УДК 517.95

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

© 2013 Е.П. Мелишева[1]

В работе установлены необходимые и достаточные условия единственности решения первой граничной задачи для нагруженного вырождающегося уравнения Лаврентьева — Бицадзе в прямоугольной области. Решение поставленной задачи построено в виде суммы ряда по собственным функциям соответствующей одномерной задачи на собственные значения. Показана устойчивость решения от граничных функций.

Ключевые слова: нагруженное вырождающееся уравнение смешанного типа, задача Дирихле, спектральный метод, единственность, существование, устойчивость.

Введение

Рассмотрим нагруженное уравнение смешанного типа

$$Lu\,(x,y) = K\,(y)\,u_{xx} + u_{yy} - b^2 K\,(y)\,u\,(x,y) + C\,(y)\,u\,(x,0) = 0 \tag{1}$$

в прямоугольной области $D = \{(x,y) : 0 < x < 1, -\alpha < y < \beta\}$, где $K\,(y) = sgn\, y \times |y|^n$, $n > 0$, $b > 0$, α, β – заданные положительные действительные числа, $C\,(y) = C_1\,(y)$ при $y \geqslant 0$, $C\,(y) = C_2\,(y)$ при $y \leqslant 0$, $C_i\,(y)$, $i = 1, 2$ – заданные непрерывные функции.

Задача Дирихле. Найти в области D функцию $u\,(x, y)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$u\,(x,\,y) \in C^1\left(\overline{D}\right) \cap C^2\,(D_+ \cup D_-)\,; \tag{2}$$

$$Lu\,(x,\,y) \equiv 0, \quad (x,\,y) \in D_+ \cup D_-; \tag{3}$$

$$u\,(0,\,y) = u\,(1,\,y) = 0, \quad -\alpha \leqslant y \leqslant \beta; \tag{4}$$

$$u\,(x,\,\beta) = \varphi\,(x)\,, u\,(x,\,-\alpha) = \psi\,(x)\,, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{5}$$

где $\varphi\,(x)$, $\psi\,(x)$ – заданные достаточно гладкие функции, при этом $\varphi\,(0) = \varphi\,(1) = \psi\,(0) = \psi\,(1) = 0$, $D_+ = D \cap \{y > 0\}$, $D_- = D \cap \{y < 0\}$.

Отметим, что в работе [1] для нагруженного параболо-гиперболического уравнения в прямоугольной области изучена начально-граничная задача, в которой

[1]Мелишева Екатерина Петровна (melisheva86@mail.ru), кафедра математики и методики обучения Поволжской государственной социально-гуманитарной академии, 443090, Российская Федерация, г. Самара, ул. Антонова-Овсеенко, 26.

методом спектральных разложений [2; 3] установлен критерий единственности ее решения, которое построено в виде суммы ряда по собственным функциям соответствущей одномерной задачи на собственные значения. Задача Дирихле для уравнения (1) при $C(y) \equiv 0$ изучалась в работах [3–9].

Ранее в работах [10—16] изучены краевые задачи (локальные и нелокальные) для нагруженных дифференциальных уравнений в частных производных отдельных и смешанных типов в классических областях, т. е. в областях, у которых гиперболическая часть представляет собой характеристический треугольник.

В данной работе, следуя [3], установлен критерий единственности решения задачи Дирихле для нагруженного вырождающегося уравнения смешанного типа (1) в прямоугольной области D. Решение задачи (2)–(5) построено в виде суммы ряда Фурье. Показана устойчивость решения от граничных функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Эта задача при $n = 0$ изучена в работах автора [17; 18].

1. Единственность решения

Пусть $u(x, y)$ – решение задачи (2)–(5). Следуя [3], рассмотрим функцию

$$u_k(y) = \sqrt{2}\int\limits_0^1 u(x, y)\sin \pi kx dx. \tag{6}$$

На основании (6) введем функцию

$$u_{k,\varepsilon}(y) = \sqrt{2}\int\limits_\varepsilon^{1-\varepsilon} u(x, y)\sin \pi kx dx, \tag{7}$$

где ε — достаточно малое число. На основании (6), с учетом уравнения (1) и однородных граничных условий (4), получим

$$u_k''(y) - \lambda_k^2 y^n u_k(y) = -C_1(y)\, u_k(0), \qquad y > 0, \tag{8}$$

$$u_k''(y) + \lambda_k^2 (-y)^n u_k(y) = -C_2(y)\, u_k(0), \qquad y < 0, \tag{9}$$

где $\lambda_k^2 = b^2 + (\pi k)^2$.

На основании работы [3] найдем общее решение дифференцильных уравнений (8) и (9):

$$u_k(y) = \begin{cases} a_k\sqrt{y}I_{\frac{1}{2q}}(p_k y^q) + b_k\sqrt{y}K_{\frac{1}{2q}}(p_k y^q) + b_k\gamma_k C_{1k}(y), & y > 0, \\ c_k\sqrt{-y}J_{\frac{1}{2q}}(p_k(-y)^q) + d_k\sqrt{-y}Y_{\frac{1}{2q}}(p_k(-y)^q) + & \\ +d_k\gamma_k C_{2k}(y), & y < 0, \end{cases} \tag{10}$$

здесь a_k, b_k, c_k, d_k — произвольные постоянные, $q = (n+2)/2$, $p_k^2 = \lambda_k^2/q^2$, $I_{\frac{1}{2q}}(z)$ и $K_{\frac{1}{2q}}(z)$ — модифицированные функции Бесселя первого и третьего рода, $J_{\frac{1}{2q}}(z)$ и $Y_{\frac{1}{2q}}(z)$ — функции Бесселя первого и второго рода соответственно, $\gamma_k = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2q}\right)}{2q}\left(\frac{2}{p_k}\right)^{\frac{1}{2q}}$,

$$C_{1k}(y) = \sqrt{y}\int\limits_0^y C_1(t)\sqrt{t}\left[I_{\frac{1}{2q}}(p_k t^q)\, K_{\frac{1}{2q}}(p_k y^q) - K_{\frac{1}{2q}}(p_k t^q)\, I_{\frac{1}{2q}}(p_k y^q)\right] dt, \tag{11}$$

$$C_{2k}\left(y\right)=\sqrt{-y}\int\limits_{y}^{0}C_{2}\left(t\right)\sqrt{-t}\times$$

$$\times\left[Y_{\frac{1}{2q}}\left(p_k(-y)^q\right)J_{\frac{1}{2q}}\left(p_k(-t)^q\right)-J_{\frac{1}{2q}}\left(p_k(-y)^q\right)Y_{\frac{1}{2q}}\left(p_k(-t)^q\right)\right]dt. \qquad (12)$$

Лемма 1. *Функции $b_k\gamma_k C_{1k}(y)$ и $d_k\gamma_k C_{2k}(y)$: 1) являются решениями дифференциальных уравнений (8) на $[0,\beta]$ и (9) на $[-\alpha,0]$ соответственно; 2) удовлетворяет условиям:*

$$C_{1k}(0+0)=C_{1k}^{'}(0+0)=0,\ C_{1k}^{''}(0+0)=-qC_1(0), \qquad (13)$$

$$C_{2k}(0-0)=C_{2k}^{'}(0-0)=0,\ C_{2k}^{''}(0-0)=\frac{2qC_2(0)}{\pi}. \qquad (14)$$

Доказательство. На основании формул для цилиндрических функций [19, с. 90]

$$\frac{d}{dz}\left(z^{\nu}K_{\nu}(z)\right)=-z^{\nu}K_{\nu-1}(z),\quad \frac{d}{dz}\left(z^{\nu}I_{\nu}(z)\right)=z^{\nu}I_{\nu-1}(z),$$

$$\frac{d}{dz}\left(z^{-\nu}K_{\nu}(z)\right)=-z^{-\nu}K_{\nu+1}(z),\quad \frac{d}{dz}\left(z^{-\nu}I_{\nu}(z)\right)=z^{-\nu}I_{\nu+1}(z),$$

$$\frac{d}{dz}\left(z^{\nu}J_{\nu}(z)\right)=z^{\nu}J_{\nu-1}(z),\quad \frac{d}{dz}\left(z^{\nu}Y_{\nu}(z)\right)=z^{\nu}Y_{\nu-1}(z),$$

$$\frac{d}{dz}\left(z^{-\nu}J_{\nu}(z)\right)=-z^{-\nu}J_{\nu+1}(z),\quad \frac{d}{dz}\left(z^{-\nu}Y_{\nu}(z)\right)=-z^{-\nu}Y_{\nu+1}(z),$$

$$I_{\nu}(z)K_{\nu+1}(z)+I_{\nu+1}(z)K_{\nu}(z)=\frac{1}{z},\ J_{\nu}(z)Y_{\nu+1}(z)-J_{\nu+1}(z)Y_{\nu}(z)=-\frac{2}{\pi z}$$

из (11) и (12) найдем

$$C_{1k}^{'}\left(y\right)=-p_kqy^{q-\frac{1}{2}}K_{\frac{1}{2q}-1}\left(p_ky^q\right)\int\limits_{0}^{y}t^{\frac{1}{2}}C_1\left(t\right)I_{\frac{1}{2q}}\left(p_kt^q\right)dt-$$

$$-p_kqy^{q-\frac{1}{2}}I_{\frac{1}{2q}-1}\left(p_ky^q\right)\int\limits_{0}^{y}t^{\frac{1}{2}}C_1\left(t\right)K_{\frac{1}{2q}}\left(p_kt^q\right)dt, \qquad (15)$$

$$C_{2k}^{'}\left(y\right)=-p_kq(-y)^{q-\frac{1}{2}}J_{\frac{1}{2q}-1}\left(p_k(-y)^q\right)\int\limits_{y}^{0}\sqrt{-t}C_2\left(t\right)Y_{\frac{1}{2q}}\left(p_k(-t)^q\right)dt+$$

$$+p_kq(-y)^{q-\frac{1}{2}}Y_{\frac{1}{2q}-1}\left(p_k(-y)^q\right)\int\limits_{y}^{0}\sqrt{-t}C_2(t)J_{\frac{1}{2q}}\left(p_k(-t)^q\right)dt, \qquad (16)$$

$$C_{1k}^{''}\left(y\right)=\left(p_kq\right)^2y^{2q-2}C_{1k}(y)-qC_1(y), \qquad (17)$$

$$C_{2k}^{''}\left(y\right)=-\left(p_kq\right)^2(-y)^{2q-2}C_{2k}(y)+\frac{2qC_2(y)}{\pi}. \qquad (18)$$

Подставляя в уравнение (8) соотношения (11) и (17) с учетом константы $b_k\gamma_k$, убеждаемся, что функция $b_k\gamma_k C_{1k}(y)$ является решением уравнения (8). Аналогично в силу равенств (12) и (18) получим, что функция $d_k\gamma_k C_{2k}(y)$ является решением уравнения (9).

Из выражений (11), (12), (15) и (16) следует справедливость равенств (13) и (14), так как

$$\lim_{y\to 0+0} y^{\frac{1}{2}} K_{\frac{1}{2q}}\left(p_k y^q\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2q}\right)}{2}\left(\frac{2}{p_k}\right)^{\frac{1}{2q}},$$

$$\lim_{y\to 0-0} (-y)^{\frac{1}{2}} Y_{\frac{1}{2q}}\left(p_k (-y)^q\right) = -\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2q}\right)}{\pi}\left(\frac{2}{p_k}\right)^{\frac{1}{2q}}.$$

В силу (2) подберем постоянные a_k, b_k, c_k, d_k так, чтобы выполнились условия сопряжения

$$u_k\left(0+0\right) = u_k\left(0-0\right),\ u_k'\left(0+0\right) = u_k'\left(0-0\right),\ k\in N. \tag{19}$$

В силу (13) и (14) первое из равенств (19) выполнено, если $d_k = -\pi b_k/2$ при любых a_k и c_k, а второе равенство имеет место при $c_k = \frac{\pi b_k \operatorname{ctg}(\pi/4q)}{2} - a_k$ и $d_k = -\pi b_k/2$. Тогда функции (10) примут вид

$$u_k\left(y\right) = \begin{cases} a_k\sqrt{y} I_{\frac{1}{2q}}\left(p_k y^q\right) + b_k\sqrt{y} K_{\frac{1}{2q}}\left(p_k y^q\right) + b_k\gamma_k C_{1k}\left(y\right), & y>0,\\ -a_k\sqrt{-y} J_{\frac{1}{2q}}\left(p_k(-y)^q\right) + b_k\sqrt{-y}\cdot \overline{Y}_{\frac{1}{2q}}\left(p_k(-y)^q\right) + & \\ +\frac{\pi}{2}\gamma_k b_k C_{2k}\left(y\right), & y<0, \end{cases} \tag{20}$$

где

$$\overline{Y}_{\frac{1}{2q}}\left(p_k(-y)^q\right) = \frac{\pi}{2\sin\frac{\pi}{2q}}\left[J_{\frac{1}{2q}}\left(p_k(-y)^q\right) + J_{-\frac{1}{2q}}\left(p_k(-y)^q\right)\right].$$

Для нахождения постоянных a_k и b_k воспользуемся граничными условиями (5) и формулой (6):

$$u_k\left(\beta\right) = \sqrt{2}\int_0^1 u\left(x,\beta\right)\sin\pi kx dx = \sqrt{2}\int_0^1 \varphi\left(x\right)\sin\pi kx dx = \varphi_k, \tag{21}$$

$$u_k\left(-\alpha\right) = \sqrt{2}\int_0^1 u\left(x,-\alpha\right)\sin\pi kx dx = \sqrt{2}\int_0^1 \psi\left(x\right)\sin\pi kx dx = \psi_k. \tag{22}$$

Тогда из (20) на основании (21) и (22) найдем

$$a_k = \frac{\varphi_k\left[\sqrt{\alpha}\cdot\overline{Y}_{\frac{1}{2q}}\left(p_k\alpha^q\right) + \frac{\pi}{2}\gamma_k C_{2k}\left(-\alpha\right)\right] - \psi_k\left[\sqrt{\beta} K_{\frac{1}{2q}}\left(p_k\beta^q\right) + \gamma_k C_{1k}\left(\beta\right)\right]}{\Delta\left(k\right)}, \tag{23}$$

$$b_k = \frac{\varphi_k\sqrt{\alpha} J_{\frac{1}{2q}}\left(p_k\alpha^q\right) + \psi_k\sqrt{\beta} I_{\frac{1}{2q}}\left(p_k\beta^q\right)}{\Delta\left(k\right)} \tag{24}$$

при условии, что при всех $k\in N$

$$\Delta\left(k\right) = \sqrt{\alpha\beta} I_{\frac{1}{2q}}\left(p_k\beta^q\right)\overline{Y}_{\frac{1}{2q}}\left(p_k\alpha^q\right) + \sqrt{\alpha\beta} J_{\frac{1}{2q}}\left(p_k\alpha^q\right) K_{\frac{1}{2q}}\left(p_k\beta^q\right) +$$

$$+\frac{\pi}{2}\sqrt{\beta}\gamma_k I_{\frac{1}{2q}}\left(p_k\beta^q\right) C_{2k}\left(-\alpha\right) + \sqrt{\alpha}\gamma_k J_{\frac{1}{2q}}\left(p_k\alpha^q\right) C_{1k}\left(\beta\right) \neq 0. \tag{25}$$

Подставляя (23) и (24) в (20), найдем окончательный вид функции:

$$u_k\left(y\right) = \begin{cases} \left[\varphi_k\Delta_{\alpha y}(k) + \psi_k B_{y\beta}(k)\right]\Delta^{-1}(k), & y>0,\\ \left[\varphi_k A_{\alpha y}(k) + \psi_k\Delta_{y\beta}(k)\right]\Delta^{-1}(k), & y<0, \end{cases} \tag{26}$$

где

$$\Delta_{\alpha y}\left(k\right)=\sqrt{\alpha y}I_{\frac{1}{2q}}\left(p_{k}y^{q}\right)\overline{Y}_{\frac{1}{2q}}\left(p_{k}\alpha^{q}\right)+\sqrt{\alpha y}J_{\frac{1}{2q}}\left(p_{k}\alpha^{q}\right)K_{\frac{1}{2q}}\left(p_{k}y^{q}\right)+$$

$$+\frac{\pi}{2}\sqrt{y}\gamma_{k}I_{\frac{1}{2q}}\left(p_{k}y^{q}\right)C_{2k}\left(-\alpha\right)-\sqrt{\alpha}\gamma_{k}J_{\frac{1}{2q}}\left(p_{k}\alpha^{q}\right)C_{1k}\left(y\right),$$

$$B_{y\beta}(k)=\sqrt{y\beta}\left[K_{\frac{1}{2q}}\left(p_{k}y^{q}\right)I_{\frac{1}{2q}}\left(p_{k}\beta^{q}\right)-K_{\frac{1}{2q}}\left(p_{k}\beta^{q}\right)I_{\frac{1}{2q}}\left(p_{k}y^{q}\right)\right]+$$

$$+\sqrt{y}\gamma_{k}I_{\frac{1}{2q}}\left(p_{k}y^{q}\right)C_{1k}\left(\beta\right)-\sqrt{\beta}\gamma_{k}I_{\frac{1}{2q}}\left(p_{k}\beta^{q}\right)C_{1k}\left(y\right),$$

$$A_{\alpha y}(k)=\sqrt{-\alpha y}\left[J_{\frac{1}{2q}}\left(p_{k}\alpha^{q}\right)\overline{Y}_{\frac{1}{2q}}\left(p_{k}(-y)^{q}\right)-J_{\frac{1}{2q}}\left(p_{k}(-y)^{q}\right)\overline{Y}_{\frac{1}{2q}}\left(p_{k}\alpha^{q}\right)\right]+$$

$$+\frac{\pi}{2}\sqrt{\alpha}\gamma_{k}J_{\frac{1}{2q}}\left(p_{k}\alpha^{q}\right)C_{2k}\left(y\right)-\frac{\pi}{2}\sqrt{-y}\gamma_{k}J_{\frac{1}{2q}}\left(p_{k}(-y)^{q}\right)C_{2k}\left(-\alpha\right),$$

$$\Delta_{-y\beta}\left(k\right)=\sqrt{-y\beta}I_{\frac{1}{2q}}\left(p_{k}\beta^{q}\right)\overline{Y}_{\frac{1}{2q}}\left(p_{k}(-y)^{q}\right)+\sqrt{-y\beta}J_{\frac{1}{2q}}\left(p_{k}(-y)^{q}\right)K_{\frac{1}{2q}}\left(p_{k}\beta^{q}\right)+$$

$$+\frac{\pi}{2}\sqrt{\beta}\gamma_{k}I_{\frac{1}{2q}}\left(p_{k}\beta^{q}\right)C_{2k}\left(y\right)+\sqrt{-y}\gamma_{k}J_{\frac{1}{2q}}\left(p_{k}(-y)^{q}\right)C_{1k}\left(\beta\right).$$

Таким образом, функции $u_k(y)$ однозначно определены, что позволяет доказать теорему единственности решения задачи (2)–(5). Пусть $u(x,\,y)$ – решение однородной задачи (2)–(5) (где $\varphi(x)=\psi(x)\equiv 0$) и выполнены условия (25) при всех $k\in N$. Тогда $\varphi_k=\psi_k\equiv 0$, и из формул (6) и (26) следует, что при любом $y\in[-\alpha,\,\beta]$

$$\int\limits_{0}^{1}u\left(x,\,y\right)\sin\pi kx dx=0,\quad k=1,2,...\quad. \tag{27}$$

Из равенств (27) в силу полноты системы синусов $\left\{\sqrt{2}\sin\pi kx\right\}$ в пространстве $L_2\left[0,1\right]$ следует, что $u(x,\,y)=0$ почти всюду на $[0,1]$ при любом $y\in[-\alpha,\beta]$. Поскольку в силу (2) функция $u(x,\,y)$ непрерывна в $\overline{D}$, то $u(x,\,y)\equiv 0$ в $\overline{D}$.

Пусть при некоторых $\alpha,\ \beta,\ C_1(y),\ C_2(y)$ и $k=l\in N$ нарушено условие (25), т. е.

$$\Delta\left(l\right)=E\left(\lambda_{l}\alpha_{q}\right)=\sqrt{\beta}I_{\frac{1}{2q}}\left(p_{l}\beta^{q}\right)\sqrt{\alpha}\cdot\overline{Y}_{\frac{1}{2q}}\left(\lambda_{l}\alpha_{q}\right)+\sqrt{\beta}K_{\frac{1}{2q}}\left(p_{l}\beta^{q}\right)\sqrt{\alpha}J_{\frac{1}{2q}}\left(\lambda_{l}\alpha_{q}\right)+$$

$$+\frac{\pi}{2}\sqrt{\beta}\gamma_{l}I_{\frac{1}{2q}}\left(p_{l}\beta^{q}\right)C_{2l}\left(-\alpha\right)+\gamma_{l}\sqrt{\alpha}J_{\frac{1}{2q}}\left(\lambda_{l}\alpha_{q}\right)C_{1l}\left(\beta\right)=0, \tag{28}$$

где $\alpha_q=\alpha^q/q$. Тогда однородная задача (2)–(5) (где $\varphi(x)\equiv 0,\ \psi(x)\equiv 0$) имеет нетривиальное решение

$$u_{l}\left(x,\,y\right)=u_{l}\left(y\right)\sin\pi lx, \tag{29}$$

здесь функция $u_l(y)$ определяется по формуле

$$u_{l}\left(y\right)=\left\{\begin{array}{ll}\Delta_{\alpha y}(l)\left[\sqrt{\alpha}J_{\frac{1}{2q}}\left(p_{l}\alpha^{q}\right)\right]^{-1}, & y>0,\\ A_{\alpha y}(l)\left[\sqrt{\alpha}J_{\frac{1}{2q}}\left(p_{l}\alpha^{q}\right)\right]^{-1}, & y<0.\end{array}\right. \tag{30}$$

Лемма 2. *Функция $\Delta(l)$ имеет счетное множество положительных нулей относительно α_q при любом фиксированном $\beta>0,\ b>0,\ k\in N$ и $C_2(0)=0$.*

Доказательство. Заметим, что функции $\sqrt{\alpha}J_{\frac{1}{2q}}(\lambda_l z)$ и $\sqrt{\alpha}\,\overline{Y}_{\frac{1}{2q}}(\lambda_l z),\ z=\alpha_q$, являются линейно независимыми решениями уравнения Бесселя

$$z\frac{d}{dz}\left(z\frac{d}{dz}y(z)\right)+\left(\left(\frac{\lambda_{k}z}{q}\right)^{2}-\left(\frac{1}{2q}\right)^{2}\right)y(z)=0. \tag{31}$$

Функция $C_{2l}(-\alpha)$ в силу леммы 1 при $C_2(0) = 0$ является решением соответствующего однородного дифференциального уравнения (9), которое при замене $C_{2l}(-\alpha) = \sqrt{\alpha} Z(\lambda_l z)$ сводится к уравнению (31). Отсюда следует, что функция $\Delta(l)$ является решением уравнения (31). Из общей теории линейных дифференциальных уравнений известно, что нули двух линейно независимых решений уравнения Бесселя строго чередуются, т. е. на интервале между любыми последовательными нулями любого из этих решений содержится ровно один нуль другого решения. Функция $\sqrt{\alpha} J_{\frac{1}{2q}}(\lambda_l \alpha_q)$ имеет счетное множество положительных нулей. Поскольку $\sqrt{\alpha} J_{\frac{1}{2q}}(\lambda_l \alpha_q)$ и $E(\lambda_l \alpha_q)$ – линейно независимые решения уравнения (31), то функция $\Delta(l)$ также имеет счетное множество положительных нулей относительно α_q.

Таким образом, нами установлен следующий критерий единственности.

Теорема 1. *Если существует решение задачи* (2)–(5), *то оно единственно только тогда, когда выполнено условие* (25) *при всех* $k \in N$.

2. Обоснование существования решения

Поскольку α, β – любые числа из промежутков задания, то при достаточно больших k выражение $\Delta(k)$, которое входит в знаменатели коэффициентов (23) и (24), может стать достаточно малым, т. е. возникает проблема "малых знаменателей" [2]. Для обоснования существования решения данной задачи необходимо показать существование чисел α, β, b и функций $C_i(y)$, $i = 1, 2$ таких, что при достаточно больших k выражение $\Delta(k)$ отделено от нуля.

Представим выражение $\Delta(k)$ в следующем виде:

$$\Delta(k) = \sqrt{\alpha\beta} I_{\frac{1}{2q}}(p_k \beta^q)\, \widetilde{\Delta}(k),$$

где

$$\widetilde{\Delta}(k) = \delta(k) + \omega_k, \tag{32}$$

$$\delta(k) = \overline{Y}_{\frac{1}{2q}}(p_k \alpha^q) + J_{\frac{1}{2q}}(p_k \alpha^q)\frac{K_{\frac{1}{2q}}(p_k \beta^q)}{I_{\frac{1}{2q}}(p_k \beta^q)},$$

$$\omega_k = \frac{\pi}{2}\gamma_k C_{2k}(-\alpha) + \gamma_k \frac{J_{\frac{1}{2q}}(p_k \alpha^q)}{I_{\frac{1}{2q}}(p_k \beta^q)} C_{1k}(\beta). \tag{33}$$

Обозначим через $\| C_1 \| = \max\limits_{0 \leqslant y \leqslant \beta} |C_1(y)|$, $\| C_2 \| = \max\limits_{-\alpha \leqslant y \leqslant 0} |C_2(y)|$.

Лемма 3. *Существуют положительные постоянные* $\widetilde{C}_0$ *и* $\widetilde{k}_0$ ($\widetilde{k}_0 \in N$), *зависящие, вообще говоря, от* α, β, q, b, $\|C_1\|$, $\|C_2\|$, *такие, что при всех всех* $k > \widetilde{k}_0$ *справедлива оценка*

$$|\sqrt{k}\omega_k| \leqslant \widetilde{C}_0 k^{-\frac{1}{q}}. \tag{34}$$

Доказательство. Перепишем выражение (33) в виде

$$\omega_k = \omega_{1k} + \omega_{2k},$$

где

$$\omega_{1k} = \frac{\pi}{2}\gamma_k C_{2k}(-\alpha),\ \omega_{2k} = \gamma_k \frac{J_{\frac{1}{2q}}(p_k \alpha^q)}{I_{\frac{1}{2q}}(p_k \beta^q)} C_{1k}(\beta).$$

На основании (11) имеем

$$|C_{1k}(\beta)| \leqslant ||C_1|| K_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q) \int\limits_0^\beta t^{\frac{1}{2}} I_{\frac{1}{2q}}(p_k t^q)\, dt + ||C_1|| I_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q) \int\limits_0^\beta t^{\frac{1}{2}} K_{\frac{1}{2q}}(p_k t^q)\, dt,$$

Отсюда с учетом оценок

$$0 < I_{\frac{1}{2q}}(p_k t^q) \leqslant I_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q),\ 0 < \sqrt{t} K_{\frac{1}{2q}}(p_k t^q) \leqslant \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2q}\right)\left(\frac{2}{p_k}\right)^{\frac{1}{2q}}$$

при $0 \leqslant t \leqslant \beta$, получим

$$|C_{1k}(\beta)| \leqslant ||C_1|| I_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q)\left[K_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q)\frac{2}{3}\beta^{\frac{3}{2}} + \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2q}\right)}{2}\left(\frac{2}{p_k}\right)^{\frac{1}{2q}}\beta\right] \leqslant$$

$$\leqslant A_1 k^{-\frac{1}{2q}} I_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q), \tag{35}$$

где A_i – здесь и далее положительные постоянные, зависящие, вообще говоря, от α, β, q, b, $\|C_1\|$, $\|C_2\|$. Тогда при больших k на основании асимптотической формулы для функции Бесселя [19, с. 98]:

$$J_\nu(z) = O\left(\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\right),\ z \to \infty, \tag{36}$$

исходя из оценки (35) имеем

$$|\omega_{2k}| \leqslant A_2 k^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}. \tag{37}$$

Перепишем выражение (12) для $C_{2k}(-\alpha)$ в следующем виде:

$$C_{2k}(-\alpha) = C_{2k}^{(1)}(-\alpha) + C_{2k}^{(2)}(-\alpha),$$

где

$$C_{2k}^{(1)}(-\alpha) = J_{\frac{1}{2q}}(p_k\alpha^q) \int\limits_{-\alpha}^0 (-t)^{\frac{1}{2}} C_2(t) Y_{\frac{1}{2q}}(p_k(-t)^q)\, dt =$$

$$= J_{\frac{1}{2q}}(p_k\alpha^q) \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2q} \int\limits_{-\alpha}^0 (-t)^{\frac{1}{2}} C_2(t) J_{\frac{1}{2q}}(p_k(-t)^q)\, dt -$$

$$- J_{\frac{1}{2q}}(p_k\alpha^q) \frac{1}{\sin\frac{\pi}{2q}} \int\limits_{-\alpha}^0 (-t)^{\frac{1}{2}} C_2(t) J_{-\frac{1}{2q}}(p_k(-t)^q)\, dt,$$

$$C_{2k}^{(2)}(-\alpha) = Y_{\frac{1}{2q}}(p_k\alpha^q) \int\limits_{-\alpha}^0 (-t)^{\frac{1}{2}} C_2(t) J_{\frac{1}{2q}}(p_k(-t)^q)\, dt. \tag{38}$$

Отсюда на основании неравенств

$$\left|J_{\frac{1}{2q}}(p_k(-t)^q)\right| \leqslant \left|J_{\frac{1}{2q}}(p_k t_m^q)\right|,$$

$$\left|J_{-\frac{1}{2q}}(p_k(-t)^q)\right| \leqslant \frac{2q}{\Gamma\left(\frac{1}{2q}\right)}\left(\frac{2}{p_k}\right)^{\frac{1}{2q}}(-t)^{-\frac{1}{2}}$$

для $t \in [-\alpha, 0]$, где $t = -t_m$ и $t_m \in (0, \alpha]$ является точкой наибольшего значения функции $\left|J_{\frac{1}{2q}}\left(p_k(-t)^q\right)\right|$ на сегменте $[-\alpha, 0]$, получим

$$|C_{2k}^{(1)}(-\alpha)| \leqslant ||C_2||\frac{2}{3}\left|\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2q}\right|\left|J_{\frac{1}{2q}}\left(p_k\alpha^q\right)\right|\left|J_{\frac{1}{2q}}\left(p_k t_m^q\right)\right|\alpha^{\frac{3}{2}}+$$

$$+\frac{||C_2||2q\alpha}{\Gamma\left(\frac{1}{2q}\right)\sin\frac{\pi}{2q}}\left|J_{\frac{1}{2q}}\left(p_k\alpha^q\right)\right|\left(\frac{p_k}{2}\right)^{-\frac{1}{2q}}.$$

Из последней оценки на основании (36) имеем

$$|C_{2k}^{(1)}(-\alpha)| \leqslant A_3 k^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2q}}. \tag{39}$$

Аналогично, исходя из формулы (38) при больших k, получим

$$|C_{2k}^{(2)}(-\alpha)| \leqslant A_4 k^{-1}. \tag{40}$$

На основании (39) и (40) при больших k имеем

$$|C_{2k}(-\alpha)| \leqslant A_5 k^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2q}}.$$

Тогда для w_{1k} справедлива оценка

$$|\omega_{1k}| \leqslant \frac{\pi}{2}\gamma_k A_4 k^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2q}} \leqslant A_6 k^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}. \tag{41}$$

Теперь из неравенств (37) и (41) следует справедливость оценки (34).

Лемма 4. *Если $\alpha_q = p/t$, $p, t \in N$, $(p, t) = 1$ и $\frac{r}{t} \neq \frac{3}{4} + d$, где $d \in N_0$, r — остаток от деления kp на t, то существуют положительные постоянные $\widetilde{\widetilde{C}}_0$ и $\widetilde{\widetilde{k}}_0$, $\widetilde{\widetilde{k}}_0 \in N$, зависящие, вообще говоря, от α, β, q, b, $\|C_1\|$, $\|C_2\|$, такие, что при всех $k > \widetilde{\widetilde{k}}_0$ справедлива оценка*

$$|\sqrt{k}\delta(k)| \geqslant \widetilde{\widetilde{C}}_0. \tag{42}$$

Доказательство проводится аналогично работе [20].

Поскольку ω_k является бесконечно малой более высокого порядка, чем $\delta(k)$ при больших k, то из лемм 3 и 4 вытекает следующее утверждение.

Лемма 5. *Если $\alpha_q = p/t, p, t \in N, (p, t) = 1$ и $\frac{r}{t} \neq \frac{3}{4} + d$, где $d \in N_0$, r — остаток от деления kp на t, то существуют положительные постоянные C_0 и k_0, $k_0 \in N$, зависящие, вообще говоря, от α, β, q, b, $\|C_1\|$, $\|C_2\|$, такие, что при всех $k > k_0$ справедлива оценка*

$$|\sqrt{k}\widetilde{\Delta}(k)| \geqslant C_0 = const > 0. \tag{43}$$

Доказательство. Из выражения (32) с учетом оценок (34) и (42) при $k > k_0 > > \max\left\{\widetilde{k}_0, \widetilde{\widetilde{k}}_0, \left(\frac{2\widetilde{C}_0}{\widetilde{\widetilde{C}}_0}\right)^q\right\}$ получим

$$|\sqrt{k}\widetilde{\Delta}(k)| \geqslant \left|\sqrt{k}\delta_k\right| - \left|\sqrt{k}\omega_k\right| > \widetilde{\widetilde{C}}_0 - \widetilde{C}_0 k^{-\frac{1}{q}} > \frac{\widetilde{\widetilde{C}}_0}{2} = C_0 > 0.$$

Если $\Delta(k) \neq 0$ и выполнена оценка (43), то решение задачи (2)–(5) можно представить в виде суммы ряда Фурье

$$u\,(x,\,y) = \sqrt{2}\sum_{k=1}^{+\infty} u_k\,(y)\sin\pi kx, \tag{44}$$

где функции $u_k\left(y\right)$ определяются по формулам (26). Поскольку система синусов $\left\{\sqrt{2}\sin\pi kx\right\}$ образует базис в $L_2\left[0,1\right]$, то ряд (44) сходится в $L_2\left[0,1\right]$ при каждом $y\in[-\alpha,\beta]$. Покажем, что при определенных условиях относительно функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ сумма $u(x,y)$ ряда (44) удовлетворяет условиям (2) и (3).

Рассмотрим следующие соотношения:

$$P_k(y)=\frac{\Delta_{\alpha y}(k)}{\Delta(k)},\quad Q_k(y)=\frac{B_{y\beta}(k)}{\Delta(k)},\quad y\in[0,\,\beta], \tag{45}$$

$$M_k(y)=\frac{A_{\alpha y}(k)}{\Delta(k)},\quad N_k(y)=\frac{\Delta_{y\beta}(k)}{\Delta(k)},\quad y\in[-\alpha,\,0]. \tag{46}$$

Лемма 6. *Пусть выполнена оценка (43) при $k>k_0$. Тогда для таких k справедливы оценки:*

$$|P_k(y)|\leqslant C_1,\quad \left|P_k^{'}(y)\right|\leqslant C_1k,\quad \left|P_k^{''}(y)\right|\leqslant C_1k^2,$$

$$|Q_k(y)|\leqslant C_2k^{\frac{1}{2}-\lambda},\quad \left|Q_k^{'}(y)\right|\leqslant C_2k^{\frac{1}{2}+\lambda}e,\quad \left|Q_k^{''}(y)\right|\leqslant C_2k^{\frac{5}{2}-\lambda},\quad y\in[0,\,\beta];$$

$$|M_k(y)|\leqslant C_3k^{\frac{1}{2}+\lambda}e^{-kd},\quad \left|M_k^{'}(y)\right|\leqslant C_3ke^{-kd},\quad \left|M_k^{''}(y)\right|\leqslant C_3k^{\frac{5}{2}+\lambda}e^{-kd},$$

$$|N_k(y)|\leqslant C_4k^{\frac{1}{2}+\lambda},\quad \left|N_k^{'}(y)\right|\leqslant C_4k^{\frac{1}{2}+\lambda},\quad \left|N_k^{''}(y)\right|\leqslant C_4k^{\frac{5}{2}+\lambda},\quad y\in[-\alpha,\,0],$$

где C_i – здесь и далее положительные постоянные, зависящие, вообще говоря, от α, β, q, b, $\|C_1\|$, $\|C_2\|$; $d=\pi\beta^q/q$, $\lambda=1/2q$.

Доказательство аналогично работам [3; 21].

Лемма 7. *Если выполнена оценка (43) при $k>k_0$, тогда для таких k и при всех $y\in[-\alpha,\beta]$ справедливы оценки:*

$$|u_k(y)|\leqslant C_5k^{\frac{1}{2}+\lambda}\left(|\varphi_k|+|\psi_k|\right),$$

$$\left|u_k^{'}(y)\right|\leqslant C_6k^{\frac{1}{2}}\left(k^{\frac{1}{2}}|\varphi_k|+k^{\lambda}|\psi_k|\right),$$

$$\left|u_k^{''}(y)\right|\leqslant C_7k^{\frac{5}{2}+\lambda}\left(|\varphi_k|+|\psi_k|\right).$$

Доказательство. Из формулы (26), используя (45) и (46), получим следующее представление функций $u_k(y)$:

$$u_k(y)=\varphi_kP_k(y)+\psi_kQ_k(y),\quad y>0,$$

$$u_k(y)=\varphi_kM_k(y)+\psi_kN_k(y),\quad y<0.$$

Отсюда на основании леммы 6 нетрудно получить указанные в лемме 7 оценки.

Формально из ряда (44) почленным дифференцированием составим ряды:

$$u_x\left(x,\,y\right)=\sqrt{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\pi ku_k\left(y\right)\cos\pi kx, \tag{47}$$

$$u_y\left(x,\,y\right)=\sqrt{2}\sum_{k=1}^{+\infty}u_k^{'}\left(y\right)\sin\pi kx, \tag{48}$$

$$u_{xx}\left(x,\,y\right)=-\sqrt{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\pi k\right)^2u_k\left(y\right)\sin\pi kx, \tag{49}$$

$$u_{yy}\left(x,\,y\right)=\sqrt{2}\sum_{k=1}^{+\infty}u_k^{''}\left(y\right)\sin\pi kx. \tag{50}$$

Ряды (44), (47)–(50) в силу леммы 7 мажорируются числовым рядом

$$C_8 \sum_{k=k_0+1}^{+\infty} k^{\frac{5}{2}+\lambda}(|\varphi_k| + |\psi_k|). \tag{51}$$

Лемма 8. *Если* $\varphi(x) \in C^4[0,1]$, $\varphi(0) = \varphi(1) = \varphi''(0) = \varphi''(1) = 0$ *и* $\psi(x) \in \in C^4[0,1]$, $\psi(0) = \psi(1) = \psi''(0) = \psi''(1) = 0$, *то*

$$\varphi_k = \frac{1}{(\pi k)^4}\varphi_k^{IV},\ \psi_k = \frac{1}{(\pi k)^4}\psi_k^{IV}, \tag{52}$$

где

$$\varphi_k^{IV} = \sqrt{2}\int_0^1 \varphi^{IV}(x)\cos\pi kx dx,\ \psi_k^{IV} = \sqrt{2}\int_0^1 \psi^{IV}(x)\cos\pi kx dx,$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |\varphi_k^{IV}|^2 \leqslant ||\varphi^{IV}(x)||^2_{L_2[0,1]}, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} |\psi_k^{IV}|^2 \leqslant ||\psi^{IV}(x)||^2_{L_2[0,1]}. \tag{53}$$

Доказательство. Интегрируя по частям четыре раза в интегралах из (21) и (22), с учетом условий леммы получим представления (52). Справедливость оценок (53) следует из неравенства Бесселя по тригонометрической системе $\{\sqrt{2}\sin\pi kx\}_{k=1}^{+\infty}$.

Тогда в силу леммы 8 ряд (51) оценивается рядом

$$C_9 \sum_{k=k_0+1}^{+\infty} k^{\lambda-\frac{3}{2}}\left(|\varphi_k^{IV}| + |\psi_k^{IV}|\right). \tag{54}$$

Если при указанных в лемме 5 числах α_q выражение $\Delta(k) \neq 0$ при всех $k = = \overline{1, k_0}$, то в силу сходимости ряда (54) на основании признака Вейерштрасса сходятся равномерно ряды (44), (47) и (48) на $\overline{D}$, а ряды (49) и (50) на соответствующих замкнутых областях $\overline{D}_+$ и $\overline{D}_-$. Следовательно, функция $u(x, y)$, определенная рядом (44), удовлетворяет условию (2). Подставляя ряды (44), (49) и (50) в уравнение (1) при $y > 0$, а ряды (44), (49) и (50) в уравнение (1) при $y < 0$, убеждаемся в том, что функция (44) является решением уравнения (1) на множестве $D_+ \cup D_-$.

Если при указанных в лемме 5 значениях α_q выражение $\Delta(l) = 0$ при $k = = m = k_1, k_2, ..., k_l$, где $1 \leqslant k_1 < k_2 < ... < k_l \leqslant k_0$, $k_i, i = \overline{1, l}$, и l — заданные натуральные числа, то для разрешимости задачи (2)–(5) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\begin{gathered}\varphi_m\sqrt{\alpha}J_{\frac{1}{2q}}(p_m\alpha^q) + \psi_m\sqrt{\alpha}I_{\frac{1}{2q}}(p_m\beta^q) = 0,\\ \varphi_m\left[\sqrt{\alpha}Y_{\frac{1}{2q}}(p_m\alpha^q) + \tfrac{\pi}{2}\gamma_m C_{2m}(-\alpha)\right] - \psi_m\left[\sqrt{\beta}K_{\frac{1}{2q}}(p_m\beta^q) + \gamma_m C_{1m}(\beta)\right] = 0.\end{gathered} \tag{55}$$

В этом случае решение задачи (2)–(5) определяется в виде ряда

$$u(x,y) = \sqrt{2}\left(\sum_{k=1}^{k_1-1} + ... + \sum_{k=k_{l-1}+1}^{k_l-1} + \sum_{k=k_l+1}^{+\infty}\right)u_k(y)\sin\pi kx + \sum_m C_m u_m(y)\sin\pi mx, \tag{56}$$

где $u_m(y)$ определяется по формуле (30), C_m — произвольные постоянные, в сумме $\sum\limits_m$ индекс m принимает значения $k_1, k_2, ..., k_l$, конечные суммы в (56) следует считать нулями, если верхний предел меньше нижнего.

Таким образом, нами доказано следущее утверждение.

Теорема 2. *Пусть функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям леммы 8, $C_1(y) \in C[0, \beta]$, $C_2(y) \in C[-\alpha, 0]$ и выполнена оценка (43) при всех $k > k_0$. Тогда если $\Delta(k) \neq 0$ при всех $k = \overline{1, k_0}$, то задача (2)–(5) имеет единственное решение, которое определяется рядом (44); если $\Delta(k) = 0$ при $k = m = k_1, k_2, ..., k_l \leqslant k_0$, то задача (2)–(5) разрешима только тогда, когда выполнены условия (55), и решение в этом случае определяется рядом (56).*

3. Устойчивость решения

Введем следущие нормы:

$$\|u(x,y)\|_{L_2[0,1]} = \|u(x,y)\|_{L_2} = \left(\int\limits_0^1 |u(x,\, y)|^2 dx\right)^{1/2},$$

$$\|u(x,y)\|_{C(\overline{D})} = \max_{\overline{D}} |u(x,y)|,$$

$$\|f(x)\|_{W_2^k} = \left(\int\limits_0^1 \sum_{k=0}^{2} \left|f^{(k)}(x)\right|^2 dx\right)^{1/2}.$$

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 2 и $\Delta(k) \neq 0$ при $k = \overline{1, k_0}$. Тогда для решения (44) задачи (2)–(5) имеют место оценки:*

$$||u(x,y)||_{L_2} \leqslant C_{10} \left(\|\varphi\|_{W_2^1} + \|\psi\|_{W_2^1}\right), \tag{57}$$

$$||u(x,y)||_{C(\overline{D})} \leqslant C_{11} \left(\|\varphi\|_{W_2^2} + \|\psi\|_{W_2^2}\right), \tag{58}$$

где постоянные C_{10} и C_{11} не зависят от $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.

Доказательство. Поскольку система $\left\{\sqrt{2}\sin \pi kx\right\}$ ортонормирована в $L_2[0,1]$, то из (29) и леммы 7 имеем

$$\|u(x,y)\|_{L_2}^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k^2(y) \leqslant C_{12}^2 \sum_{k=1}^{+\infty} k^{1+2\lambda} \left(|\varphi_k| + |\psi_k|\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2C_{12}^2 \sum_{k=1}^{+\infty} k^{1+2\lambda} \left(|\varphi_k|^2 + |\psi_k|^2\right). \tag{59}$$

Поскольку $\varphi_k = \varphi_k^{'}/(\pi k)$, $\psi_k = \psi_k^{'}/(\pi k)$, $\varphi_k^{(1)} = \sqrt{2}\int\limits_0^1 \varphi^{'}(x) \cos \pi kx dx$, $\psi_k^{(1)} = \sqrt{2}\int\limits_0^1 \psi^{'}(x) \cos \pi kx dx$, то из (59) получим

$$\|u(x,y)\|_{L_2}^2 = \frac{2C_{12}^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{+\infty} k^{1-2\lambda} \left(|\varphi_k^{'}|^2 + |\psi_k^{'}|^2\right) \leqslant C_{10}^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \left(||\varphi_k^{'}||_{L_2}^2 + ||\psi_k^{'}||_{L_2}^2\right).$$

Отсюда вытекает справедливость оценки (57). Пусть $u(x,y)$ — произвольная точка из $\overline{D}$. Тогда, используя формулу (29) на основании леммы 7, будем иметь

$$|u(x,y)| \leqslant \sqrt{2} \sum_{k=1}^{+\infty} |\, u_k(y)\, | \leqslant \sqrt{2} C_{13} \sum_{k=1}^{+\infty} k^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2q}} \left(|\varphi_k| + |\psi_k|\right). \tag{60}$$

Так как $\varphi_k = -\varphi_k^{''}/(\pi k)^2$, $\psi_k = -\psi_k^{''}/(\pi k)^2$, $\varphi_k^{''} = \sqrt{2}\int\limits_0^1 \varphi^{''}(x)\sin\pi kx dx$, $\psi_k^{''} = \sqrt{2}\int\limits_0^1 \psi^{''}(x)\sin\pi kx dx$, то из (60), на основании неравенства Коши — Буняковского, получим

$$|u(x,y)| \leqslant \frac{\sqrt{2}C_{13}}{\pi^2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2q}}}\left(|\varphi_k^{''}|+|\psi_k^{''}|\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\sqrt{2}C_{13}}{\pi^2}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^{3-2\lambda}}\right)^{1/2}\left[\left(\sum_{k=1}^{+\infty}|\varphi_k^{''}|^2\right)^{1/2}+\left(\sum_{k=1}^{+\infty}|\psi_k^{''}|^2\right)^{1/2}\right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\sqrt{2}C_{13}}{\pi^2}\left(||\varphi^{''}||_{L_2}+||\psi^{''}||_{L_2}\right) \leqslant C_{11}\left(||\varphi||_{W_2^2}+||\psi||_{W_2^2}\right). \tag{61}$$

Из (61) непосредственно следует оценка (58).

Литература

[1] Сабитов К.Б. Начально-граничная задача для нагруженного уравнения параболо-гиперболического типа // Докл. АМАН. 2009. Т. 11. № 1. С. 66–73.

[2] Сабитов К.Б. Задача Трикоми для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области // Математические заметки. 2009. Вып. 2. С. 273–279.

[3] Сабитов К.Б. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа в прямоугольной области // ДАН. 2007. Т. 413. № 1. С. 23–26.

[4] Cannon J.R. Dirihlet problem for an aquation of mixed type with a discontinius coefficient // Ann. math. pura ed appl. 1963. V. 62. P. 371–377.

[5] Шабат Б.В. Примеры решения задачи Дирихле для уравнения смешанного типа // ДАН. 1957. Т. 112. № 3. С. 386–389.

[6] Хачев М.М. Задача Дирихле для обобщенного уравнения Лаврентьева–Бицадзе в прямоугольной области // Дифференциальные уравнения. 1978. Т. 14. № 1. С. 136–139.

[7] Жегалов В.И. Нелокальная задача Дирихле для уравнения смешанного типа // Неклассические уравнения матем. физики. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1985. С. 168–172.

[8] Солдатов А.П. Задача Дирихле для уравнения Лаврентьева–Бицадзе // Дифференциальные уравнения. 1994. Т. 30. № 11. С. 2001–2009.

[9] Сабитова Ю.К., Бахристова А.А. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа с оператором Лаврентьева-Бицадзе // Труды Стерлитамакского филиала Академии наук Республики Башкортостан. Сер.: Физико-математические и технические науки. УФА: Гилем, 2009. Вып. 6. С. 103–110.

[10] Нахушев А.М. О задаче Дарбу для одного вырождащегося нагруженного интегродифференциального уранения второго порядка // Дифференциальные уравнения. 1976. Т. 12. № 1. С. 103–108.

[11] Казиев В.М. Задача Трикоми для нагруженного уравнения Лаврентьева-Бицадзе // Дифференциальные уравнения. 1979. Т. 15. № 1. С. 173–175.

[12] Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их приложения // Дифференциальные уравнения. 1983. Т. 19. № 1. С. 86–94.

[13] Дженалиев М.Т. К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений. Алмата, 1995. 270 с.

[14] Пулькина Л.С. Нелокальная задача для нагруженного гиперболического уравнения // Труды МИАН. 2002. Т. 236. С. 298–303.

[15] Кожанов А.И. Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи // Вычислительная математика и математическая физика. 2004. Т. 44. № 4. С. 694–716.

[16] Хубиев К.У. Об одной краевой задаче для нагруженного уравнения смешанного гиперболо-параболического типа // Доклады АМАН. 2005. Т. 7. № 2. С. 74–77.

[17] Мелишева Е.П. Задача Дирихле для нагруженного уравнения Лаврентьева-Бицадзе // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2010. Т. 80. № 6. С. 39–47.

[18] Сабитов К.Б., Мелишева Е.П. Задача Дирихле для нагруженного уравнения смешанного типа в прямоугольной области // Известия вузов. Сер.: Математика. 2013. (в печати).

[19] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М.: Наука. 1966. Т. 2. 296 с.

[20] Сабитов К.Б., Вагапова Э.В. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения в прямоугольной области // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49. № 1. С. 68–78.

[21] Сабитов К.Б., Сидоренко О.Г. Задача с условиями периодичности для вырождающегося уравнения смешанного типа // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46. № 1. С. 105–113.

Поступила в редакцию $1/V/2013$;
в окончательном варианте — $1/V/2013$.

DIRICHLET PROBLEM FOR LOADED DEGENERATING EQUATION OF THE MIXED TYPE IN THE RECTANGULAR AREA

 E.P. Melisheva[2]

In this work necessary and sufficient conditions for uniqueness of a solution to the first boundary problem for Lavrentiev-Bitsadze equation in rectangular domain are established. The solution to the problem is constructed as a sum of series with respect of eigenfunctions of a corresponding one-dimensional Stourm-Liouviele problem. The stability is shown.

Key words: loaded degenerating equation of the mixed type, Dirichlet problem, spectral method, uniqueness, existence, stability.

Paper received $1/V/2013$.
Paper accepted $1/V/2013$.

[2]Melisheva Ekaterina Petrovna (melisheva86@mail.ru), the Dept. of Mathematics and Teaching Methods, Samara State Academy of Social Sciences and Humanities, Samara, 443090, Russian Federation.