathbf{c}) = a$, $g'(\mathbf{d}) = b$, $\{i < m : c_i = a\} = \{i\}$ и $d_i \neq b$. В силу определения параметра $\mathbf{m}(\mathcal{F})$ имеем включение $\mathcal{F}_{\langle m \rangle} \subseteq \mathcal{M}_{\langle m \rangle}$, из которого немедленно следует равенство $g' \restriction A^m_{<m} = e^m_i \restriction A^m_{<m}$. Остается воспользоваться симметричностью клона $\mathcal{F}$, как и в случае $r \geqslant 4$. □

Бинарное отношение $\mathcal{R}$ на множестве $A^{<\omega}$ будем называть *устойчивым справа*, если для всех последовательностей $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A^{<\omega}$ и натуральных чисел n выполнены условия:

1. $\mathbf{a}\mathcal{R}\mathbf{b} \to \operatorname{dom} \mathbf{a} = \operatorname{dom} \mathbf{b}$,
2. $\mathbf{a}\mathcal{R}\mathbf{b} \to \mathbf{a}\tau\mathcal{R}\mathbf{b}\tau$ для любой функции $\tau : n \to \operatorname{dom} \mathbf{a}$.

Бинарное отношение $\mathcal{R}$ на множестве $A^{<\omega}$ будем называть *устойчивым слева*, если для всех последовательностей $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A^{<\omega}$ выполнено условие

3. $\mathbf{a}\mathcal{R}\mathbf{b} \to \sigma\mathbf{a}\mathcal{R}\sigma\mathbf{b}$ для любой перестановки $\sigma \in S_A$.

Будем говорить, что функция $f \in \mathcal{O}$ *действует как проекция* на множестве $Q \subseteq \operatorname{dom} f$, если $f \restriction Q \in \mathcal{E} \restriction Q$. Пусть дано устойчивое справа бинарное отношение $\mathcal{R}$ на множестве $A^{<\omega}$. Обозначим символом $\mathcal{V}_\mathcal{R}$ множество всех функций $f \in \mathcal{V}$, которые действуют как проекция на каждом множестве $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$, где $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \operatorname{dom} f$ и $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathcal{R}$.

Для каждого клона $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}$ символом $\mathcal{R}(\mathcal{F})$ обозначим множество всех пар $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in A^{<\omega} \times A^{<\omega}$, для которых $\operatorname{dom} \mathbf{a} = \operatorname{dom} \mathbf{b}$ и каждая функция $f \in \mathcal{F}_{[\operatorname{dom} a]}$ действует как проекция на множестве $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$.

Последовательности $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A^{<\omega}$ будем называть *подобными*, если существует перестановка σ множества A такая, что $\mathbf{a} = \sigma\mathbf{b}$. Отношение подобия на множестве $A^{<\omega}$ будем обозначать символом $\mathcal{S}$.

Предложение 5. *Пусть дано устойчивое справа бинарное отношение $\mathcal{R}$ на множестве $A^{<\omega}$ и клон $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{V}$. Тогда*

(a) *множество $\mathcal{V}_\mathcal{R}$ есть клон. Если отношение $\mathcal{R}$ устойчиво слева, клон $\mathcal{V}_\mathcal{R}$ симметричный;*

(b) *отношения $\mathcal{R}(\mathcal{F})$ и $\mathcal{R}(\mathcal{F}) \cap \mathcal{S}$ устойчивы справа. Если клон $\mathcal{F}$ симметричный, отношения $\mathcal{R}(\mathcal{F})$ и $\mathcal{R}(\mathcal{F}) \cap \mathcal{S}$ устойчивы слева. Отношение $\mathcal{R}(\mathcal{F}) \cap \mathcal{S}$ есть отношение эквивалентности.*

Доказательство. Непосредственной проверкой. □

Теперь охарактеризуем клоны $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{V}$ с условием SEP^e_r. Для доказательства нам понадобятся следующие технические определения. Пусть дано натуральное число n, последовательности $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A^n$ и клон $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{V}$. Будем говорить, что $\mathcal{F}$ *слабо отделяет* $\mathbf{a}$ от $\mathbf{b}$ *в точке* $a \in \operatorname{ran} \mathbf{a}$, если существуют функции $f_1, f_2 \in \mathcal{F}_{[n]}$, для которых $f_1(\mathbf{a}) = f_2(\mathbf{a}) = a$ и $f_1(\mathbf{b}) \neq f_2(\mathbf{b})$. Если $\mathcal{F}$ слабо отделяет $\mathbf{a}$ от $\mathbf{b}$ или $\mathbf{b}$ от $\mathbf{a}$ хотя бы в одной точке, будем просто говорить, что $\mathcal{F}$ *слабо отделяет* $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Будем говорить, что $\mathcal{F}$ *сильно отделяет* $\mathbf{a}$ от $\mathbf{b}$ *в точке* $a \in \operatorname{ran} \mathbf{a}$, если для каждого элемента $b \in \operatorname{ran} \mathbf{b}$ существует функция $f \in \mathcal{F}_{[n]}$, для которой $f(\mathbf{a}) = a \wedge f(\mathbf{b}) = b$.

Предложение 6. *Пусть дан клон $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{V}$, удовлетворяющий условию SEP^e_r для некоторого натурального числа $r \geqslant 3$. Тогда $\mathcal{F} = \mathcal{F}^+_{\langle r \rangle} \cap \mathcal{V}_{\mathcal{R}(\mathcal{F}) \cap \mathcal{S}}$.*

Доказательство. Пусть дано натуральное число $n \geqslant 1$ и такие последовательности $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A^n$, что $\max\{|\operatorname{ran} \mathbf{a}|, |\operatorname{ran} \mathbf{b}|\} \geqslant r$.

Лемма 7. *Если $|\operatorname{ran} \mathbf{a}| \leqslant |\operatorname{ran} \mathbf{b}|$ и $\mathcal{F}$ слабо отделяет $\mathbf{a}$ от $\mathbf{b}$ в точке $a \in \operatorname{ran} \mathbf{a}$, то $\mathcal{F}$ сильно отделяет $\mathbf{a}$ от $\mathbf{b}$ в точке a.*

Доказательство. Выберем произвольный элемент $b \in \operatorname{ran} \mathbf{b}$. Допустим, что клон $\mathcal{F}$ не содержит такой функции g, что $g(\mathbf{a}) = a$ и $g(\mathbf{b}) = b$. Выберем такие функции $f_0, f_1, f_2 \in \mathcal{F}_{[n]}$ и различные элементы $c, d \in \operatorname{ran} \mathbf{b}$, что

$$f_0(\mathbf{a}) = f_1(\mathbf{a}) = a,\ f_0(\mathbf{b}) = c,\ f_1(\mathbf{b}) = d,\ f_2(\mathbf{b}) = b.$$

По сделанному допущению $b \notin \{c, d\}$. Выберем еще $r-3$ функций $f_3, f_4, \ldots, f_{r-1}$ из $\mathcal{F}$ так, чтобы последовательность $\mathbf{b}^* = (c, d, b, f_3(\mathbf{b}), f_4(\mathbf{b}), \ldots, f_{r-1}(\mathbf{b}))$ была бы инъективной. Последовательность $\mathbf{a}^* = (a, a, f_2(\mathbf{a}), f_3(\mathbf{a}), f_4(\mathbf{a}), \ldots, f_{r-1}(\mathbf{a}))$ принадлежит множеству $A^r_{<r}$. Выберем функцию $f \in \mathcal{F}_{[r]}$, для которой $f(\mathbf{a}^*) = a$ и $f(\mathbf{b}^*) = b$. Рассмотрим функцию $h = f(f_0, f_1, \ldots, f_{r-1})$. Очевидно, $h(\mathbf{a}) = f(\mathbf{a}^*) = a$ и $h(\mathbf{b}) = f(\mathbf{b}^*) = b$, противоречие. $\square$

Лемма 8. *Если $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \notin \mathcal{R}(\mathcal{F}) \cap \mathcal{S}$, то для любых элементов $a \in \operatorname{ran} \mathbf{a}$, $b \in \operatorname{ran} \mathbf{b}$ существует функция $g \in \mathcal{F}_{[n]}$, для которой $g(\mathbf{a}) = a$ и $g(\mathbf{b}) = b$.*

Доказательство. Заметим, что в условиях леммы клон $\mathcal{F}$ слабо отделяет $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Без ограничения общности будем считать, что $|\operatorname{ran} \mathbf{a}| \leqslant |\operatorname{ran} \mathbf{b}|$. Легко проверить, что клон $\mathcal{F}$ слабо отделяет $\mathbf{a}$ от $\mathbf{b}$ в некоторой точке $a \in \operatorname{ran} \mathbf{a}$. В силу леммы 7 достаточно показать, что клон $\mathcal{F}$ слабо отделяет $\mathbf{a}$ от $\mathbf{b}$ в любой точке $a' \in \operatorname{ran} \mathbf{a}$.

Выберем произвольный элемент $a' \in \operatorname{ran} \mathbf{a}$. Используя лемму 7, выберем такие функции $f_0, f_1, \ldots, f_{r-1} \in \mathcal{F}$, что $f_0(\mathbf{a}) = a'$, $f_1(\mathbf{a}) = f_2(\mathbf{a}) = \ldots = f_{r-1}(\mathbf{a}) = a$, и последовательность $\mathbf{b}^* = (f_0(\mathbf{b}), f_1(\mathbf{b}), f_2(\mathbf{b}), \ldots, f_{r-1}(\mathbf{b}))$ инъективная. Последовательность $\mathbf{a}^* = (a', a, \ldots, a)$ принадлежит множеству $A^r_{<r}$. Выберем функцию $f \in \mathcal{F}_{[r]}$, для которой $f(\mathbf{a}^*) = a'$ и $f(\mathbf{b}^*) \neq f_0(\mathbf{b})$. Значения функций f_0 и $h = f(f_0, f_1, f_2, \ldots, f_{r-1})$ равны a' на последовательности $\mathbf{a}$ и различны на последовательности $\mathbf{b}$. $\square$

Теперь докажем предложение 6. Включение $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}^+_{\langle r \rangle} \cap \mathcal{V}_{\mathcal{R}(\mathcal{F}) \cap \mathcal{S}}$ очевидно. Следовательно, достаточно доказать, что для любого натурального числа n, множества $Q \subseteq A^n$ и функции $g \in \mathcal{F}^+_{\langle r \rangle} \cap \mathcal{V}_{\mathcal{R}(\mathcal{F}) \cap \mathcal{S}}$ ограничение $g \restriction Q$ принадлежит $\mathcal{F} \restriction Q$.

Индукция по мощности Q. Если $|Q| = 1$ или $Q \subseteq A^n_{<r}$, утверждение очевидно. Будем считать, что $|Q| \geqslant 2$, $Q \setminus A^n_{<r} \neq \varnothing$, и утверждение доказано для всех множеств Q' мощности, меньшей $|Q|$.

Пусть g есть произвольная функция из $\mathcal{F}^+_{\langle r \rangle} \cap \mathcal{V}_{\mathcal{R}(\mathcal{F}) \cap \mathcal{S}}$. Выберем такие различные последовательности $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in Q$, что $\operatorname{ran} \mathbf{b} \geqslant r$. По предположению индукции клон $\mathcal{F}$ содержит функции $g_{\mathbf{a}}$ и $g_{\mathbf{b}}$, которые совпадают с функцией g соответственно на множествах $Q \setminus \{\mathbf{a}\}$ и $Q \setminus \{\mathbf{b}\}$. Если $g_{\mathbf{b}}(\mathbf{b}) = g(\mathbf{b})$, шаг индукции доказан. В противном случае $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \notin \mathcal{R}(\mathcal{F}) \cap \mathcal{S}$. Используя лемму 8, выберем $r-2$ функций

g_2, g_3, ..., g_{r-1} из $\mathcal{F}$, для которых $g_2(\mathbf{a}) = g_3(\mathbf{a}) = \ldots = g_{r-1}(\mathbf{a}) = g(\mathbf{a})$, а последовательность $\mathbf{b}^* = (g_\mathbf{b}(\mathbf{b}), g(\mathbf{b}), g_2(\mathbf{b}), g_3(\mathbf{b}), \ldots, g_{r-1}(\mathbf{b}))$ инъективная. Выберем функцию $f \in \mathcal{F}_{[r]}$, которая совпадает с селекторной функцией e_0^r на множестве $A^r_{<r}$ и принимает значение $g(\mathbf{b})$ на последовательности $\mathbf{b}^*$. Положим

$$h = f(g_\mathbf{b}, g_\mathbf{a}, g_2, g_3, \ldots, g_{r-1}).$$

Очевидно,

$$h(\mathbf{a}) = f(g(\mathbf{a}), g_\mathbf{a}(\mathbf{a}), g(\mathbf{a}), g(\mathbf{a}), \ldots, g(\mathbf{a})) = g(\mathbf{a}),$$
$$h(\mathbf{b}) = f(\mathbf{b}^*) = g(\mathbf{b}),$$
$$h(\mathbf{x}) = f(g(\mathbf{x}), g(\mathbf{x}), g_2(\mathbf{x}), g_3(\mathbf{x}), \ldots, g_{r-1}(\mathbf{x})) = g(\mathbf{x})$$

для всех последовательностей $\mathbf{x} \in Q \setminus \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$. Шаг индукции доказан. $\square$

Дадим характеризацию симметричных клонов $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{M}$.

Предложение 9. *Пусть дан симметричный клон $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{M}$, удовлетворяющий условиям $\mathbf{r}(\mathcal{F}) = 3$ и $\Pi(\mathcal{F}) = D_2$. Тогда $\mathcal{F} = \mathcal{M} \cap \mathcal{V}_{\mathcal{R}(\mathcal{F}) \cap \mathcal{S}}$.*

Доказательство. Каждую функцию $f \in \mathcal{V}_{[3]}$, для которой $f \restriction A^n_{<3} = \partial_A$, будем называть ∂-функцией. Каждая ∂-функция f удовлетворяет тождествам $f(x,x,y) = f(x,y,x) = f(y,x,x) = x$ для всех $x, y \in A$. Используя симметричность клона $\mathcal{F}$, для каждой последовательности $\mathbf{a} \in A^3_3$ и элемента $a \in \operatorname{ran} \mathbf{a}$ легко найти ∂-функцию $f \in \mathcal{F}$, для которой $f(\mathbf{a}) = a$.

Пусть дано натуральное число $n \geqslant 1$ и последовательности $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}), \mathbf{b} = (b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}) \in A^n$.

Лемма 10. *Если $\mathcal{F}$ слабо отделяет $\mathbf{a}$ от $\mathbf{b}$ в точке $a \in \operatorname{ran} \mathbf{a}$, то $\mathcal{F}$ сильно отделяет $\mathbf{a}$ от $\mathbf{b}$ в точке $a \in \operatorname{ran} \mathbf{a}$.*

Доказательство. Лемма, очевидно, верна, если $|\operatorname{ran} \mathbf{b}| \leqslant 2$. Пусть, напротив, $|\operatorname{ran} \mathbf{b}| \geqslant 3$. Выберем произвольный элемент $b \in \operatorname{ran} \mathbf{b}$. Допустим, что клон $\mathcal{F}$ не содержит такой функции g, что $g(\mathbf{a}) = a$ и $g(\mathbf{b}) = b$. Выберем такие функции $f_0, f_1, f_2 \in \mathcal{F}_{[n]}$ и различные элементы $c, d \in \operatorname{ran} \mathbf{b}$, что

$$f_0(\mathbf{a}) = f_1(\mathbf{a}) = a,\ f_0(\mathbf{b}) = c,\ f_1(\mathbf{b}) = d,\ f_2(\mathbf{b}) = b.$$

По сделанному допущению $b \notin \{c, d\}$, т. е. $(c, d, b) \in A^3_3$. Выберем такую ∂-функцию $f \in \mathcal{F}_{[3]}$, что $f(c, d, b) = b$. Рассмотрим функцию $h = f(f_0, f_1, f_2)$. Очевидно, $h(\mathbf{a}) = a$ и $h(\mathbf{b}) = b$, противоречие. $\square$

Будем говорить, что пара элементов $(a, b) \in \operatorname{ran} \mathbf{a} \times \operatorname{ran} \mathbf{b}$ *связывает* пару $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, если $(\forall i < n)\, a_i = a \vee b_i = b$. Если таких пар (a, b) не существует, последовательности $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ будем называть *несвязанными*.

Лемма 11. *Пусть пара (a, b) связывает пару $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Тогда:*

(*a*) *если $|\operatorname{ran} \mathbf{b}| \geqslant 3$, то $\mathcal{F}$ слабо отделяет $\mathbf{a}$ от $\mathbf{b}$ в точке a;*

(*b*) *$f(\mathbf{a}) = a \vee f(\mathbf{b}) = b$ для любой функции $f \in \mathcal{M}$.*

Доказательство. Пункт (*a*) проверяется непосредственно. Для проверки пункта (*b*), считая, что $2 \subseteq A$, выберем такую последовательность $\mathbf{c} = (c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}) \in 2^n$, что $(\forall i < n)\, c_i = 1 \leftrightarrow a_i = a$. Тогда $f(\mathbf{c}) = 1 \to f(\mathbf{a}) = a$ и $f(\mathbf{c}) = 0 \to f(\mathbf{b}) = b$. $\square$

Лемма 12. *Если последовательности* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *несвязанные и* $(\mathbf{a},\mathbf{b}) \notin \mathcal{R}(\mathcal{F}) \cap \mathcal{S}$, *то для любых элементов* $a \in \operatorname{ran}\mathbf{a}$, $b \in \operatorname{ran}\mathbf{b}$ *существует функция* $g \in \mathcal{F}_{[n]}$, *для которой* $g(\mathbf{a}) = a$ *и* $g(\mathbf{b}) = b$.

Доказательство. Предположим, что клон $\mathcal{F}$ слабо (а по лемме 10 и сильно) отделяет $\mathbf{a}$ от $\mathbf{b}$ по крайней мере в двух различных точках. Тогда клон $\mathcal{F}$ слабо (а по лемме 10 и сильно) отделяет $\mathbf{b}$ от $\mathbf{a}$ в любой точке $b \in \operatorname{ran}\mathbf{b}$, что доказывает лемму. Аналогично, лемма верна, если клон $\mathcal{F}$ слабо отделяет $\mathbf{b}$ от $\mathbf{a}$ по крайней мере в двух различных точках. Остается проверить, что оставшийся случай противоречит условию несвязанности последовательностей $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. □

Теперь так же, как и в предложении 6, достаточно доказать, что для любого натурального числа n, множества $Q \subseteq A^n$ и функции $g \in \mathcal{M} \cap \mathcal{V}_{\mathcal{R}(\mathcal{F})\cap\mathcal{S}}$ ограничение $g \restriction Q$ принадлежит $\mathcal{F} \restriction Q$.

Вновь индукция по мощности Q. Если $|Q| = 1$ или $Q \subseteq A^n_{<3}$, утверждение очевидно. Будем считать, что $|Q| \geqslant 2$, $Q \setminus A^n_{<3} \neq \varnothing$, и утверждение доказано для всех множеств Q' мощности, меньшей $|Q|$.

Пусть g есть произвольная функция из $\mathcal{M} \cap \mathcal{V}_{\mathcal{R}(\mathcal{F})\cap\mathcal{S}}$. Выберем такие различные последовательности $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in Q$, что $\operatorname{ran}\mathbf{b} \geqslant 3$. По предположению индукции клон $\mathcal{F}$ содержит функции $g_{\mathbf{a}}$ и $g_{\mathbf{b}}$, которые совпадают с функцией g соответственно на множествах $Q \setminus \{\mathbf{a}\}$ и $Q \setminus \{\mathbf{b}\}$. Если $g_{\mathbf{b}}(\mathbf{b}) = g(\mathbf{b})$, шаг индукции доказан. В противном случае $(\mathbf{a},\mathbf{b}) \notin \mathcal{R}(\mathcal{F}) \cap \mathcal{S}$. Кроме того, по лемме 11, пункт (b), если пара (a,b) связывает пару $(\mathbf{a},\mathbf{b})$, то $g(\mathbf{a}) = a$. Таким образом, по леммам 11, 12, пункт (a), и 10 клон $\mathcal{F}$ сильно отделяет $\mathbf{a}$ от $\mathbf{b}$ в точке $g(\mathbf{a})$. Пусть $g_{\mathbf{a},\mathbf{b}}$ есть такая функция из $\mathcal{F}$, что $g_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(\mathbf{a}) = g(\mathbf{a})$ и $g_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(\mathbf{b}) = g(\mathbf{b})$. Выберем произвольную ∂-функцию $f \in \mathcal{F}_{[3]}$ и положим $h = f(g_{\mathbf{b}}, g_{\mathbf{a}}, g_{\mathbf{a},\mathbf{b}})$. Очевидно,

$$h(\mathbf{a}) = f(g(\mathbf{a}), g_{\mathbf{a}}(\mathbf{a}), g(\mathbf{a})) = g(\mathbf{a}),$$

$$h(\mathbf{b}) = f(g_{\mathbf{b}}(\mathbf{b}), g(\mathbf{b}), g(\mathbf{b})) = g(\mathbf{b}),$$

$$h(\mathbf{x}) = f(g(\mathbf{x}), g(\mathbf{x}), g_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(\mathbf{x})) = g(\mathbf{x}),$$

для всех последовательностей $\mathbf{x} \in Q \setminus \{\mathbf{a},\mathbf{b}\}$. Шаг индукции доказан. □

Обратимся теперь к случаю $\mathbf{r}(\mathcal{F}) = 2$. Будем говорить, что клон $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}$ удовлетворяет условию

SEP^2_2, если для любых последовательностей $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A^2_2$ с различными областями значений и элементов $a \in \operatorname{ran}\mathbf{a}$, $b \in \operatorname{ran}\mathbf{b}$ существует такая функция $f \in \mathcal{F}_{[2]}$, что $f(\mathbf{a}) = a$, $f(\mathbf{b}) = b$ и $f(x,x) = x$ для всех $x \in A$.

Предложение 13. *Пусть дан такой клон* $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{V}$, *что* $\mathrm{r}(\mathcal{F}) = 2$. *Пусть* $|A| \geqslant 5$. *Тогда клон* $\mathcal{F}$ *удовлетворяет условию* SEP^2_2.

Доказательство. Для каждого номера $i \in \{0,1\}$ обозначим символом $\rhd_i$ бинарное отношение на множестве A^2_2, заданное формулой

$$\mathbf{a} \rhd_i \mathbf{b} \leftrightarrow ((\forall f \in \mathcal{F}_{[2]}) f(\mathbf{a}) = a_i \to f(\mathbf{b}) = b_i)$$

для всех последовательностей $\mathbf{a} = (a_0, a_1), \mathbf{b} = (b_0, b_1) \in A^2_2$.

Легко проверить, что для каждого номера $i \in \{0,1\}$, последовательностей $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A^2_2$ и перестановки $\sigma \in S_A$ выполнено:

(a) отношение $\rhd_i$ рефлексивно и транзитивно;

(b) $\mathbf{a} \rhd_i \mathbf{b} \to \sigma\mathbf{a} \rhd_i \sigma\mathbf{b}$;

(c) $\mathbf{a} \rhd_i \mathbf{b} \to \mathbf{b} \rhd_{1-i} \mathbf{a}$.

Допустим, что клон $\mathcal{F}$ не удовлетворяет условию SEP_2^2. Тогда $\mathbf{a} \rhd_i \mathbf{b}$ для некоторого номера $i \in \{0,1\}$ и последовательностей $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A_2^2$ с различными областями значений. Пользуясь свойствами (a) и (b) (и условием $|A| \geqslant 5$), легко найти такие последовательности $\mathbf{a}^*, \mathbf{b}^* \in A_2^2$, что $\mathbf{a}^* \rhd_i \mathbf{b}^*$ и $\operatorname{ran}\mathbf{a}^* \cap \operatorname{ran}\mathbf{b}^* = \varnothing$. Отсюда по тем же свойствам имеем $\rhd_i = A_2^2 \times A_2^2$. По свойству (c) имеем $\rhd_{1-i} = A_2^2 \times A_2^2$. Противоречие с условием $\mathrm{r}(\mathcal{F}) = 2$. □

Клон $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{V}$ будем называть *свободным*, если он содержит все функции $f \in \mathcal{V}$, для которых $f \upharpoonright B^{<\omega} \in \mathcal{F} \upharpoonright B^{<\omega}$ для каждого двухэлементного множества $B \subseteq A$ (свободный клон $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{V}$ однозначно определяется функцией, которая каждому двухэлементному множеству $B \subseteq A$ ставит в соответствие постовский класс П, эквивалентный клону $\mathcal{F} \upharpoonright B^{<\omega}$).

Предложение 14. *Пусть дан клон $\mathcal{F} \subseteq V$, для которого выполнено условие SEP_2^2. Тогда $\mathcal{F}$ есть свободный клон.*

Доказательство. Пусть дано натуральное число $n \geqslant 1$. Для множества $Q \subseteq A^n$ будем называть функцию $f \in \mathcal{V}_{[n]}$ *допустимой* на множестве Q, если $f \upharpoonright (Q \cap B^n) \in \mathcal{F} \upharpoonright (Q \cap B^n)$ для каждого двухэлементного множества $B \subseteq A$. Достаточно показать, что для каждого множества Q каждая допустимая на множестве Q функция $f \in \mathcal{F}$ принадлежит клону $\mathcal{F}$.

Индукция по мощности множества Q. Если $|Q| = 1$ или $Q \subseteq B^n$ для некоторого двухэлементного множества $B \subseteq A$, утверждение очевидно. Будем считать, что оба этих условия не выполнены, и утверждение доказано для всех множеств Q' мощности, меньшей $|Q|$.

Пусть g есть произвольная допустимая на множестве Q функция из $\mathcal{V}$. По предположению индукции для каждой последовательности $\mathbf{a} \in Q$ существует функция $g_{\mathbf{a}} \in \mathcal{F}$, которая совпадает с функцией g на множестве $Q \setminus \{\mathbf{a}\}$. Если $g_{\mathbf{a}}(\mathbf{a}) = g(\mathbf{a})$ для некоторой последовательности $\mathbf{a} \in Q$, шаг индукции доказан.

Будем далее предполагать, что $g_{\mathbf{a}}(\mathbf{a}) \neq g(\mathbf{a})$ для любой последовательности $\mathbf{a} \in Q$. Для любой последовательности $\mathbf{a} \in Q$ и элемента $a \in \operatorname{ran}\mathbf{a}$ обозначим символом $g_{\mathbf{a},a}$ некоторую функцию из клона $\mathcal{V}$, которая совпадает с функцией g на множестве $Q \setminus \{\mathbf{a}\}$ и принимает значение a на последовательности $\mathbf{a}$. Предположим, что некоторая функция $g_{\mathbf{a},a}$ не допустима на множестве Q. Тогда $|\operatorname{ran}\mathbf{a}| = 2$ и $h(\mathbf{a}) \neq a$ для каждой функции $h \in \mathcal{F}$, которая совпадает с функцией g на множестве $Q \setminus \{\mathbf{a}\}$, в частности, для $h = g_{\mathbf{a}}$. С другой стороны, $a \neq g(\mathbf{a})$, поскольку функция g допустима на множестве Q. Отсюда $g_{\mathbf{a}}(\mathbf{a}) = g(\mathbf{a})$, что противоречит предположению.

Таким образом все функции $g_{\mathbf{a},a}$ допустимы на множестве Q. По предположению индукции для каждой пары различных последовательностей $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in Q$ и элемента $a \in \operatorname{ran}\mathbf{a}$ клон $\mathcal{F}$ содержит функцию $g_{\mathbf{b},\mathbf{a},a}$, которая принимает значение a на последовательности $\mathbf{a}$ и совпадает с с функцией g на множестве $Q \setminus \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$.

Теперь построим функцию $h \in \mathcal{F}_{[n]}$, для которой $h \upharpoonright Q = g \upharpoonright Q$.

Случай 1: $\{g(\mathbf{a}), g_{\mathbf{a}}(\mathbf{a})\} \neq \{g_{\mathbf{b}}(\mathbf{b}), g(\mathbf{b})\}$ для некоторых различных последовательностей $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in Q$. Выберем такие последовательности $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Тогда можно положить $h = f(g_{\mathbf{b}}, g_{\mathbf{a}})$, где $f \in \mathcal{F}_{[2]}$ и

$$f(g(\mathbf{a}), g_{\mathbf{a}}(\mathbf{a})) = g(\mathbf{a}),\ f(g_{\mathbf{b}}(\mathbf{b}), g(\mathbf{b})) = g(\mathbf{b}).$$

Случай 2: $\operatorname{ran}\mathbf{a} \neq \operatorname{ran}\mathbf{b}$ *для некоторых последовательностей* $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in Q$. Выберем такие последовательности $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Без ограничения общности будем считать, что $\operatorname{ran}\mathbf{a} \setminus \operatorname{ran}\mathbf{b} \neq \varnothing$. Выберем элемент $c \in \operatorname{ran}\mathbf{a} \setminus \operatorname{ran}\mathbf{b}$. Тогда можно положить $h = f_0(g_{\mathbf{b}}, f_1(g_{\mathbf{a}}, g_{\mathbf{b},\mathbf{a},c}))$, где $f_0, f_1 \in \mathcal{F}_{[2]}$ и

$$f_0(g(\mathbf{a}), c) = g(\mathbf{a}),\ f_0(g_{\mathbf{b}}(\mathbf{b}), g(\mathbf{b})) = g(\mathbf{b}),$$

$$f_1(f_{\mathbf{a}}(\mathbf{a}), c) = a,\ f_1(f(\mathbf{b}), g_{\mathbf{b},\mathbf{a},c}(\mathbf{b})) = g(\mathbf{b}).$$

Случай 3: случаи 1-2 не выполнены. Обозначим множество $\operatorname{ran}\mathbf{a}$ для некоторой (любой) последовательности $\mathbf{a} \in Q$ символом B. Заметим, что $|B| \geqslant 3$.

Подслучай 3.1: существуют такие различные последовательности $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in Q$, *что* $g(\mathbf{a}) = g(\mathbf{b})$. Выберем такие последовательности $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Обозначим символом a элемент $g(\mathbf{a})$. Из невыполненности случая *1* следует, что $g_{\mathbf{a}}(\mathbf{a}) = g_{\mathbf{b}}(\mathbf{b}) = b$ для некоторого элемента $b \in \operatorname{ran}\mathbf{b} \setminus \{a\}$. Выберем элемент $c \in B \setminus \{a, b\}$. Тогда можно положить $h = f_0(g_{\mathbf{b}}, f_1(g_{\mathbf{a}}, g_{\mathbf{b},\mathbf{a},c}))$, где $f_0, f_1 \in \mathcal{F}_{[2]}$ и

$$f_0(a, c) = f_0(b, a) = a,\ f_1(b, c) = c,\ f_1(a, g_{\mathbf{b},\mathbf{a},c}(\mathbf{b})) = a.$$

Подслучай 3.2: $g(\mathbf{a}) \neq g(\mathbf{b})$ *для всех последовательностей* $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in Q$. Пусть сначала множество Q состоит ровно из двух последовательностей $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Покажем, что для каждого элемента $c \in B$, кроме, быть может, одного, существует такая функция $h_c \in \mathcal{F}_{[n]}$, что $h_c(\mathbf{a}) = c \neq h_c(\mathbf{b})$. Действительно, поскольку $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$, существует такая проекция $e \in \mathcal{E}_{[n]}$, что $e(\mathbf{a}) \neq e(\mathbf{b})$. Положим $e(\mathbf{a}) = u$ и $e(\mathbf{b}) = v$. Пусть $c \in B \setminus \{v\}$. Выберем такую проекцию $e' \in \mathcal{E}_{[n]}$, что $e'(\mathbf{a}) = c$, и такую функцию $f \in \mathcal{F}_{[2]}$, что $f(u, c) = c$ и $f(v, c) = v$. Тогда в качестве h_c подходит одна из функций e' и $f(e, e')$.

Положим $g(\mathbf{a}) = a$ и $g(\mathbf{b}) = b$. Из невыполненности случая *1* следует, что $g_{\mathbf{a}}(\mathbf{a}) = b$ и $g_{\mathbf{b}}(\mathbf{b}) = a$. Выберем элемент $c \in B \setminus \{b\}$, для которого определена функция h_c с указанным свойством. Тогда можно положить $h = f_0(g_{\mathbf{b}}, f_1(g_{\mathbf{a}}, h_c))$, где $f_0, f_1 \in \mathcal{F}$ и

$$f_0(a, c) = a,\ f_0(a, b) = b,\ f_1(b, c) = c,\ f_1(b, h_c(\mathbf{b})) = b.$$

Пусть теперь $|Q| \geqslant 3$. Выберем различные последовательности $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in Q$. Пусть $g(\mathbf{a}) = a$, $g(\mathbf{b}) = b$ и $g(\mathbf{c}) = c$. Функции $g_{\mathbf{a},b}$ и $g_{\mathbf{b},c}$ допустимы на множестве Q и удовлетворяют условиям подслучая *3.2*. Поэтому существуют функции $h_{\mathbf{a},b}, h_{\mathbf{b},c} \in \mathcal{F}$, которые на всем множестве Q соответственно совпадают с функциями $g_{\mathbf{a},b}$ и $g_{\mathbf{b},c}$. Тогда можно положить $h = f(h_{\mathbf{a},b}, h_{\mathbf{b},c})$, где $f \in \mathcal{F}_{[2]}$ и

$$f(b, a) = a,\ f(b, c) = b.$$

Шаг индукции доказан. □

Свободный клон $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{V}$, для которого все клоны $\mathcal{F} \restriction B^{<\omega}$, $B \subseteq A$ и $|B| = 2$, эквивалентны одному и тому же постовскому классу Π, будем обозначать символом Π^*_A. Очевидно, свободный клон $\mathcal{F}$ симметричен тогда и только тогда, когда $\mathcal{F} = \Pi^*_A$ для некоторого постовского класса Π, состоящего из функций, сохраняющих $\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}$, и замкнутого относительно перехода к двойственной функции. Напомним, что помимо классов O_1, D_1, D_2, L_4 этим свойством обладают только два: класс C_4 всех булевых функций, сохраняющих $\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}$, и класс A_4 всех монотонных функций из C_4.

Теперь сформулируем основную теорему, которая вытекает из доказанных предложений.

Теорема 15. *Пусть дано конечное множество A мощности не менее 5 и клон $\mathcal{F}$ на множестве A, состоящий из функций, сохраняющих все одноместные предикаты. Тогда клон $\mathcal{F}$ симметричен тогда и только тогда, когда существуют такие параметры $r, m \in \{3, 4, \ldots, |A|\} \cup \{\omega\}$ и такое устойчивое слева и справа отношение эквивалентности $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$ на множестве $A^{<\omega}$, что имеет место один из случаев:*

(*a*) $\mathcal{F} = \mathcal{G} \cap \mathcal{V}_{\mathcal{R}}$, *где $\mathcal{G}$ есть один из клонов $\mathcal{E}^{+}_{\langle r\rangle}$, $\mathcal{M}^{+}_{\langle m\rangle}$ или Π^{+}_{A} для некоторого класса $\Pi \in \{D_1, L_4\}$;*

(*b*) $\mathcal{F} = \Pi^{*}_{A}$ *для некоторого класса* $\Pi \in \{O_1, D_1, D_2, L_4, A_4, C_4\}$.

Замечание Очевидно, если $\mathrm{r}(\mathcal{F}) \geqslant 3$, то отношение $\mathcal{R}(\mathcal{F})$ содержит подмножество $(A^{\leq\omega}_{<3} \times A^{\leq\omega}_{<3}) \cap \mathcal{S}$, и имеют место равенства $\Pi(\mathcal{F})^{+}_{A} \cap \mathcal{V}_{\mathcal{R}(\mathcal{F})} = \Pi(\mathcal{F})^{*}_{A} \cap \mathcal{V}_{\mathcal{R}(\mathcal{F})}$. Кроме того, если $\mathrm{r}(\mathcal{F}) = 2$ и $|A| \geqslant 5$, то отношение $\mathcal{R}(\mathcal{F})$ совпадает с отношением равенства, и $\Pi^{*}_{A} = \Pi^{*}_{A} \cap \mathcal{V}_{\mathcal{R}(\mathcal{F})}$. Поэтому эквивалентную формулировку теоремы 15 можно получить, отбросив случай (b) и заменив в случае (a) слова "... *или Π^{+}_{A} для некоторого класса $\Pi \in \{D_1, L_4\}$*" на "... *или Π^{*}_{A} для некоторого класса $\Pi \in \{O_1, D_1, D_2, L_4, A_4, C_4\}$*".

Заметим еще, что несложно дать явное описание всех устойчивых слева и справа отношений эквивалентности $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$ и продолжить классификацию на случай $|A| \leqslant 4$. Однако для многих следствий в теории коллективного выбора достаточно доказанной теоремы. В частности, из нее легко получить, что при $|A| \geqslant 5$ и $k \geqslant 3$ каждое симметричное непустое собственное подмножество $\mathfrak{D}$ множества всех функций выбора из k-элементных подмножеств A сохраняется только проекциями.

Литература

[1] Arrow K. A difficulty in the theory of social welfare // J. of Political Economy. 1950. № 58. P. 328–346.

[2] Fishburn P. The Theory of Social Choice. Princeton: Princeton University Press, 1973.

[3] Shelah S. On the Arrow property // Advances in Applied Mathematics. 2005. № 34. P. 217–251. math.LO/0112213.

[4] Post E.L. Two-valued iterative systems of mathematical logic // Annal of Math. studies. 1941. V. 5.

[5] Нгуен Ван Хоа. О семействах замкнутых классов k-значной логики, сохраняемых всеми автоморфизмами // Дискретная математика. 1993. Т. 5. Вып. 4.

[6] Марченков С.С. Замкнутые классы булевых функций. М.: Физматлит, 2000.

[7] Марченков С.С. Функциональные системы с операцией суперпозиции. М.: Физматлит, 2004.

[8] Теория Галуа для алгебр Поста / В.Г. Боднарчук [и др.] // Кибернетика, 1969. Вып. 3, 5.

Поступила в редакцию 22/III/2013;
в окончательном варианте — 22/III/2013.

ON SYMMETRIC CLOSED CLASSES OF FUNCTION PRESERVING EVERY UNARY PREDICATE

© 2013 N.L. Polyakov[3], M.V. Shamolin[4]

The activity presents an efficient description of symmetric closed classes of discrete functions preserving every unary predicate.

Key words: closed class, clone, Galois correspondence, theory of collective choice.

Paper received 22/*III*/2013.
Paper accepted 22/*III*/2013.

[3]Polyakov Nikolay Lvovich (`gelvella@mail.ru`), the Dept. of Mathematics-1, Financial University under the Government of the Russian Federation, Moscow, 101000, Russian Federation.

[4]Shamolin Maxim Vladimirovich (`shamolin@imec.msu.ru`), Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119192, Russian Federation.