

УДК 531.36

ДИНАМИКА БУКСИРОВКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА НА УПРУГОМ ТРОСЕ В БЕЗГРАВИТАЦИОННОМ ПРОСТРАНСТВЕ¹

© 2013 В.С. Асланов, В.В. Юдинцев²

Рассматривается движение твердого тела, соединенного упругим тросом с космическим аппаратом – буксиром, в безгравитационном пространстве. Получены уравнения пространственного движения твердого тела и изучено влияние на его поведение начальных условий движения. Показана возможность существования критических режимов движения, которые могут приводить к запутыванию троса.

Ключевые слова: твердое тело, космический буксир, упругий трос.

Введение

Статья посвящена изучению пространственного движения твердого тела на тросовой связи с космическим буксиром. Динамике твердого тела в космическом пространстве посвящено большое число работ: отметим монографию В.В. Белецкого [1], посвященную орбитальному движению космических аппаратов (КА), монографии В.А. Ярошевского [2] и В.С. Асланова [3], в которых изучается движение твердого тела в атмосфере. Движение КА относительно центра масс на упругой связи в составе космической тросовой системы рассматривались в работах В.С. Асланова [4–6], В.С. Асланова и А.С. Ледкова [7], В.С. Асланова и Н.Р. Стратилатова [8], Ю.М. Заболотнова и О.Н. Наумова [9]. В работах [4–9] одно из концевых тел системы совершало заданное орбитальное движение. В представленной статье рассматривается движение тросовой системы, когда одно из тел системы – КА-буксир – является активным, оказывающим влияние как на движение всей системы, так и на движение вокруг центра масс твердого тела – пассивного осесимметричного КА. Уравнения пространственного движения твердого тела на вязкоупругом тросе вокруг центра масс и относительно центра масс всей системы строятся на основе формализма Лагранжа. Обобщенные координаты выбраны так, что упрощаются анализ относительного движения твердого тела и

¹Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 12-01-00317-а).

²Асланов Владимир Степанович (aslanov_vs@mail.ru), Юдинцев Вадим Вячеславович (yudintsev@classmech.ru), кафедра теоретической механики Самарского государственного аэрокосмического университета (Национального исследовательского университета), 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

решение прикладных задач, связанных с оценкой безударности транспортных операций, совершаемой активным КА. Численное моделирование позволяет выявить режимы движения твердого тела, характеризующиеся большой амплитудой колебаний, приводящей к запутыванию троса.

1. Уравнения движения

При построении модели используются четыре системы координат. Инерциальная система координат $O'x'_0y'_0z'_0$: центры масс тел в процессе движения остаются в плоскости $O'x'_0y'_0$. Подвижная система координат $Ox_0y_0z_0$, расположенная в центре масс системы и движущаяся поступательно с центром масс, относительно $O'x'_0y'_0z'_0$ (оси Ox , Oy , Oz параллельны соответствующим осям $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$). Подвижная система координат, связанная с прямой, соединяющей центры масс тел $Cx_cy_cz_c$: ось x_c направлена от центра масс пассивного тела к активному телу, Cy_c параллельна плоскости Ox_0y_0 , а ось Cz_c дополняет систему координат до правой. Четвертая система координат $Cxyz$ связана с твердым телом.

Для записи уравнений движения системы воспользуемся формализмом Лагранжа [10]:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = Q_i, \quad i = 1, \dots, 7. \quad (1)$$

В качестве обобщенных координат выберем (см. рис. 1): две координаты центра масс системы в $O'x'_0y'_0z'_0$ ($x \equiv q_1, y \equiv q_2$); угол поворота системы координат $Cx_cy_cz_c$ относительно $Ox_0y_0z_0$ вокруг оси z_0 ($\alpha \equiv q_3$); расстояние между центром масс твердого тела и активным КА ($s \equiv q_4$) и угловое положение базиса $Cxyz$, связанного с твердым телом, относительно базиса $Cx_cy_cz_c$ ($\psi \equiv q_5, \theta \equiv q_6, \varphi \equiv q_7$).

1.1. Кинетическая энергия системы

Рассматривается космическая тросовая система, состоящая из двух тел: активного КА — материальной точки 1, пассивного КА — твердого тела 2 и вязкоупругого невесомого троса. Кинетическая энергия системы имеет вид:

$$T = T_v + T_\omega, \quad (2)$$

где T_ω — кинетическая энергия вращательного движения твердого тела вокруг своего центра масс; T_v — кинетическая энергия поступательного движения системы:

$$T_v = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}. \quad (3)$$

Абсолютные скорости центров масс КА $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ определяются как суммы скоростей центра масс системы и скоростей движения центров масс КА относительно центра масс системы:

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_0 + \frac{d\mathbf{R}_i}{dt}, \quad i = 1, 2. \quad (4)$$

Радиус-вектор скорости центра масс системы \mathbf{v}_0 в проекциях на оси неподвижной системы координат $O'x'_0y'_0z'_0$ определяется следующим образом:

$$\mathbf{v}_0^{(0)} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

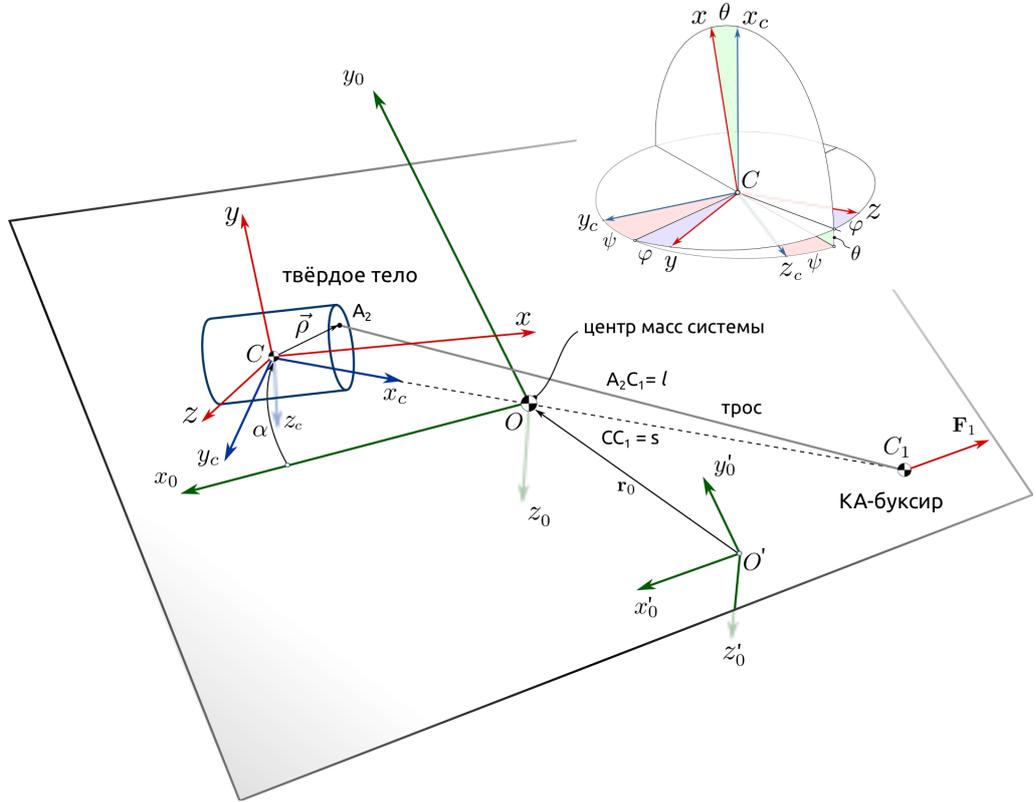


Рис. 1. Схема системы

Здесь и далее при записи координатных столбцов векторов верхним индексом в скобках будем обозначать систему координат, в которой записывается вектор. Координатный столбец радиуса-вектора положения пассивного КА относительно центра масс системы в проекциях на оси $Ox_0y_0z_0$ имеет вид:

$$\mathbf{R}_2^{(0)} = \begin{bmatrix} s_2 \cos \alpha \\ s_2 \sin \alpha \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

активного КА:

$$\mathbf{R}_1^{(0)} = \begin{bmatrix} -s_1 \cos \alpha \\ s_1 \sin \alpha \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

где s_1, s_2 — расстояния от центра масс системы до центров масс КА 1 и 2, соответственно равные:

$$s_1 = s \frac{m_2}{m_1 + m_2}, \quad s_2 = s \frac{m_1}{m_1 + m_2}, \quad (8)$$

где s — расстояние между центрами масс КА. Подставляя (6), (7) и (8) в (4), получим вектор скорости активного КА:

$$\mathbf{V}_1^{(0)} = \frac{1}{m_1 + m_2} \begin{bmatrix} m_2 (\dot{\alpha} s \sin \alpha + \dot{s} (-\cos \alpha) + \dot{x}) + m_1 \dot{x} \\ m_2 (-\dot{s} \sin \alpha - \dot{\alpha} s \cos \alpha + \dot{y}) + m_1 \dot{y} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (9)$$

и вектор скорости пассивного КА:

$$\mathbf{V}_2^{(0)} = \frac{1}{m_1 + m_2} \begin{bmatrix} m_1(-\dot{\alpha}s \sin \alpha + \dot{s} \cos \alpha + \dot{x}) + m_2\dot{x} \\ m_1(\dot{s} \sin \alpha + \dot{\alpha}s \cos \alpha + \dot{y}) + m_2\dot{y} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Подставляя (9) и (10) в (3), получим кинетическую энергию поступательного движения системы:

$$T_v = \frac{m_2 m_1 (\dot{\alpha}^2 s^2 + \dot{s}^2 + 2v_0^2) + v_0^2 (m_1^2 + m_2^2)}{2(m_1 + m_2)}. \quad (11)$$

Для определения составляющей T_ω в выражении (2) найдем угловую скорость твердого тела, которая складывается из угловой скорости базиса $Cx_c y_c z_c$ и угловой скорости этого тела относительно базиса $Cx y z$:

$$\boldsymbol{\omega}_2^{(2)} = \boldsymbol{\omega}_c^{(2)} + \boldsymbol{\omega}_{2c}^{(2)} = \mathbf{A}^{2c} \boldsymbol{\omega}_c^{(c)} + \boldsymbol{\omega}_{2c}^{(2)}, \quad (12)$$

где верхний индекс в 2 скобках указывает на систему координат $Cxyz$, связанную с твердым телом; \mathbf{A}^{2c} – матрица преобразования координат из базиса $Cx_c y_c z_c$ в базис $Cxyz$ [11]:

$$\mathbf{A}^{2c} = \begin{bmatrix} c_\theta & s_\theta s_\varphi & s_\theta c_\varphi \\ s_\theta s_\psi & c_\varphi c_\psi - c_\theta s_\varphi s_\psi & -s_\varphi c_\psi - c_\theta c_\varphi s_\psi \\ -s_\theta c_\psi & c_\theta s_\varphi c_\psi + c_\varphi s_\psi & c_\theta c_\varphi c_\psi - s_\varphi s_\psi \end{bmatrix},$$

где $c_\theta = \cos \theta$, $s_\theta = \sin \theta$, $c_\psi = \cos \psi$, $s_\psi = \sin \psi$, $c_\varphi = \cos \varphi$, $s_\varphi = \sin \varphi$. Вектор угловой скорости базиса $Cx_c y_c z_c$ определяется следующим образом:

$$\boldsymbol{\omega}_c^{(c)} = \mathbf{A}^{co} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix}, \quad (13)$$

где \mathbf{A}^{co} – матрица преобразования координат из базиса $Ox_0 y_0 z_0$ в базис $Cx_c y_c z_c$:

$$\mathbf{A}^{co} = \begin{bmatrix} -\cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Вектор угловой скорости пассивного КА относительно системы координат $Cx_c y_c z_c$ запишем, используя углы Эйлера и их производные [11]:

$$\boldsymbol{\omega}_{2c}^{(2)} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta \\ \dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi \\ -\dot{\theta} \sin \varphi + \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Кинетическая энергия движения твердого тела относительно собственного центра масс будет определяться формулой:

$$T_\omega = \boldsymbol{\omega}_2^{(2)T} \mathbf{J}^{(2)} \boldsymbol{\omega}_2^{(2)}, \quad (16)$$

где $\mathbf{J}^{(2)}$ – тензор инерции твердого тела в базисе $Cxyz$: $\mathbf{J}^{(2)} = \text{diag}(A, B, B)$. Подставляя в (16) (12), с учетом (13), (15) и (11) окончательно получим кинетическую энергию всей системы в виде:

$$\begin{aligned} 2T = & \frac{1}{m_1 + m_2} [m_2 m_1 (\dot{\alpha}^2 s^2 + \dot{s}^2 + 2v_0^2) + v_0^2 (m_1^2 + m_2^2)] + \\ & + A_2 (\dot{\psi} \cos \theta - \dot{\alpha} \sin \theta \cos \psi + \dot{\varphi})^2 + B_2 (\dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \\ & + B_2 [\dot{\alpha}^2 (\cos^2 \theta \cos^2 \psi + \sin^2 \psi) + \dot{\alpha} (2\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\psi} \sin 2\theta \cos \psi)]. \end{aligned} \quad (17)$$

1.2. Обобщенные силы

На активное тело действуют сила тяги \mathbf{F}_1 и сила натяжения троса \mathbf{F}_{t1} , на пассивное тело только сила натяжения троса \mathbf{F}_{t2} . Сила натяжения вязкоупругого троса определяется формулой:

$$F_t = H_v [c_t(l - l_0) + k_t \dot{l}], \quad (18)$$

где l – длина троса; l_0 – длина троса в недеформированном состоянии; c_t – жесткость троса; k_t – коэффициент демпфирования троса; $\dot{l} = dl/dt$; H_v – функция Хевисайда

$$H_v = \begin{cases} 0, & l \leq l_0, \\ 1, & l > l_0. \end{cases}$$

Радиус-вектор \mathbf{R}_{12} , соединяющий центры масс КА, запишем в виде:

$$\mathbf{R}_{12}^{(0)} = \mathbf{R}_2^{(0)} + \mathbf{A}^{oc} \mathbf{A}^{c2} \boldsymbol{\rho}^{(2)} - \mathbf{R}_1^{(0)},$$

где $\boldsymbol{\rho}^{(2)}$ – координатный столбец радиуса-вектора точки крепления троса на твердом теле относительно системы координат $Cxyz$. Длина троса равна

$$|\mathbf{R}_{12}^{(0)}| = l = \sqrt{s^2 - 2s[\rho_x \cos \theta + \sin \theta (\rho_y \sin \varphi + \rho_z \cos \varphi)] + \rho^2}.$$

Будем предполагать, что длина троса существенно больше модуля вектора $\boldsymbol{\rho}$: $s \gg |\boldsymbol{\rho}|$, тогда приближенно будем полагать, что

$$l \approx s - \rho_x \cos \theta - \sin \theta (\rho_y \sin \varphi + \rho_z \cos \varphi). \quad (19)$$

Дифференцируя (19), получим скорость деформации троса

$$\dot{l} = \dot{s} + \dot{\theta} [\rho_x \sin \theta - \cos \theta (\rho_y \sin \varphi + \rho_z \cos \varphi)] + \dot{\varphi} \sin \theta (\rho_z \sin \varphi - \rho_y \cos \varphi). \quad (20)$$

Тогда вектор силы натяжения имеет вид:

$$\mathbf{F}_{t2}^{(0)} = -\mathbf{F}_{t1}^{(0)} = \mathbf{A}^{oc} \mathbf{e}_x^{(c)} F_t,$$

где $\mathbf{e}_x^{(c)}$ – орт оси x системы координат $Cx_c y_c z_c$. Координатный столбец точки приложения силы на твердом теле определяется в виде:

$$\mathbf{r}_{t2}^{(0)} = \mathbf{r}_2^{(0)} + \mathbf{A}^{oc} \mathbf{A}^{c2} \boldsymbol{\rho}^{(2)}. \quad (21)$$

По определению обобщенной силы [10] имеем:

$$Q_i = \mathbf{F}_{t1}^{(0)} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{t1}^{(0)}}{\partial q_i} + \mathbf{F}_{t2}^{(0)} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{t2}^{(0)}}{\partial q_i} + \mathbf{F}_1^{(0)} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_1^{(0)}}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, 7.$$

Будем рассматривать случай закрепления троса на оси симметрии твердого тела $\boldsymbol{\rho}^{(2)} = (\rho_x, 0, 0)^T$, тогда окончательно выражения для обобщенных сил примут вид:

$$Q_1 = \rho_x \sin \theta \sin \psi \left[c_t (L_0 - s + \rho_x \cos \theta) - k(\dot{s} + \dot{\theta} \rho_x \sin \theta) \right] H_v + \frac{m_2 s \sin \alpha F_{x1}}{m_1 + m_2}, \quad (22)$$

$$Q_2 = \frac{m_2 \cos(\alpha) F_{x1}}{m_1 + m_2} - \left[c_t (s - L_0 - \cos(\theta) \rho_x) + k \dot{s} + \dot{\theta} k \sin(\theta) \rho_x \right] H_v, \quad (23)$$

$$Q_3 = Q_5 = Q_7 = 0, \quad (24)$$

$$Q_4 = \sin \theta \rho_x \left[c_t (L_0 - s + \cos \theta \rho_x) - k \dot{s} - \dot{\theta} k \sin(\theta) \rho_x \right] H_v, \quad (25)$$

$$Q_6 = F_{1x}. \quad (26)$$

Найденное значение кинетической энергии системы (17) и обобщенные силы (22)–(26) позволяют сформировать уравнения движения рассматриваемой системы (1).

2. Численный анализ

Для проведения численного моделирования будем использовать следующие параметры системы: $A = 3400 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, $B = C = 15000 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, $m_1 = 500 \text{ кг}$, $m_2 = 3000 \text{ кг}$, $\rho_x = 1 \text{ м}$; $c_t = 10 \text{ Н/м}$, $k_t = 1 \text{ Н}\cdot\text{с/м}$, $l_0 = 200 \text{ м}$. На КА-буксир действует постоянная сила, направленная в сторону противоположную оси Ox_0 : $F_{1x} = -1\text{Н}$, $F_{1y} = 0$. Рассмотрим четыре случая, отличающиеся начальными значениями расстояния между КА и углом α между линией действия активной силы и прямой, соединяющей центры масс КА. В начальный момент угол между осью симметрии твердого тела и прямой CC_1 $\theta_0 = 30^\circ$, и начальная угловая скорость тела равна: $\dot{\varphi}_0 = 0,1 \text{ рад/с}$, $\dot{\psi}_0 = \dot{\theta}_0 = 0$.

2.1. Движение твердого тела при периодическом ослаблении троса, $\alpha_0 \neq 0$

Рассмотрим случай, когда начальное расстояние между телами меньше свободной длины троса $s_0 = 190 \text{ м}$, и начальный угол между линией, соединяющей центры масс тел, и линией действия активной силы \mathbf{F}_1 равен: $\alpha_0 = 30^\circ$. На рис. 2, а приведена зависимость изменения длины троса от времени. Из графика следует, что при выбранных параметрах системы и начальных условиях большую часть времени трос находится в свободном состоянии, растягиваясь и воздействуя на твердое тело в течение коротких временных интервалов. Эти импульсные воздействия приводят и изменению угла между продольной осью твердого тела и линией, соединяющей центры масс тел, что иллюстрирует график на рис. 2, б. Отметим, что малая начальная угловая скорость вращения тела $\dot{\varphi}_0 = 0,1 \text{ рад/с}$ приводит к возникновению гироскопического эффекта и значительному увеличению угла θ : после 1700 секунды этот угол становится больше 90° , что может привести к запутыванию троса для некоторых конструктивных схем пассивного КА.

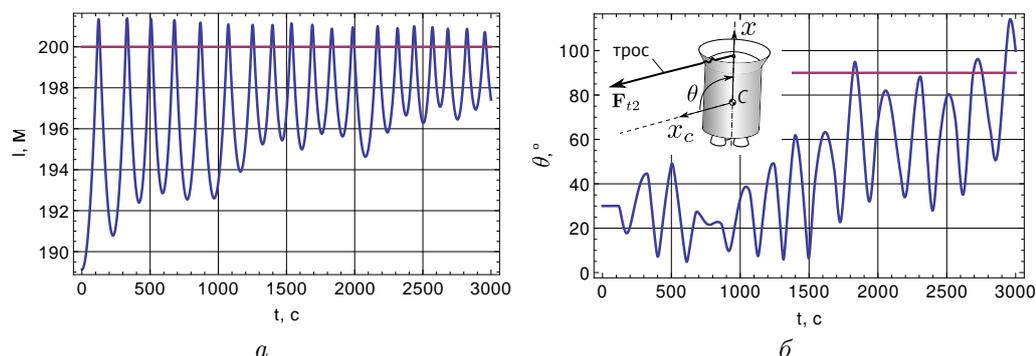


Рис. 2. Изменение длины троса и угла θ для первого случая

2.2. Движение тела при периодическом ослаблении троса, $\alpha_0 = 0$

Второй случай отличается от первого начальной ориентацией троса относительно линии действия активной силы: в начальный момент времени $\alpha_0 = 0$. Ре-

зультаты расчетов приведены на рис. 3, где показан характер изменения длины троса и угла θ .

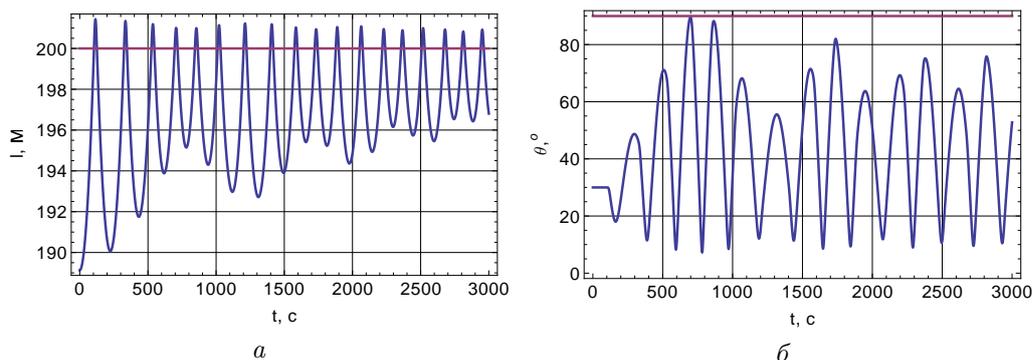


Рис. 3. Изменение длины троса и угла θ для второго случая

Как следует из рис. 3, б, амплитуда колебаний угла между продольной осью твердого тела и линий CC_1 , как и в первом случае, достигает больших значений.

2.3. Движение тела с постоянно натянутым тросом, $\alpha \neq 0$

Рассмотрим движение системы в случае, когда трос всегда натянут: $l > l_0$. Начальные условия движения, за исключением величины s_0 , которую здесь примем равной 200,9 м, соответствуют первому случаю, т. е. $\alpha_0 = 30^\circ$. Как следует из рис. 4, а, трос на всем рассматриваемом интервале времени остается растянутым, затухание высокочастотной составляющей колебания троса обусловлено наличием демпфирования $k_t > 0$. Величина угла θ также достигает больших значений (см. рис. 4, б).

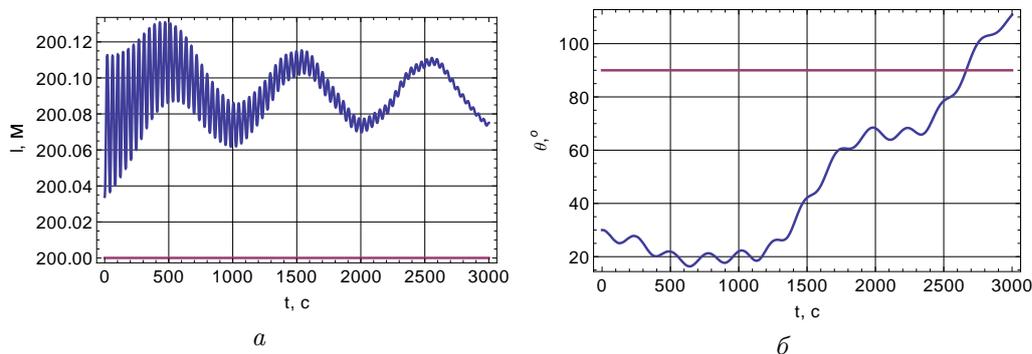


Рис. 4. Изменение длины троса и угла θ для третьего случая

2.4. Движение тела постоянно натянутым тросом, $\alpha = 0$

Рассмотрим движение системы, когда трос всегда натянут: $l > l_0$ и начальное значение угла $\alpha_0 = 0$. Результаты, приведенные на рис. 5, а, показывают,

что в этом случае колебания троса не возмущаются дополнительными колебаниями угла α , что приводит к существенно меньшей амплитуде колебаний угла θ (см. рис. 5, б) по сравнению с предыдущими случаями.

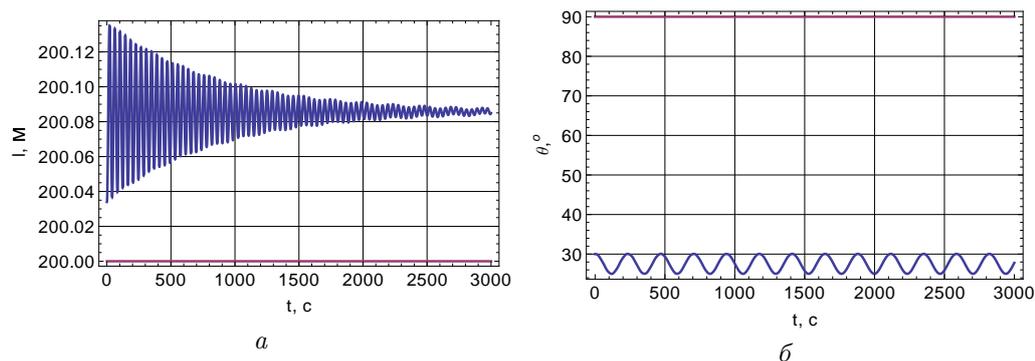


Рис. 5. Изменение длины троса и угла θ для четвертого случая

Заключение

На основе формализма Лагранжа построена математическая модель движения твердого тела на вязкоупругой тросовой связи с КА-буксиром в безгравитационном пространстве. Анализ результатов численного моделирования показал, что при разработке транспортных тросовых космических систем необходимо учитывать движение вокруг центра масс неуправляемого твердого тела, перемещаемого при помощи космического буксира. В процессе движения пассивного твердого тела возможны режимы движения, приводящие к большим отклонениям угла θ между продольной осью твердого тела и прямой, соединяющей центр масс твердого тела и буксир, что может приводить к запутыванию троса. Возникновение таких нежелательных режимов движения определяется начальными условиями движения твердого тела и взаимным положением тел системы в момент начала действия активной силы.

Литература

- [1] Белецкий В.В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: Наука, 1975.
- [2] Ярошевский В.А. Движение неуправляемого тела в атмосфере. М.: Машиностроение, 1978. 167 с.
- [3] Асланов В.С. Пространственное движение тела при спуске в атмосфере. М.: Физматлит, 2004. 160 с.
- [4] Асланов В.С. Колебания тела с орбитальной тросовой системой // Прикладная математика и механика. 2007. № 71(6). С. 1027–1033.
- [5] Асланов В.С. Влияние упругости орбитальной тросовой системы на колебания спутника // Прикладная математика и механика. 2010. № 74(4). С. 582–593.
- [6] Асланов В.С. Колебания спутника с вертикальным упругим тросом на орбите // Известия РАН. Сер.: Механика твердого тела. 2011. № 5. С. 3–15.

- [7] Асланов В.С., Ледков А.С. Хаотические колебания КА с упругим радиально ориентированным тросом // Космические исследования. 2012. 50. (2). С. 194–204.
- [8] Асланов В.С., Стратилатов Н.Р. Малые колебания осесимметричного космического аппарата с тросовой системой // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2008. № 6(65). С. 202–208.
- [9] Заболотнов Ю.М., Наумов О.Н. Движение спускаемой капсулы относительно центра масс при разворачивании орбитальной тросовой системы // Космические исследования. 2012. 50 (2). С. 183–193.
- [10] Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики. Т. 2. Динамика системы материальных точек. 4-е изд. М.: Наука, 1966.
- [11] Виттенбург Й. Динамика систем твердых тел. М.: Мир, 1980.

Поступила в редакцию 22/XI/2012;
в окончательном варианте — 22/XI/2012.

THE DYNAMICS OF TOWAGE BY THE ELASTIC ROPE IN A GRAVITATIONLESS SPACE

© 2013 V.S. Aslanov, V.V. Yudintsev³

The dynamics of the rigid body connected with the space tug by the elastic rope in a gravitationless space is considered. The equations of motion are derived from a Lagrange formalism. The influence of initial conditions on the rigid body behaviour is studied. The possibility of existence of critical behaviour of movement which can cause the entanglement of rope is shown.

Key words: rigid body, space tug, elastic rope.

Paper received 22/XI/2012.

Paper accepted 22/XI/2012.

³Aslanov Vladimir Stepanovich (aslanov_vs@mail.ru), Yudintsev Vadim Vyacheslavovich (yudintsev@classmech.ru), the Dept. of Theoretical Mechanics, Samara State Aerospace University, Samara, 443086, Russian Federation.