УДК 519.642

О РАВНОМЕРНОЙ АППРОКСИМАЦИИ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ I РОДА

© 2013 А.В. Ожегова[1], Л.Э. Хайруллина[2]

В статье исследуется граничная задача для сингулярного интегродифференциального уравнения с ядром Коши первого рода. Вводится пара весовых пространств, в которых доказывается корректность рассматриваемой задачи. Устанавливаются достаточные условия сходимости общего прямого метода, метода ортогональных многочленов в введенных пространствах и, как следствие, равномерные оценки погрешности приближенного решения.

Ключевые слова: сингулярное интегродифференциальное уравнение, приближенное решение, корректность задачи.

Введение

Данная работа посвящена исследованию равномерной сходимости приближенных решений сингулярного интегродифференциального уравнения вида

$$Ax \equiv \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{x'(\tau)}{t-\tau}d\tau + Q(x;t) = y(t), \quad -1 < t < 1, \tag{1}$$

где $x(\tau)$ — искомая функция, $y(t)$ — данная функция, Q — данный линейный оператор при краевых условиях

$$x(-1) = x(1) = 0, \tag{2}$$

а сингулярный интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

Традиционно интегральные уравнения I рода относят к классу некорректно поставленных задач, кроме того, наличие сингулярности в ядре также указывает на некорректность во многих функциональных пространствах, в том числе и пространствах непрерывных функций. Однако необходимость применения приближенных методов решения указанного уравнения требует их теоретического обоснования и установления равномерных оценок погрешностей.

[1]Ожегова Алла Вячеславовна (alla.ozhegova@ksu.ru), кафедра теории функций и приближений Казанского (Приволжского) федерального университета, 420008, Российская Федерация, г. Казань, ул. Кремлевская, 18.

[2]Хайруллина Лилия Эмитовна (lxayrullina@yandex.ru), кафедра информационных систем Казанского (Приволжского) федерального университета, 420008, Российская Федерация, г. Казань, ул. Кремлевская, 18.

Рассматриваемому уравнению посвящено достаточно много работ [1; 2], поскольку оно имеет многочисленные приложения в теории упругости, теории фильтрации, теории управления и устойчивых процессах, а также при определенном выборе $Q(x;t)$ является уравнением теории крыла. До настоящего времени исследования проводились в пространствах Гельдеровых функций или весовых пространствах квадратично-суммируемых функций.

В данной работе используется методика выбора пары пространств искомых элементов и правых частей на основе сужения пространств непрерывных функций, в которых рассматриваемая задача (1)–(2) является корректной, что позволяет далее теоретически обосновать различные прямые методы и получить равномерные оценки погрешности приближенного решения.

Указанный подход применялся ранее авторами к решению интегрального уравнения I рода с логарифмической особенностью в ядре [3] и сингулярному интегральному уравнению I рода с ядром Коши на отрезке вещественной оси [4].

1. Корректность постановки задачи

Пусть

$$I\varphi \equiv I(\varphi;t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau)}{t-\tau}d\tau$$

— сингулярный интеграл с ядром Коши, понимаемым в смысле главного значения по Коши, $\rho(t) = \sqrt{1-t^2}$, $q(t) = \frac{1}{\rho(t)}$.

Обозначим через X пространство непрерывно дифференцируемых на $[-1,1]$ функций $x(t)$, удовлетворяющих условию (2), таких, что $\rho I x'$ является функцией непрерывной с нормой

$$\|x\|_X = \|\rho x'\|_C + \|\rho I x'\|_C, \tag{3}$$

где

$$\|x\|_C = \max_{-1\leqslant t\leqslant 1} |x(t)|.$$

В качестве пространства правых частей Y выберем пространство непрерывных функций $y(t)$ таких, что $I(\rho y)$ также непрерывная функция. Норму в Y введем соотношением

$$\|y\|_Y = \|\rho y\|_C + \|I(\rho y)\|_C. \tag{4}$$

Полнота пространства Y была установлена в [5]. Полнота пространства X будет следовать из полученных ниже результатов.

Установим необходимые для дальнейшего свойства характеристического оператора $G : X \to Y$, где

$$Gx \equiv G(x;t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \frac{x'(\tau)}{t-\tau}d\tau.$$

Лемма 1. *Оператор $G : X \to Y$ является линейным ограниченным, причем*

$$\|G\|_{X\to Y} = 1.$$

Доказательство. Представим $x(t)$ в виде

$$x(t) = \sqrt{1-t^2}\psi(t) = \sqrt{1-t^2}\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k U_{k-1}(t), \tag{5}$$

где
$$U_{k-1}(t)=\frac{\sin k\arccos t}{\sqrt{1-t^2}},\quad k=1,2,...$$
— полиномы Чебышева II рода, а
$$\gamma_k=c^U_{k-1}(\psi)=\frac{2}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\psi(t)U_{k-1}(t)dt.$$

Вычислим
$$G(x;t)=\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{(\sin k\arccos t)'}{t-\tau}d\tau=\sum_{k=1}^{\infty}k\gamma_k I(qT_k;t),$$
где $T_k(t)=\cos k\arccos t,\quad k=0,1,2,...$ — полиномы Чебышева I рода k-й степени. С учетом известного [1; 2] соотношения
$$I(qT_k;t)=U_{k-1}(t) \tag{6}$$
получим
$$G(x;t)=\sum_{k=1}^{\infty}k\gamma_kU_{k-1}(t). \tag{7}$$

С учетом известного [1] соотношения
$$I(\rho U_{k-1};t)=T_k(t) \tag{8}$$
и определения норм (4), (5) найдем
$$\|Gx\|_Y=\|\rho Gx\|_C+\|I(\rho Gx)\|_C=\left\|\sum_{k=1}^{\infty}k\sin k\arcsin t\right\|_C+\left\|\sum_{k=1}^{\infty}k\gamma_kI(\rho U_{k-1};t)\right\|_C=$$
$$=\left\|\rho(t)\sum_{k=1}^{\infty}k\gamma_kU_{k-1}(t)\right\|_C+\left\|\sum_{k=1}^{\infty}k\gamma_k\cos k\arccos t\right\|_C=\|\rho Ix'\|_C+\|\rho x'\|_C=\|x\|_X.$$

Откуда и следует, что $\|G\|_{X\to Y}=1$.

Лемма 2. *Оператор $G:X\to Y$ непрерывно обратим и*
$$\|G^{-1}\|=1,\quad G^{-1}:Y\to X.$$

Доказательство. Рассмотрим характеристическое уравнение
$$Gx=y,\quad x\in X,y\in Y \tag{9}$$
при условиях (2). Решение уравнения (9) будем искать в виде (5), а правую часть $y(t)$ представим в виде ряда Фурье по полиномам Чебышева II рода. Тогда имеем
$$\sum_{k=1}^{\infty}k\gamma_kU_{k-1}(t)=\sum_{k=1}^{\infty}c^U_{k-1}(y)U_{k-1}(t).$$

Используя метод неопределенных коэффициентов, находим
$$\gamma_k=\frac{c^U_{k-1}(y)}{k},$$

и потому решение $x^*(t)$ уравнения (9) существует при любой правой части $y \in Y$ и представимо в виде

$$x^*(t) = G^{-1}y = \sqrt{1-t^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_{k-1}^U(y)}{k}U_{k-1}(t).$$

Оценим, используя (4), (5), (8),

$$\|G^{-1}y\|_X = \left\|\sqrt{1-t^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_{k-1}^U(y)}{k}(\sin k\arccos t)'\right\|_C +$$

$$+\left\|\sqrt{1-t^2}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{t-\tau}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_{k-1}^U(y)}{k}(\sin k\arccos\tau)'d\tau\right\|_C =$$

$$= \left\|\sum_{k=1}^{\infty}c_{k-1}^U(y)T_k(t)\right\|_C + \left\|\sqrt{1-t^2}\sum_{k=1}^{\infty}c_{k-1}^U(y)U_{k-1}(t)\right\|_C =$$

$$= \|I(\rho y)\|_C + \|\rho y\|_C = \|y\|_Y,$$

откуда и следует утверждение леммы.

В силу леммы 2 уравнение (1) является уравнением, приводящимся к уравнению II рода, причем оператор $G^{-1}Q : X \to X$ будет вполне непрерывным, если таковым является оператор $Q : X \to Y$. Тогда из теории Рисса-Шаудера [5] следует

Теорема 1. *Пусть $Q : X \to Y$ вполне непрерывный оператор и однородная задача, соответствующая (1), (2), имеет лишь тривиальное решение. Тогда оператор $A = G + Q : X \to Y$ непрерывно обратим.*

2. Аппроксимативные методы

2.1. Общий прямой метод. Пусть приближенное решение задачи (1), (2) находится как точное решение следующего уравнения:

$$A_n x_n \equiv Gx_n + Q_n x_n = y_n, \quad x_n \subset X_n \subset X, y_n \subset Y_n \subset Y, \tag{10}$$

$$x_n(-1) = x_n(1) = 0, \tag{11}$$

где X_n- есть подпространство X элементов вида

$$x_n(t) = \sqrt{1-t^2}\sum_{k=1}^{n}\gamma_k U_{k-1}(t) = \sum_{k=1}^{n}\gamma_k \sin k\arccos t, \tag{12}$$

Y_n- множество алгебраических полиномов степени не выше $n-1$, $Y_n \subset Y$, $Q_n : X_n \to Y_n$ и $y_n \in Y_n-$ некоторые аппроксимации соответственно оператора $Q : X \to Y$ и функции $y(t)$. Из теоремы 7 главы I [6] следует

Теорема 2. *Если оператор $A = G + Q : X \to Y$ непрерывно обратим и выполнено условие*

$$\varepsilon_n = \|Q - Q_n\|_{X_n \to Y} \to 0, \quad n \to \infty,$$

то при всех $n \in N$ таких, что

$$q_n \equiv \varepsilon_n\|A^{-1}\| < 1,$$

операторы $A_n : X_n \to Y_n$ *непрерывно обратимы и*

$$\|A_n^{-1}\| = \frac{\|A^{-1}\|}{1-q_n} = O(1).$$

Если, кроме того,

$$\delta_n \equiv \|y - y_n\|_Y \to 0, \quad n \to \infty,$$

то приближенные решения $x_n^* = A_n^{-1} y_n$ *сходятся в* X *к точному решению* $x^* = A^{-1}y$, *причем*

$$\|x_n^* - x^*\|_X \leqslant \frac{\|A^{-1}\|}{1-q_n}\left(\delta_n + q_n\|y\|_Y\right) = O(\varepsilon_n + \delta_n). \tag{13}$$

Следствие. *В условиях теоремы будет иметь место равномерная сходимость приближенных решений к точному со скоростью*

$$\|x_n^* - x^*\|_C = O\left(\varepsilon_n + \delta_n\right),$$

$$\|\rho(x_n^{*\prime} - x^{*\prime})\|_C = O(\varepsilon_n + \delta_n). \tag{14}$$

Доказательство. Имеем в силу (2)

$$|x(t)| = \left|\int_{-1}^{t} x'(\tau)d\tau\right| = \left|\int_{-1}^{t} \frac{\rho(\tau)x'(\tau)}{\rho(\tau)}d\tau\right| \leqslant \|\rho x'\|_C \left|\int_{-1}^{t} \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}\right| =$$

$$= \|\rho x'\|_C \left(\arcsin t + \frac{\pi}{2}\right) \leqslant \left(\arcsin t + \frac{\pi}{2}\right)\|x\|_X, \quad t \in [-1,1].$$

Аналогично

$$|x(t)| = \left|\int_{t}^{1} x'(\tau)d\tau\right| \leqslant \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin t\right)\|x\|_X, \quad t \in [-1,1].$$

Откуда следует

$$\|x\|_C \leqslant \frac{\pi}{2}\|x\|_X.$$

Соотношение (14) следует из оценки (13) и определения нормы (3).

В качестве конкретной реализации общего прямого метода рассмотрим проекционный метод. Воспользуемся известной вычислительной схемой метода ортогональных многочленов.

Приближенное решение будем искать в виде (12). Тогда условия (2) для $x_n(t)$ выполнены. Неизвестные коэффициенты найдем из условия ортогональности невязки полиномам Чебышева II рода. Получим следующую систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$i\gamma_i + \sum_{k=1}^{n} \beta_{ik}\gamma_k = c_{i-1}^U(y), \quad i = \overline{1,n}, \tag{15}$$

где $\beta_{ik} = c_{i-1}^U(Q(\sin k \arccos t, t_i))$.

Пусть Φ^U_{n-1}– оператор Фурье, ставящий в соответствие любой функции $\varphi \in \in L[-1,1]$ ее отрезок ряда Фурье

$$\Phi^U_{n-1}\varphi = \Phi^U_{n-1}(\varphi;t) = \sum_{k=1}^{n} c^U_{k-1}(\varphi)U_{k-1}(t).$$

Очевидно, что СЛАУ (15) эквивалентна следующему операторному уравнению:

$$A_n x_n \equiv G x_n + \Phi^U_{n-1} Q x_n = \Phi^U_{n-1} y, \quad x_n \in X_n, \Phi^U_{n-1} y \in Y_n.$$

Учитывая полученные в работе [4] оценки нормы оператора Φ^U_n, а также оценки приближения функции отрезками рядов Фурье по полиномам Чебышева II рода в пространстве Y, с помощью теоремы 2 устанавливаются достаточные условия однозначной разрешимости СЛАУ (15) и равномерные оценки погрешности приближенных решений $x^*_n(t) = A^{-1}_n y_n$ к точному $x^*(t)$ и их производных.

В частности, если $y(t) \in W^r H_\alpha[-1,1]$, $Q(x;t) \in W^r H_\alpha[-1,1]$, где $W^r H_\alpha[-1,1]$ — множество функций, имеющих непрерывные производные до r-го порядка, удовлетворяющие условию Гельдера с показателем α, $0 < \alpha \leqslant 1$, $r \geqslant 0$, то

$$\|x^*_n - x^*\|_C = O\left(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha}}\right),$$

$$\|\rho(x^{*\prime}_n - x^{*\prime})\|_C = O\left(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha}}\right), 0 < \alpha \leqslant 1, r \geqslant 0, n \in N.$$

Литература

[1] Габдулхаев Б.Г. Прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений I рода. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1994. 285 с.

[2] Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М.: ТОО "Янус", 1995. 520 с.

[3] Ожегова А.В. Равномерные приближения решений слабо сингулярных интегральных уравнений первого рода: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Казань, 1996. 96 с.

[4] Хайруллина Л.Э. Равномерная сходимость приближенных решений сингулярного интегрального уравнения первого рода с ядром Коши: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Казань, 2011. 103 с.

[5] Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. 4-е изд., испр. СПб.: БВХ-Петербург, 2004. 816 с.

[6] Габдулхаев Б.Г. Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1980. 232 с.

Поступила в редакцию 11/*IV*/2013;
в окончательном варианте — 26/ *VI*/2013.

ON THE UNIFORM CONVERGENCE OF THE APPROXIMATE SOLUTION OF SINGULAR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION OF THE FIRST KIND

© 2013 A.V. Ozhegova,[3] L.E. Hayrullina[4]

The article presents the study of the boundary problem for singular integro-differential equation of the first kind with Cauchy kernel. The authors introduce the pair of weight spaces to prove the correctness of the stated problem. The article states the sufficient conditions for the convergence of the general direct method, the method of orthogonal polynomials, and as a result uniform estimates for errors of approximate solution.

Key words: singular integro-differential equation, approximate solution, correctness of the problem.

Paper received $11/IV/2013$.
Paper accepted $26/VI/2013$.

[3]Ozhegova Alla Vyacheslavovna (alla.ozhegova@ksu.ru), the Dept. of Theory of Functions and Approximations, Kazan (Volga Region) Federal University, Kazan, 420008, Russian Federation.

[4]Hayrullina Lilia Emitovna (lxayrullina@yandex.ru), the Dept. of Information Systems, Kazan (Volga Region) Federal University, Kazan, 420008, Russian Federation.