

## ОЦЕНКА ЗАТЯГИВАНИЯ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ С ТРАЕКТОРИЯМИ-УТКАМИ<sup>1</sup>

© 2013 Е.С. Голодова,<sup>2</sup> Е.А. Щепакина<sup>3</sup>

Работа посвящена исследованию явления затягивания потери устойчивости сингулярно возмущенных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Для случая, когда дифференциальная система имеет траекторию-утку, получена оценка затягивания потери устойчивости. В качестве иллюстрации полученного математического результата рассмотрена задача определения максимальной температуры безопасного горения.

**Ключевые слова:** затягивание потери устойчивости, траектории-утки, сингулярно возмущенные системы дифференциальных уравнений.

### Введение

В данной работе рассматриваются сингулярно возмущенные системы обыкновенных дифференциальных уравнений, в которых наблюдается эффект затягивания потери устойчивости. Явление затягивания состоит в том, что фактический уход фазовой точки от потерявшего устойчивость положения равновесия быстрой подсистемы происходит не сразу после потери устойчивости, а спустя некоторое время. Существуют разные сценарии затягивания потери устойчивости [1; 2]. В одном из них происходит переход пары комплексных характеристических корней линеаризованной матрицы быстрой подсистемы из левой комплексной полуплоскости в правую. Это явление было обнаружено и исследовано на примере в работе М.А. Шишковой [3], общий случай рассмотрен в работах А.И. Нейштадта [4; 5]. Задача вычисления момента срыва в аналитических системах рассмотрена в работе [4]. В случае векторной медленной переменной аналогичная задача была исследована в работе [6].

Другой сценарий отвечает переходу одного вещественного характеристического корня соответствующей матрицы через ноль и характеризуется наличием траектории-утки дифференциальной системы.

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ 12-08-00069а, 13-01-97002-р .

<sup>2</sup>Голодова Елена Сергеевна (elena-golodova@mail.ru), кафедра дифференциальных уравнений и теории управления Самарского государственного университета, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

<sup>3</sup>Щепакина Елена Анатольевна (shchepakina@smr.ru), кафедра технической кибернетики Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П. Королева (Национального исследовательского университета), 443001, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

В обоих случаях возникают критические в смысле Ляпунова ситуации (пара чисто мнимых или одно нулевое характеристическое число матрицы линеаризованной системы) для соответствующей присоединенной подсистемы [2]. В данной работе рассматривается вопрос об оценке величины затягивания потери устойчивости, протекающего по "уточному" сценарию.

Траектория-утка, или "французская утка", впервые была описана французскими математиками на примере уравнения Ван-дер-Поля [7], в качестве аппарата исследования при этом применялся нестандартный анализ. В работах [8; 9] впервые для построения траектории-утки был применен метод "склеивания" устойчивого и неустойчивого медленных интегральных многообразий дифференциальной системы. Еще один способ построения траектории-уток, основанный на технике сингулярно возмущенных краевых задач, предложен в [10; 11].

Рассмотрим сингулярно возмущенную систему

$$\dot{x} = f(x, y, \varepsilon), \quad (1)$$

$$\varepsilon \dot{y} = p(x, y, \alpha, \varepsilon), \quad (2)$$

где  $\varepsilon$  — малый положительный параметр,  $\alpha$  — дополнительный параметр,  $x$  и  $y$  — скалярные переменные,  $f$  и  $p$  — функции, определенные, непрерывные по совокупности переменных и достаточно гладкие. Предполагается, что значения функций  $f$  и  $p$  сравнимы с единицей при малых значениях параметра  $\varepsilon$ .

Напомним, что медленной кривой  $S_\alpha$  системы (1), (2) называется кривая, описываемая вырожденным уравнением

$$0 = p(x, y, \alpha, 0). \quad (3)$$

Пусть  $y = \phi(x, \alpha)$  — изолированное решение уравнения (3). Подмножество  $S_\alpha^s$  ( $S_\alpha^u$ ) кривой  $S_\alpha$ , определенное условием

$$\frac{\partial p}{\partial y}(x, \phi(x, \alpha), \alpha, 0) < 0 \quad (> 0),$$

называется устойчивой (неустойчивой) компонентой медленной кривой. Устойчивые и неустойчивые компоненты медленной кривой разделяются точками срыва, в которых

$$\frac{\partial p}{\partial y}(x, \phi(x, \alpha), \alpha, 0) = 0.$$

В  $\varepsilon$ -окрестности  $S_\alpha^s$  ( $S_\alpha^u$ ) существует устойчивое или притягивающее (неустойчивое или отталкивающее) медленное интегральное (инвариантное) многообразие. Под медленным интегральным многообразием понимается некоторая инвариантная кривая медленных движений.

Наличие дополнительного параметра  $\alpha$  позволяет "склеить" устойчивое и неустойчивое медленные интегральные многообразия в точке срыва. Через эту точку и проходит траектория-утка.

**Определение.** Траектория системы (1), (2) называется траекторией-уткой, если она проходит непрерывным образом вдоль медленной кривой вначале вдоль устойчивого участка, а затем вдоль неустойчивого участка, причем оба раза проходятся расстояния длины порядка единицы.

Возникает вопрос: как долго траектория-утка будет проходить вдоль неустойчивого медленного интегрального многообразия дифференциальной системы? Ответ на этот вопрос интересен не только с точки зрения теории траекторий-уток, но и в связи с приложениями. Как известно (см., например, работы [8; 9; 12–17]), траектории-утки широко используются для моделирования критических явлений. Задаче определения промежутка затягивания потери устойчивости для траектории-утки и посвящена настоящая работа.

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим автономную сингулярно возмущенную систему дифференциальных уравнений (1), (2)

$$\dot{x} = f(x, y, \varepsilon), \quad (4)$$

$$\varepsilon \dot{y} = p(x, y, \alpha, \varepsilon) \quad (5)$$

с начальными условиями

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0. \quad (6)$$

( $H_1$ ). Пусть  $f$  и  $p$  — достаточно гладкие функции в некоторой области

$$\Delta := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b; c \leq y \leq d\},$$

$(x_0, y_0)$  — внутренняя точка области  $\Delta$ .

( $H_2$ ). Пусть при некотором значении параметра  $\alpha = \alpha_0$  медленная кривая  $S_{\alpha_0}$  системы (4), (5), описываемая уравнением

$$p(x, y, \alpha, 0) = 0, \quad (7)$$

имеет точку самопересечения  $(x_c, y_c) \in \Delta$  (рис. 1), т. е. выполняются условия

$$p(x_c, y_c, \alpha_0, 0) = p_x(x_c, y_c, \alpha_0, 0) = p_y(x_c, y_c, \alpha_0, 0) = 0. \quad (8)$$

При этом точка  $(x_c, y_c)$  делит  $S_{\alpha_0}$  на устойчивые  $(S_{\alpha_0}^{s,1}, S_{\alpha_0}^{s,2})$  и неустойчивые  $(S_{\alpha_0}^{u,1}, S_{\alpha_0}^{u,2})$  части, где

$$S_{\alpha_0}^{s,1} := \{(x, y) \in \Delta : y = \psi_1^s(x), a \leq x \leq x_c\},$$

$$S_{\alpha_0}^{s,2} := \{(x, y) \in \Delta : y = \psi_2^s(x), x_c \leq x \leq b\},$$

$$S_{\alpha_0}^{u,1} := \{(x, y) \in \Delta : y = \psi_1^u(x), a \leq x \leq x_c\},$$

$$S_{\alpha_0}^{u,2} := \{(x, y) \in \Delta : y = \psi_2^u(x), x_c \leq x \leq b\}.$$

Здесь  $\psi_i^s(x)$ ,  $\psi_i^u(x)$  ( $i = 1, 2$ ) являются корнями вырожденного уравнения (7) на соответствующих промежутках, и

$$\frac{\partial p}{\partial y}(x, \psi_1^s, \alpha_0, 0) < 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y}(x, \psi_1^u, \alpha_0, 0) > 0, \quad a \leq x < x_c,$$

$$\frac{\partial p}{\partial y}(x, \psi_2^s, \alpha_0, 0) < 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y}(x, \psi_2^u, \alpha_0, 0) > 0, \quad x_c < x \leq b.$$

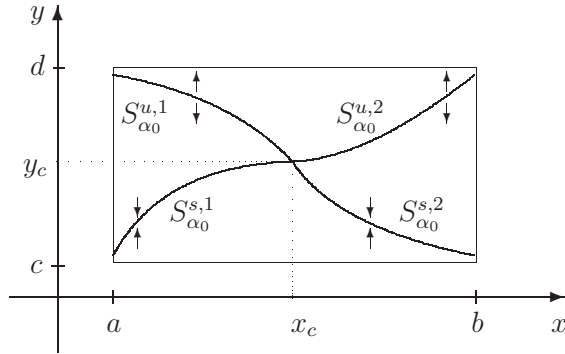


Рис. 1. Медленная кривая системы (4), (5) при  $\alpha = \alpha_0$

(H<sub>3</sub>). Пусть система (4), (5) для некоторого значения параметра

$$\alpha = \alpha^* = \alpha_0 + \varepsilon\alpha_1 + O(\varepsilon^2)$$

имеет решение-утку  $y = \phi(x, \varepsilon)$ , где

$$\phi(x, 0) = \begin{cases} \psi_1^s(x), & a \leq x \leq x_c, \\ \psi_2^u(x), & x_c \leq x \leq b. \end{cases} \quad (9)$$

(H<sub>4</sub>). Рассмотрим начальную задачу (4)–(6), где точка  $(x_0, y_0)$  принадлежит области влияния устойчивого корня  $\psi_1^s(x)$ :

$$a \leq x_0 < x_c, \quad c \leq y_0 \leq \psi_1^s(x_0).$$

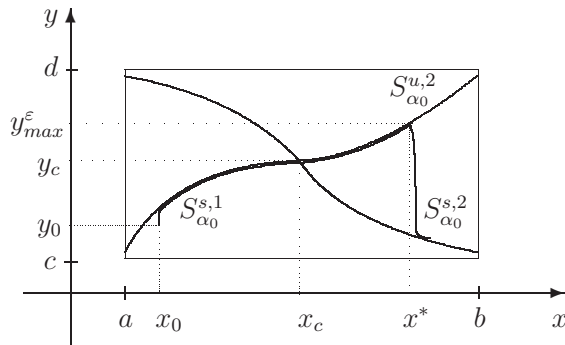


Рис. 2. Траектория-утка начальной задачи (4)–(6) при  $\alpha = \alpha^*$

Для  $\alpha = \alpha^*$  начальная задача (4)–(6) имеет решение-утку, траектория которого, выходя из начальной точки  $(x_0, y_0)$ , притягивается к устойчивой части  $S_{\alpha_0}^{s,1}$ , следует вдоль нее до точки  $(x_c, y_c)$  и продолжает движение вдоль неустойчивой части  $S_{\alpha_0}^{u,2}$  до точки с  $x = x^*$ . В этой точке  $y$  достигает своего максимального значения  $y_{max}^\varepsilon$  на траектории-утке. Затем траектория отрывается от неустойчивой части  $S_{\alpha_0}^{u,2}$  и притягивается к устойчивой части  $S_{\alpha_0}^{s,2}$  медленной кривой  $S_{\alpha_0}$  (см. рис. 2).

Задача состоит в том, чтобы при  $\alpha = \alpha^*$  и достаточно малых  $\varepsilon$  определить точку отрыва  $(x^*, y_{max}^\varepsilon)$  траектории-утки начальной задачи (4)–(6).

## 2. Оценка затягивания потери устойчивости в скалярных неавтономных дифференциальных уравнениях

Для того чтобы решить поставленную задачу, рассмотрим модификацию теоремы об оценке затягивания потери устойчивости в скалярных неавтономных дифференциальных уравнениях, доказанную в работе [18].

Рассмотрим скалярное сингулярное возмущенное дифференциальное уравнение

$$\varepsilon \frac{du}{d\eta} = g(u, \eta, \varepsilon) \quad (10)$$

и исследуем начальную задачу

$$u(\eta_0, \varepsilon) = u_0, \quad \eta \in I_\eta := \{\eta \in R : \eta_0 < \eta < \eta_1\} \quad (11)$$

для достаточно малого  $\varepsilon$ .

Если положить  $\varepsilon = 0$  в (10), мы получим вырожденное уравнение

$$g(u, \eta, 0) = 0.$$

Если это уравнение имеет простой изолированный корень  $u = \psi(\eta)$ , который является устойчивым положением равновесия присоединенного уравнения

$$\frac{du}{d\tau} = g(u, \eta, 0), \quad (12)$$

и если  $u_0$  принадлежит области влияния  $\psi(\eta_0)$ , то асимптотическое поведение решения начальной задачи (10), (11) однозначно определяется теорией сингулярно возмущенных систем.

Пусть  $I_{\varepsilon_0} := \{\varepsilon \in R : 0 < \varepsilon < \varepsilon_0, 0 < \varepsilon_0 \ll 1\}$ , а  $U$  — открытый ограниченный интервал, содержащий начало координат.

Рассмотрим начальную задачу (10), (11) при следующих предположениях:

(A<sub>1</sub>). Функция  $g : U \times I_\eta \times I_{\varepsilon_0} \rightarrow R$  — непрерывная и дважды непрерывно дифференцируемая по  $u$  и  $\varepsilon$ .

(A<sub>2</sub>).  $g(0, \eta, \varepsilon) \equiv 0$  для  $(\eta, \varepsilon) \in \bar{I}_\eta \times \bar{I}_{\varepsilon_0}$  ( $\bar{I}$  означает замыкание  $I$ ).

Из (A<sub>1</sub>) и (A<sub>2</sub>) следует, что решение (10), начинающееся в  $u = u_0$ , остается положительным (отрицательным), если  $u_0 > 0$  ( $u_0 < 0$ ). В дальнейшем мы ограничимся случаем  $u_0 < 0$ . Введем множество

$$U^- := \{u \in U : u \leq 0\}.$$

(A<sub>3</sub>). Множество решений вырожденного уравнения  $g(u, \eta, 0) = 0$  в  $\overline{U^- \times I_\eta}$  состоит из двух кривых  $u \equiv 0$  и  $u = \psi_-(\eta)$ , где  $\psi_-$  из класса  $C^1([\eta_c, \eta_1], R^-)$  и удовлетворяет условиям  $\psi_-(\eta_c) = 0$ ,  $\psi_-(\eta) < 0$  для  $\eta \in (\eta_c, \eta_1]$  (см. рис. 3).

(A<sub>4</sub>).

$$g_u(0, \eta, 0) \begin{cases} < 0 & \text{для } \eta \in [\eta_0, \eta_c), \\ > 0 & \text{для } \eta \in (\eta_c, \eta_1]. \end{cases}$$

Из (A<sub>4</sub>) следует, что  $u = 0$  — экспоненциально устойчивое положение равновесия уравнения (12) при  $\eta \in [\eta_0, \eta_c)$  и неустойчивое при  $\eta \in (\eta_c, \eta_1]$ .

Пусть

$$G(\eta, \eta_0, \varepsilon) := \int_{\eta_0}^{\eta} g_u(0, s, \varepsilon) ds.$$

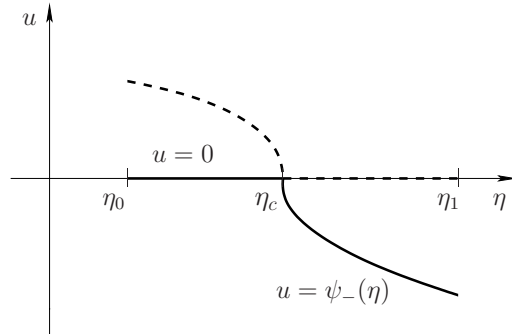


Рис. 3. Множество решений уравнения  $g(u, \eta, 0) = 0$

(A<sub>5</sub>).  $G(\eta, \eta_0, 0) = 0$  имеет корень  $\eta^* \in (\eta_0, \eta_1)$ .

Легко видеть, что  $\eta^*$  удовлетворяет условиям

$$\eta^* > \eta_c, \quad G'(\eta^*, \eta_0, 0) > 0.$$

Следующее предположение выполняется, если вторая производная функции  $g$  по переменной  $u$  при  $u = 0$  положительна при всех допустимых  $\eta$  и  $\varepsilon$ .

(A<sub>6</sub>). Существуют достаточно малые положительные числа  $c_0$  и  $\varepsilon_0$  такие, что  $[-c_0, c_0] \in U$  и

$$g(u, \eta, \varepsilon) \geq g_u(0, \eta, \varepsilon)u \quad \text{для} \quad \eta_0 \leq \eta \leq \eta^*, \quad \varepsilon \in \bar{I}_{\varepsilon_0}, \quad -c_0 \leq u \leq 0.$$

Имеет место следующее утверждение.

**Теорема 1.** Пусть выполняются предположения (A<sub>1</sub>)–(A<sub>6</sub>). Тогда для достаточно малого  $\varepsilon$  и  $u_0 < 0$  существует единственное решение (10), (11), удовлетворяющее

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(\eta, \varepsilon) = \begin{cases} 0 & \text{для} \quad \eta \in [\eta_0, \eta^*), \\ \psi_-(\eta) & \text{для} \quad \eta \in (\eta^*, \eta_1]. \end{cases}$$

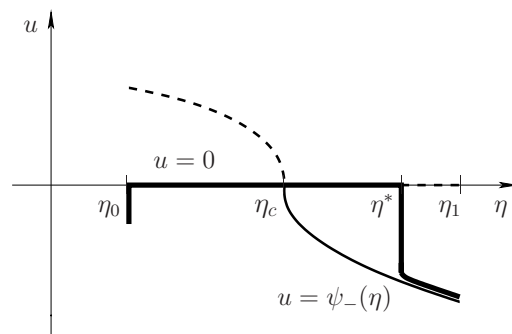


Рис. 4. Решение  $u = u(\eta, \varepsilon)$  начальной задачи (10), (11)

Траектория этого решения, выходя из начальной точки, после короткого промежутка времени следует вдоль  $\eta$ -оси до  $\eta = \eta^*$ . Затем эта траектория срывается в направлении устойчивой части решения вырожденного уравнения  $u = \psi_-(\eta)$ , см. рис. 4.

### 3. Теорема об оценке

Вернемся к системе (4), (5). ( $H_5$ ). Потребуем, чтобы

$$f(x, y, 0) \neq 0 \quad (13)$$

в области  $\Delta$ .

Тогда, в силу непрерывности функции  $f$ , для достаточно малых  $\varepsilon$  будет выполняться  $f(x, y, \varepsilon) \neq 0$  для  $(x, y) \in \Delta$ .

Разделив уравнение (5) на (4) и подставив  $\alpha = \alpha^*$ , получим

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = \frac{p(x, y, \alpha^*, \varepsilon)}{f(x, y, \varepsilon)}. \quad (14)$$

Чтобы применить теорему 1, введем замену переменных

$$y = \phi(x, \varepsilon) + u, \quad (15)$$

где  $\phi(x, \varepsilon)$  описывает траекторию-утку системы (4), (5). В результате такой замены из (14) получим уравнение

$$\varepsilon \frac{du}{dx} = \frac{p(x, \phi(x, \varepsilon) + u, \alpha^*, \varepsilon)}{f(x, \psi(x, \varepsilon) + u, \varepsilon)} - \varepsilon \frac{d\phi}{dx}, \quad (16)$$

медленная кривая которого состоит из горизонтального отрезка  $u = 0$  и кривой  $u = \chi(x)$  (рис. 5), где

$$\chi(x) = \begin{cases} \psi_1^u(x) - \phi(x, \varepsilon), & a \leq x \leq x_c, \\ \psi_2^s(x) - \phi(x, \varepsilon), & x_c \leq x \leq b. \end{cases}$$

При этом линия  $u = 0$  на промежутке  $a \leq x \leq b$  является точной траекторией-уткой уравнения (16).

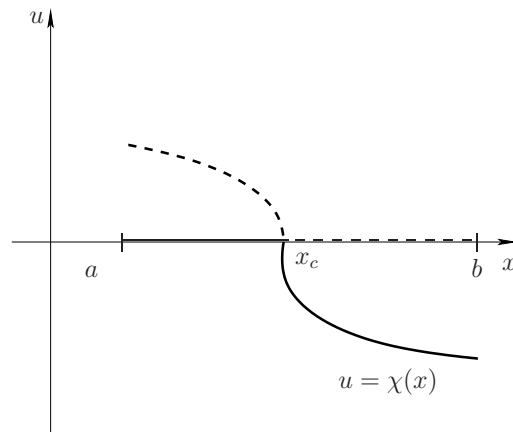


Рис. 5. Медленная кривая уравнения (16)

Таким образом, траектория-утка системы (4), (5) соответствует траектории-утке уравнения (16), которая, выходя из начальной точки  $(x_0, u_0)$ , где  $a \leq x_0 < x_c$ ,  $u_0 < 0$ , притягивается к устойчивой части  $u \equiv 0$ , проходит вдоль ее до точки с  $x = x^*$ , после чего срывается в направлении  $\chi(u)$ , см. рис. 6.

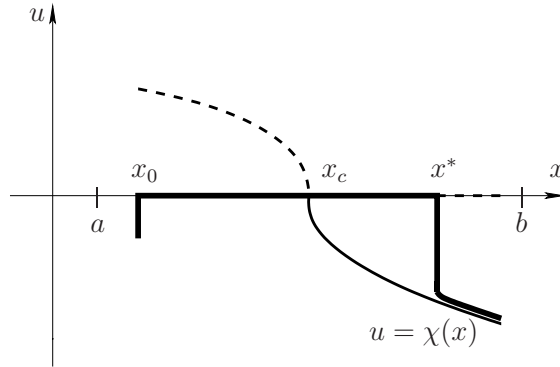


Рис. 6. Траектория-утка уравнения (16) с начальной точкой  $(x_0, u_0)$ ,  $u_0 < 0$

Функция  $\phi = \phi(x, \varepsilon)$  является решением (14), следовательно, формулу (16) можно переписать в виде

$$\varepsilon \frac{du}{dx} = \frac{p(x, \phi(x, \varepsilon) + u, \alpha^*, \varepsilon)}{f(x, \phi(x, \varepsilon) + u, \varepsilon)} - \frac{p(x, \phi(x, \varepsilon), \alpha^*, \varepsilon)}{f(x, \phi(x, \varepsilon), \varepsilon)} \equiv g(u, x, \varepsilon). \quad (17)$$

Рассмотрим функцию

$$G(x, x_0, \varepsilon) := \int_{x_0}^x g_u(0, s, \varepsilon) ds.$$

Тогда

$$G(x, x_0, 0) = \int_{x_0}^x \frac{p_y(s, \phi(s, 0), \alpha_0, 0)}{f(s, \phi(s, 0), 0)} ds.$$

(H<sub>6</sub>). Пусть уравнение

$$G(x, x_0, 0) = 0 \quad (18)$$

имеет корень  $x^* \in (x_0, b)$ .

Отметим, что, в силу (H<sub>1</sub>) и (H<sub>5</sub>), для достаточно малых  $\varepsilon$  условие (A<sub>6</sub>) можно заменить условием

$$g(u, x, 0) \geq g_u(0, x, 0)u.$$

Здесь, в силу (9) и (17),

$$g(u, x, 0) = \frac{p(x, \phi(x, 0) + u, \alpha_0, 0)}{f(x, \phi(x, 0) + u, 0)}, \quad g_u(0, x, 0) = \frac{p_y(x, \phi(x, 0), \alpha_0, 0)}{f(x, \phi(x, 0), 0)}.$$

(H<sub>7</sub>). Существуют достаточно малые положительные числа  $c_0$  и  $\varepsilon_0$  такие, что  $[-c_0, c_0] \in (c, d)$  и

$$\frac{p(x, \phi(x, 0) + u, \alpha_0, 0)}{f(x, \phi(x, 0) + u, 0)} \geq \frac{p_y(x, \phi(x, 0), \alpha_0, 0)}{f(x, \phi(x, 0), 0)} u$$

для  $x_0 \leq x \leq x^*$ ,  $\varepsilon \in \bar{I}_{\varepsilon_0}$ ,  $-c_0 \leq u \leq 0$ .

Имеет место следующая теорема.

**Теорема 2.** Пусть выполняются условия (H<sub>1</sub>) – (H<sub>7</sub>). Тогда для начальной задачи (4)–(6) при  $\alpha = \alpha^*$  и достаточно малых  $\varepsilon$  имеет место соотношение

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y_{max}^\varepsilon = y^*, \quad y^* = \phi(x^*, 0).$$



#### 4. Максимальная температура безопасного горения в случае автокаталитической реакции

Как уже отмечалось ранее, траектории-утки широко используются для моделирования критических режимов, которые играют роль некоего водораздела между медленными (безопасными) режимами и режимами с самоускорением. Для задач теории горения одной из особенностей критических режимов является возможность достижения высоких температур в рамках безопасного режима. Отметим, что максимальное значение температуры безопасного горения отвечает точке отрыва траектории-утки от неустойчивого медленного инвариантного многообразия моделирующей дифференциальной системы. Рассмотрим задачу определения максимальной температуры безопасного горения на примере классической модели автокаталитического горения в гомогенной среде [8; 9; 17]:

$$\begin{aligned}\varepsilon \frac{d\theta}{d\tau} &= \eta(1-\eta)e^\theta - \alpha\theta, \\ \frac{d\eta}{d\tau} &= \eta(1-\eta)e^\theta\end{aligned}\tag{19}$$

с начальными условиями

$$\theta(0) = 0, \quad \eta(0) = \frac{\eta_0}{1+\eta_0} = \bar{\eta}_0, \quad 0 < \bar{\eta}_0 < 1/2.\tag{20}$$

В этом случае

$$\Delta := \{(\theta, \eta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \eta \leq 1, 0 \leq \theta \leq \eta/\varepsilon\}.$$

Как было показано в [8; 9], при  $\alpha = \alpha_0 = e/4$  медленная кривая системы (19) имеет точку самопересечения с  $\theta = 1$ ,  $\eta = 0.5$  и состоит из четырех ветвей  $S_{e/4}^{u,i}, S_{e/4}^{s,i}, i = 1, 2$ , где

$$\begin{aligned}S_{e/4}^{s,1} &:= \{(\theta, \eta) \in \Delta : \eta = \zeta_1^s(\theta) = 0.5(1 - \sqrt{1 - \theta e^{1-\theta}}), 0 \leq \theta \leq 1\} = \\ &= \{(\theta, \eta) \in \Delta : \theta = \psi_1^s(\eta), 0 \leq \eta \leq 0.5\},\end{aligned}\tag{21}$$

$$\begin{aligned}S_{e/4}^{u,2} &:= \{(\theta, \eta) \in \Delta : \eta = \zeta_2^u(\theta) := 0.5(1 + \sqrt{1 - \theta e^{1-\theta}}), \theta \geq 1\} = \\ &= \{(\theta, \eta) \in \Delta : \theta = \psi_2^u(\eta), \frac{1}{2} \leq \eta < 1\}.\end{aligned}\tag{22}$$

Здесь  $\psi_i^u(\eta)$ , ( $i = 1, 2$ ) — обратные функции к функциям  $\zeta_i^u(\theta)$ .

Траектория-утка начальной задачи (19), (20), отвечающая значению параметра  $\alpha = \alpha^*$ ,

$$\begin{aligned}\alpha^* &= \alpha^*(\varepsilon) = \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon + \alpha_2\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \\ \alpha_0 &= e/4, \quad \alpha_1 = -e/\sqrt{2}, \quad \alpha_2 = 49e/36,\end{aligned}$$

моделирует критический режим и, выходя из начальной точки, после короткого промежутка времени следует вдоль  $S_{e/4}^{s,1}$  до точки срыва с координатами  $\theta = 1$ ,  $\eta = 1/2$ . После этого момента траектория-утка остается вблизи  $S_{e/4}^{u,2}$ , расположенной в области  $\eta > \frac{1}{2}$ , вплоть до некоторой точки  $J$ , в которой происходит срыв к притягивающему медленному инвариантному многообразию, расположенному в  $\varepsilon$ -окрестности  $S_{e/4}^{s,2}$ . Далее она стремится к положению равновесия  $P(0, 1)$  при  $\tau \rightarrow \infty$ , см. рис. 7.

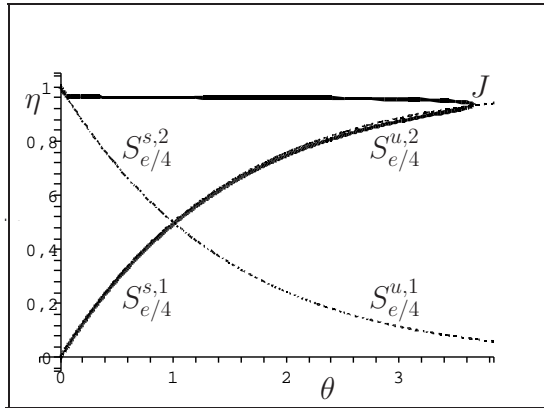


Рис. 7. Траектория-утка и медленная кривая системы (19), моделирующая критический режим. Точка  $J$  — точка отрыва траектории-утки от неустойчивой части медленной кривой — характеризует максимальную температуру безопасного горения:  $\alpha = 0,659926718$ ,  $\varepsilon = 0,01$ ,  $\bar{\eta}_0 = 0,001$

Так как безопасными режимами горения в рассматриваемой модели являются режимы медленного выгорания, при которых значения безразмерной температуры меньше единицы, и режимы, моделируемые траекториями-утками, а точка  $J$  определяет максимальное значение температуры на траектории-утке, то эта точка отвечает максимальной температуре безопасного горения.

Цель состоит в том, чтобы при помощи теоремы 2 найти максимальное значение  $\theta = \theta_\varepsilon^{max}$  на траектории-утке системы (19), выходящей из заданной начальной точки ( $\eta = \bar{\eta}_0, \theta = 0$ ) и отвечающей  $\alpha = \alpha^*(\varepsilon)$ .

Рассмотрим уравнение

$$\varepsilon \frac{d\theta}{d\eta} = \frac{\eta(1-\eta)e^\theta - \alpha\theta}{\eta(1-\eta)e^\theta}, \quad (23)$$

которое следует из системы (19).

Введем новую переменную выражением

$$\theta = \varphi(\eta, \bar{\eta}_0, \varepsilon) + u, \quad (24)$$

где функция  $\varphi(\eta, \bar{\eta}_0, \varepsilon)$  описывает устойчиво-неустойчивую часть медленных движений траектории-утки (вблизи  $S_{e/4}^{s,1}$  и  $S_{e/4}^{u,2}$ ) и

$$\varphi(\eta, \bar{\eta}_0, 0) = \begin{cases} \psi_1^s(\eta) & \text{для } 0 < \eta \leq 0.5, \\ \psi_2^u(\eta) & \text{для } 0.5 \leq \eta < \eta^*. \end{cases} \quad (25)$$

Здесь  $\eta = \eta^*$  координата точки  $J$ , в которой траектория-утка отрывается от неустойчивого медленного инвариантного многообразия.

Из (23) и (24) при  $\alpha = \alpha^*(\varepsilon)$  получаем уравнение

$$\varepsilon \frac{du}{d\eta} = \frac{\alpha^*(\varepsilon)}{\eta(1-\eta)e^{\varphi(\eta, \bar{\eta}_0, \varepsilon)}} \left( \frac{\varphi(\eta, \bar{\eta}_0, \varepsilon)(e^u - 1) - u}{e^u} \right) \equiv g(u, \eta, \varepsilon). \quad (26)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что для уравнения (26) выполняются все предположения теоремы 2 для  $0 < \eta \leq \eta^*$ ,  $\varepsilon < \varepsilon_0$ .

Из (21)–(22) и (26) имеем

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial u}|_{u=0, \varepsilon=0} &\equiv \frac{e(\psi_1^s(\eta) - 1)}{4\eta(1 - \eta)e^{\psi_1^s(\eta)}} = 1 - (\psi_1^s)^{-1}(\eta) < 0, & 0 < \eta < 0,5, \\ \frac{\partial g}{\partial u}|_{u=0, \varepsilon=0} &\equiv \frac{e(\psi_2^u(\eta) - 1)}{4\eta(1 - \eta)e^{\psi_2^u(\eta)}} = 1 - (\psi_2^u)^{-1}(\eta) > 0, & 0,5 < \eta < \eta^*.\end{aligned}$$

Отсюда для функции

$$G(\eta, \bar{\eta}_0, 0) := \int_{\bar{\eta}_0}^{\eta} g_u(0, s, 0) ds$$

следует выражение

$$G(\eta, \bar{\eta}_0, 0) = \int_{\bar{\eta}_0}^{0.5} \left[ 1 - (\psi_1^s)^{-1}(s) \right] ds + \int_{0.5}^{\eta} \left[ 1 - (\psi_2^u)^{-1}(s) \right] ds.$$

Согласно (21)–(22), получаем

$$\begin{aligned}G(\eta, \bar{\eta}_0, 0) &= \int_{\theta_0}^1 (1 - \sigma^{-1})(\zeta_1^s)'(\sigma) d\sigma + \\ &+ \int_1^{\theta} (1 - \sigma^{-1})(\zeta_2^u)'(\sigma) d\sigma := \tilde{G}(\theta, \theta_0, 0),\end{aligned}\quad (27)$$

где  $\theta_0$  — корень уравнения

$$\bar{\eta}_0(1 - \bar{\eta}_0)e^{\theta_0} - \frac{\varepsilon}{4}\theta_0 = 0.$$

Интегрируя по частям (27), получаем уравнение

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{\theta} \right) (1 + \sqrt{1 - \theta e^{1-\theta}}) - \left( 1 - \frac{1}{\theta_0} \right) \bar{\eta}_0 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta_0} \right) + \\ + \frac{1}{2} \int_{\theta_0}^1 \frac{\sqrt{1 - \sigma e^{1-\sigma}}}{\sigma^2} d\sigma - \frac{1}{2} \int_1^{\theta} \frac{\sqrt{1 - \sigma e^{1-\sigma}}}{\sigma^2} d\sigma = 0,\end{aligned}\quad (28)$$

решение которого  $\theta = \theta^*$  определяет точку  $J(\eta^*, \theta^*)$ , где

$$\eta^* = \frac{1}{2} + (1 + \sqrt{1 - \theta^* e^{1-\theta^*}}).$$

Из (28) видно, что максимальная температура  $\theta^*$  зависит от начальной температуры горючего газа  $\theta_0$ . Таким образом, решая уравнение (28), получим зависимость максимальной температуры безопасного горения от начальных данных. Результаты вычислений представлены в таблице.

Таблица

$\bar{\eta}_0$	$\theta_0$	$\theta^*$
0,25	0,4198686011	2,79552
0,3	0,5195379318	2,06085
0,35	0,6261577726	1,64487
0,4	0,7408074347	1,36471
0,45	0,8648427167	1,15907

Аналогичная задача была решена в работах [19; 20] для модели горения газа в инертной среде.

## Заключение

В данной работе разработан математический аппарат для вычисления величины затягивания потери устойчивости в сингулярно возмущенных системах обыкновенных дифференциальных уравнений с траекториями-утками. В качестве приложения полученного математического результата рассмотрена задача определения максимальной температуры безопасного горения газа. Получена зависимость максимальной температуры безопасного горения от начальных данных.

## Литература

- [1] Теория бифуркаций / В.И. Арнольд [и др.] // Современные проблемы математики: Фундаментальные направления. М.: ВИНТИ, 1986. Т. 5. С. 5–218.
- [2] Щепакина Е.А. Два вида смены устойчивости интегральных многообразий // Дифференциальные уравнения. 2004. Т. 40. № 5. С. 713–716.
- [3] Шишкова М.А. Рассмотрение одной системы дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных // Докл. АН СССР. 1973. Т. 209. № 3. С. 576–579.
- [4] Нейштадт А.И. Асимптотическое исследование потери устойчивости равновесия при медленном прохождении пары собственных чисел через мнимую ось // Успехи матем. наук. 1985. Вып. 5. С. 190–191.
- [5] Нейштадт А.И. О затягивании потери устойчивости при динамических бифуркациях // Дифференциальные уравнения. 1987. Т. 23. № 12. С. 2060–2067; Т. 24. № 2. С. 226–233.
- [6] Щетинина Е.В. Одна задача о смене устойчивости интегральных многообразий // Известия РАЕН. 1999. Сер.: МММИУ. Т. 3. № 3. С. 129–134.
- [7] Chasse au canard / E. Benoit [et al.] // Collect. Math. 1980. V. 31. № 3.
- [8] Gorelov G.N., Sobolev V.A. Duck-trajectories in a thermal explosion problem // Appl. Math. Lett. 1992. V. 5. № 6. P. 3–6.
- [9] Gorelov G.N., Sobolev V.A. Mathematical modeling of critical phenomena in thermal explosion theory // Combust. Flame. 1991. V. 87. P. 203–210.
- [10] Периодические движения и бифуркационные процессы в сингулярно возмущенных системах / Е.Ф. Мищенко [и др.]. М: Физматлит, 1995. 336 с.
- [11] Колесов А.Ю., Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х. Решение сингулярно возмущенных краевых задач методом "охоты на уток" // Труды МИАН. 1999. Т. 224. С. 187–207.
- [12] Соболев В.А., Щепакина Е.А. Траектории-утки в одной задаче теории горения // Дифференциальные уравнения. 1996. Т. 32. № 9. С. 1175–1184.
- [13] Щепакина Е.А. Критические условия самовоспламенения в пористой среде // Химическая физика. 2001. Т. 20. № 7. С. 3–9.
- [14] Щепакина Е.А. Притягивающе-отталкивающие интегральные поверхности в задачах горения // Математическое моделирование. 2002. Т. 14. № 3. С. 30–42.
- [15] Е.А. Щепакина Е.А. Сингулярные возмущения в задаче моделирования безопасных режимов горения // Математическое моделирование. 2003. Т. 15. № 8. С. 113–117.
- [16] Shchepakina E. Black swans and canards in self-ignition problem // Nonlinear Analysis: Real World Applications. 2003. V. 4. P. 45–50.

- [17] Соболев В.А., Щепакина Е.А. Редукция моделей и критические явления в макрокинетике. М.: Физматлит, 2010. 320 с.
- [18] Nefedov N.N., Schneider K.R. On immediate-delayed exchange of stabilities and periodic forced canards // Журнал вычислительной математики и матем. физики. 2008. Т. 48. № 1. С. 46–61.
- [19] Голодова Е.С., Щепакина Е.А. Моделирование безопасных процессов горения с максимальной температурой // Математическое моделирование. 2008. Т. 20. № 5. С. 55–58.
- [20] Golodova E.S., Shchepakina E.A. Maximal combustion temperature estimation // Journal of Physics: Conf. Series. 2006. V. 55. P. 94–104.

Поступила в редакцию 3/XII/2012;  
в окончательном варианте — 3/XII/2012.

## ESTIMATION OF DELAYED LOSS OF STABILITY IN DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH CANARDS

© 2013 E.S. Golodova<sup>4</sup> E.A. Shchepakina<sup>5</sup>

The paper is devoted to the investigation of phenomenon of delayed loss of stability in singularly perturbed systems of ordinary differential equations. The estimation for delayed loss of stability is obtained for the differential system with a canard. The problem of maximal temperature of safe combustion determination is considered as an illustration for the obtained mathematical result.

**Key words:** delayed loss of stability, canards, singularly perturbed systems of differential equations.

Paper received 3/XII/2012.  
Paper accepted 3/XII/2012.

---

<sup>4</sup>Golodova Elena Sergeevna ([elena-golodova@mail.ru](mailto:elena-golodova@mail.ru)), the Dept. of Differential Equations and Control Theory, Samara State University, Samara, 443011, Russian Federation.

<sup>5</sup>Shchepakina Elena Anatolievna ([shchepakina@smr.ru](mailto:shchepakina@smr.ru)), the Dept. of Technical Cybernetics, Samara State Aerospace University, Samara, 443086, Russian Federation; the Dept. of Differential Equations and Control Theory, Samara State University, Samara, 443011, Russian Federation