

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВУМЕРНОЙ ОДНОФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ТРАССЕРА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ХРОМАТОГРАФИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ТАРЕЛОК¹

© 2013 С.Ю. Кудряшов, Л.А. Онучак, Д.А. Панарин²

Рассмотрено обобщение хроматографической теории тарелок на случай плоской фильтрации несорбирующегося трассера в пористой среде однородного пласта постоянной толщины в системе равнодебитных нагнетательной и добывающей скважин. Показано, что в рамках данного подхода можно проводить приближенные расчеты концентрации трассера как в различные моменты времени в добывающей скважине, так и в фиксированный момент в различных точках пласта.

Ключевые слова: пористая среда, движение жидкости, несорбирующийся трассер, расчет концентрации, хроматографическая теория тарелок.

Введение

Индикаторный (трассерный) метод исследования межскважинного пространства используется для получения информации о строении нефтяного пласта и его фильтрационных характеристиках, что позволяет контролировать процесс вытеснения нефти нагнетаемой водой, оценивать эффективность различных геологических мероприятий, направленных на интенсификацию добычи нефти и повышение нефтеотдачи пластов [1]. Метод основан на введении в контрольную нагнетательную скважину заданного объема раствора трассера с известной начальной концентрацией, оттеснении трассера к добывающим скважинам и установлении зависимости концентрации трассера от времени в извлекаемой жидкости для каждой добывающей скважины. Вид концентрационных кривых характеризует фильтрационную неоднородность исследуемого участка пласта [1]. Для интерпретации результатов трассерных исследований привлекают различные математические модели, описывающие фильтрацию в пористой среде нефтяного пласта [1–4].

Целью данной работы являлось моделирование концентрационной зоны несорбирующегося трассера в однородном по проницаемости пласте постоянной толщины

¹Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 13-03-97010-р_поволжье_а.

²Кудряшов Станислав Юрьевич (kstasu@mail.ru), Онучак Людмила Артемовна (onuchak@samsu.ru), Панарин Денис Александрович (denis_panarin@mail.ru), кафедра физической химии и хроматографии Самарского государственного университета, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

ны. В работе рассмотрена простейшая задача фильтрации в системе двух равнодебитных нагнетательной и добывающей скважин.

1. Теоретическая часть

Известно, что задачи установившейся фильтрации несжимаемой жидкости на плоскости можно решать методами теории функций комплексного переменного [5]. В теории фильтрации вводят функции $\Phi(x, y)$ и $\Psi(x, y)$ — потенциал скорости фильтрации и функцию тока. При этом компоненты скорости фильтрации есть

$$\begin{aligned} w_x &= -\frac{\partial}{\partial x}\Phi(x, y) = -\frac{\partial}{\partial y}\Psi(x, y), \\ w_y &= -\frac{\partial}{\partial y}\Phi(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\Psi(x, y), \end{aligned} \quad (1)$$

а функции Φ и Ψ удовлетворяют условиям Коши — Римана, поэтому характеристическая функция течения $F = \Phi + i\Psi$ является аналитической функцией комплексной переменной $z = x + iy$. По принципу суперпозиции

$$F(z) = \frac{Q}{2\pi h} \ln(z - a) - \frac{Q}{2\pi h} \ln(z + a) = \frac{q}{2\pi} \ln\left(\frac{z - a}{z + a}\right), \quad (2)$$

где $q = Q/h$ — объемная скорость фильтрации в расчете на единицу толщины пласта, $(-a, 0)$ и $(a, 0)$ — координаты равнодебитных точечных источника (нагнетательная скважина) и стока (добывающая скважина).

Для отделения в характеристической функции действительной части от мнимой вводят обозначения:

$$\begin{aligned} z + a &= r_1 \exp(i\varphi_1), \\ z - a &= r_2 \exp(i\varphi_2) \end{aligned}$$

и, подставляя в формулу (2), получают

$$F = \frac{q}{2\pi} \ln(r_2/r_1) + i\frac{q}{2\pi}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{q}{2\pi}(\tau(x, y) + i\sigma(x, y)),$$

где τ и σ — биполярные координаты на плоскости [6]:

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{1}{2} \ln \left[\frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2} \right], \\ \sigma &= \frac{i}{2} \ln \left[\frac{x^2 + (y-ia)^2}{x^2 + (y+ia)^2} \right], \end{aligned}$$

причем σ есть угол, образованный лучами, идущими из полюсов $(-a, 0)$ и $(a, 0)$ в точку (x, y) , а $\exp(\tau)$ — отношение полярных радиусов точки (x, y) (рис. 1).

Обратные преобразования имеют вид:

$$\begin{aligned} x &= a \frac{\operatorname{sh}(\tau)}{\operatorname{ch}(\tau) - \cos(\sigma)}, \\ y &= a \frac{\sin(\sigma)}{\operatorname{ch}(\tau) - \cos(\sigma)}. \end{aligned}$$

Полоса потока, заключенная между линиями тока, на которых выполняется условие $\Psi = \text{const}$, представляет собой так называемую ленту тока. Эквипотенциали $\Phi = \text{const}$ разбивают ленту тока на отсеки (рис. 2). Площадь, приходящаяся на отсек ленты тока, может быть найдена следующим образом [6]:

$$S_{m,n} = \int_{\sigma_m}^{\sigma_{m+1}} \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} \frac{a^2}{(\operatorname{ch}(\tau) - \cos(\sigma))^2} d\tau d\sigma.$$

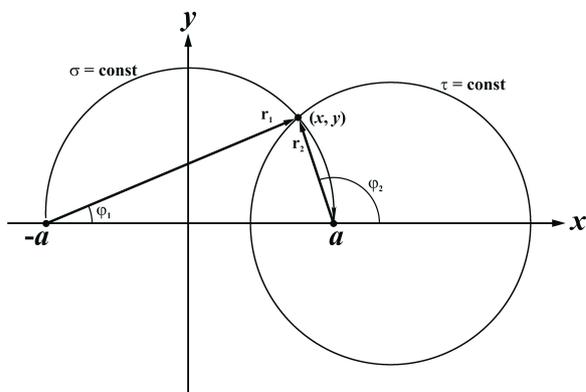
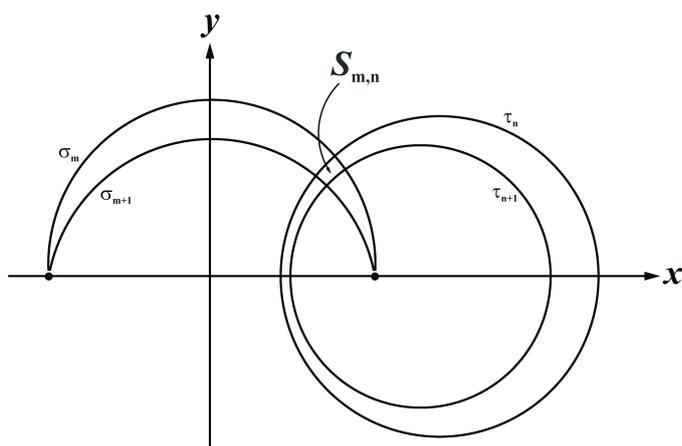


Рис. 1. Биполярные координаты на плоскости

Рис. 2. Лента тока, заключенная между линиями тока σ_m и σ_{m+1} , и отсек ленты тока, выделяемый эквипотенциалами τ_n и τ_{n+1}

Уравнение материального баланса для одного отсека выделенной ленты тока в случае несорбирующегося трассера имеет вид:

$$C_{m,n-1}Q_m dt - C_{m,n}Q_m dt = m_p S_{m,n} h dC_{m,n},$$

или

$$C_{m,n-1}q_m dt - C_{m,n}q_m dt = m_p S_{m,n} dC_{m,n}, \quad (3)$$

где $C_{m,n-1}$ и $C_{m,n}$ — концентрация трассера в отсеках $n-1$ и n ленты тока m соответственно, $q_m = Q_m/h$ — объемная скорость фильтрации через данную ленту тока в расчете на единицу толщины пласта (для данной ленты тока, как известно, $q_m = const$), t — время, m_p — пористость (отношение объема пор к объему пористой среды), $m_p S_{m,n} h$ — объем, в котором происходит изменение концентрации трассера в отсеке n ленты тока.

Пусть раствор трассера с начальной концентрацией C^0 поступает в выделенную ленту тока в течение времени t_0 , тогда изменение концентрации трассера во времени в отсеках ленты тока будет описываться следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dC_{m,0}(t)}{dt} = -\frac{m_p S_{m,0}}{q_m} C_{m,0}(t), \quad C_{m,0}(t) = C^\circ (t \leq t_0), \\ \frac{dC_{m,1}(t)}{dt} = \frac{m_p S_{m,1}}{q_m} (C_{m,0}(t) - C_{m,1}(t)), \quad C_{m,1}(0) = 0, \\ \dots \\ \frac{dC_{m,n}(t)}{dt} = \frac{m_p S_{m,n}}{q_m} (C_{m,n-1}(t) - C_{m,n}(t)), \quad C_{m,n}(0) = 0, \\ \dots \\ \frac{dC_{m,N}(t)}{dt} = \frac{m_p S_{m,N}}{q_m} (C_{m,N-1}(t) - C_{m,N}(t)), \quad C_{m,N}(0) = 0. \end{array} \right. \quad (4)$$

При условии, что объемы отсеков ленты тока одинаковы, имеем

$$\frac{m_p S_{m,0}}{q_m} = \frac{m_p S_{m,1}}{q_m} = \dots = \frac{m_p S_{m,n}}{q_m} = \dots = \frac{m_p S_{m,N}}{q_m} = k_m.$$

Решения системы для относительных концентраций будут следующими:

$$\tilde{C}_{m,0}(t) = \frac{C_{m,0}(t)}{C^\circ} = \begin{cases} 1, & t \leq t_0, \\ \exp(k_m(t_0 - t)), & t > t_0, \end{cases}$$

$$\tilde{C}_{m,n}(t) = \frac{C_{m,n}(t)}{C^\circ} = \begin{cases} 1 - \exp(-k_m t) \sum_{j=0}^{n-1} \frac{k_m^j t^j}{j!}, & t \leq t_0, \\ \exp(k_m(t_0 - t)) \sum_{j=0}^n \frac{k_m^j (t-t_0)^j}{j!} - \exp(-k_m t) \sum_{j=0}^{n-1} \frac{k_m^j t^j}{j!}, & t > t_0. \end{cases} \quad (5)$$

В теории хроматографии система дифференциальных уравнений, аналогичная системе (4), составляет основу теории тарелок [7–9]. Отличие, однако, состоит в том, что в хроматографии обычно рассматривается течение подвижной фазы через цилиндрическую трубку постоянного сечения — полую или заполненную частицами сорбента колонку, хроматографируемое вещество сорбируется и поэтому перемещается с меньшей, чем подвижная фаза, линейной скоростью, находясь в начальный момент только на нулевой секции (тарелке) хроматографической колонки. Следует также отметить, что в хроматографической системе число тарелок не может быть произвольным, оно задается так, чтобы дисперсия концентрационной кривой на выходе из последней тарелки совпадала с дисперсией хроматографического пика, определяемой экспериментально по результатам хроматографирования какого-либо вещества.

2. Обсуждение результатов

Расчет концентрации трассера по уравнениям в двухскважинной системе проводили при следующих параметрах, использованных в работах [10; 11]:

- расстояние между скважинами $2a = 5$ м;
- толщина пласта $h = 10$ м;
- объемная скорость закачки (фильтрации) $Q = 2$ м³/мин;
- радиусы нагнетательной и добывающей скважин $r = 0,1$ м;
- пористость $m_p = 0,2$.

Для построения лент тока параметр σ задавали следующим образом:

$$\sigma_m = -\pi + \pi m/M \quad (m = -101, -100, \dots, 101; M = 180),$$

каждую ленту тока разбивали на N отсеков, положение соответствующих эквипотенциалей выбирали с помощью итерационной процедуры исходя из условия

$S_{m,n} = const$ и учитывая, что минимальное и максимальное значения τ соответствуют точкам $(-a + r, 0)$ и $(a - r, 0)$. Таким образом, при проведении расчетов принимали во внимание не все ленты тока, а только те, по которым вынос трассера из пласта в добывающую скважину осуществляется на начальном этапе фильтрации.

Относительная концентрация трассера в добывающей скважине может быть найдена путем суммирования концентраций по лентам тока (с учетом разбавления):

$$\tilde{C}_N(t) = \frac{1}{2M} \sum_m \tilde{C}_{m,N}(t). \quad (6)$$

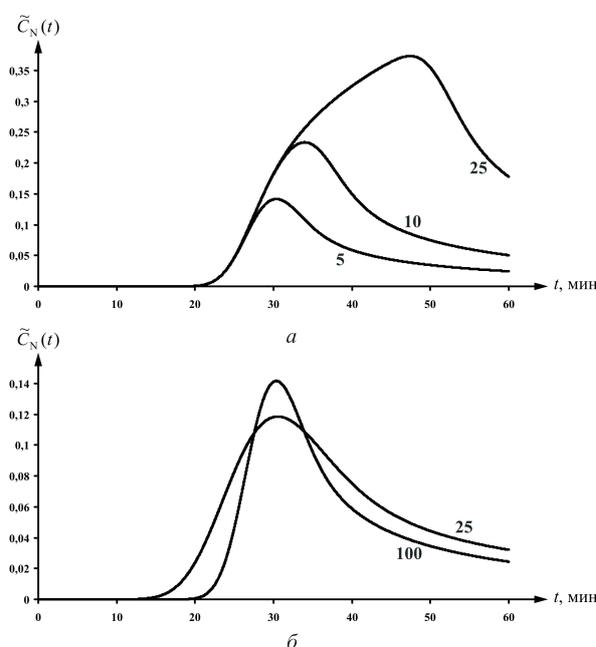


Рис. 3. Зависимости относительной концентрации трассера от времени;
a — при $N = 100$ (числа у кривых — значения t_0 , мин),
б — при $t_0 = 5$ мин (числа у кривых — значения N)

Результаты расчетов представлены на рис. 3, *a* при $N = 100$ и различной продолжительности периода нагнетания раствора трассера в пласт ($t_0 = 5, 10$ и 25 мин) и рис. 3, *б* при $t_0 = 5$ мин и различном количестве отсеков лент тока $N = 25$ и 100 . Полученные концентрационные кривые хорошо согласуются с приведенными в литературе [10; 11] аналогичными кривыми, рассчитанными путем решения дифференциального уравнения с частными производными, описывающего конвективно-диффузионный массоперенос трассера в пористой среде. Соответствующее аналитическое решение фильтрационной задачи в виде степенного ряда было найдено авторами с использованием преобразования Лапласа. Анализ представленных на рис. 3 концентрационных кривых показывает, что, как и в хроматографической теории тарелок, дисперсия выходной кривой при фильтрации трассера в пористой среде определяется числом ступеней (теоретических тарелок или как в рассматриваемой модели — числом отсеков лент тока), на которых устанавливается материальный баланс переносимого потоком вещества. Если вре-

мя закачки трассера в пласт невелико, то концентрационная кривая имеет вид пика с растянутым тылом. При увеличении t_0 до значений, сопоставимых с временем выноса из пласта первых порций трассера, положение максимума кривой смещается, а форма фронта искажается.

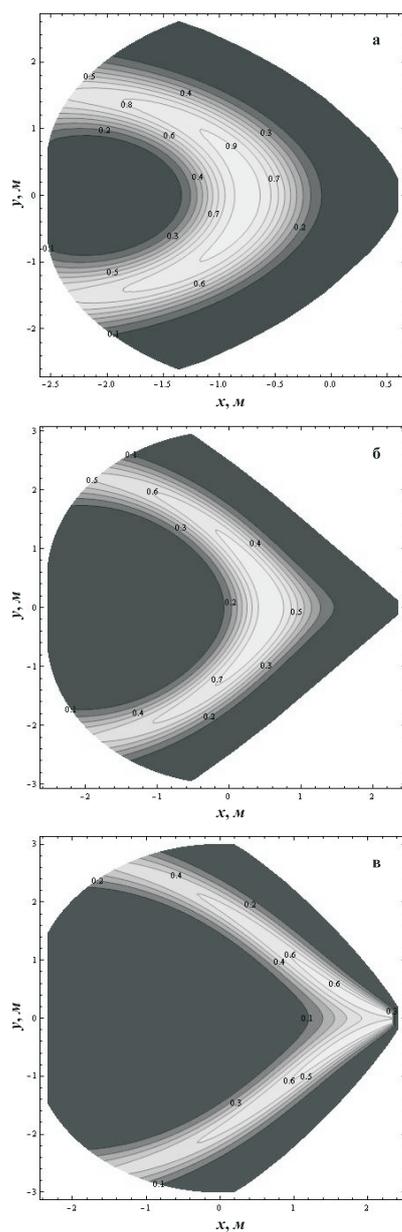


Рис. 4. Концентрационная зона трассера в пласте в различные фиксированные моменты времени: *а* — 10, *б* — 20, *в* — 30 мин от начала закачки трассера, $t_0 = 5$ мин, числа — значения относительной концентрации

С использованием уравнений (5) можно рассчитать также распределение концентрации трассера в пласте в различные моменты времени. Соответствующие результаты при $N = 100$ и $t_0 = 5$ мин приведены на рис. 4 для $t = 10, 20$ и 30 мин. Рассчитанные нами распределения концентрации трассера соответствуют литературным данным, полученным более сложным способом при тех же параметрах системы [10; 11]. Нетрудно видеть, что в процессе фильтрации формируется зона с концентрационным максимумом вблизи линии, соединяющей центры скважин. Максимум зоны достаточно быстро достигает добывающей скважины, но основная масса внесенного в пласт трассера мигрирует по более длинным траекториям (соответственно, за большее время), именно поэтому у концентрационных кривых на рис. 3 тыл растянут по сравнению с фронтом.

Таким образом, рассмотренное в работе обобщение хроматографической теории тарелок на случай двумерной фильтрации несорбирующегося трассера в пористой среде однородного пласта постоянной толщины в системе равнодебитных нагнетательной и добывающей скважин позволяет сравнительно просто проводить приближенные расчеты концентрации трассера как в различные моменты времени в добывающей скважине, так и в определенный момент в различных точках пласта. Требуемые при этом численные значения параметров модели, как правило, известны (либо их нетрудно определить). Неопределенность имеет место только при разбиении пласта на ленты и отсеки лент тока, однако если модель привлекается для интерпретации результатов реальной закачки трассера в пласт и есть основания считать, что при этом выполнены основные условия ее применимости, то разбиение пласта можно при необходимости скорректировать непосредственно при проведении расчетов.

Предметом дальнейшего изучения может быть анализ возможности применения рассмотренной модели в случае неоднородного пласта или при одновременной работе одной нагнетательной и нескольких произвольно расположенных относительно нее добывающих скважин.

Литература

- [1] Соколовский Э.В., Соловьев Г.Б., Тренчиков Ю.И. Индикаторные методы изучения нефтегазоносных пластов. М.: Недра, 1986. 157 с.
- [2] Каневская Р.Д. Математическое моделирование гидродинамических процессов разработки месторождений углеводородов. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. 140 с.
- [3] Маскет М. Течение однородных жидкостей в пористой среде. М.; Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2004. 628 с.
- [4] Азиз Х., Сеттари Э. Математическое моделирование пластовых систем. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. 416 с.
- [5] Подземная гидравлика / К.С. Басниев [и др.]. М.: Недра, 1986. 303 с.
- [6] Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). М.: Наука, 1973. 832 с.
- [7] Гольберт К.А., Вигдергауз М.С. Введение в газовую хроматографию. М.: Химия, 1990. 352 с.
- [8] Ногаре С.Д., Джувет Р.С. Газожидкостная хроматография. Теория и практика. Л.: Недра, 1966. 472 с.
- [9] Аналитическая хроматография / К.И. Сакодынский [и др.]. М.: Химия, 1993. 464 с.

- [10] Chen J.S., Liu C.W., Liang C.P. Evaluation of longitudinal and transverse dispersivities/distance ratios for tracer test in a radially convergent flow field with scale-dependent dispersion // *Adv. Water Res.* 2006. V. 29. № 6. P. 887–898.
- [11] Laplace transform power series solution for solute transport in a convergent flow field with scale-dependent dispersion / J.S. Chen [et al.] // *Water Resour. Res.* 2003. V. 39. № 8. P. 1–10.

Поступила в редакцию 21/II/2013;
в окончательном варианте — 21/II/2013.

SIMULATION OF TWO-DIMENSIONAL ONE-PHASE TRACER FLOW WITH THE USE OF CHROMATOGRAPHIC PLATE THEORY

© 2013 S.Y. Kudryashov, L.A. Onuchak, D.A. Panarin³

Generalization of chromatographic plate theory in case of two-dimensional non-sorbing tracer flow in a homogeneous porous media of uniform thickness with equal debit injection and producing wells are considered. It is shown that in this approach approximate calculation of tracer concentration at different times in producing well, and at a fixed time at various porous media points can be carried out.

Key words: porous media, non-sorbing tracer flow, calculation of concentration, chromatographic plate theory.

Paper received 21/II/2013.
Paper accepted 21/II/2013.

³Kudryashov Stanislav Yurievich (kstasu@mail.ru), Onuchak Lyudmila Artemovna (onuchak@samsu.ru), Panarin Denis Alexandrovich (denis_panarin@mail.ru), the Dept. of Physical Chemistry and Chromatography, Samara State University, Samara, 443011, Russian Federation.