

УДК 539.42

## ОПИСАНИЕ РАССЕЯННОГО РАЗРУШЕНИЯ: ПАРАМЕТР ПОВРЕЖДЕННОСТИ Ю.Н. РАБОТНОВА: ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА, ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ

© 2014 Л.В. Степанова, С.А. Игонин<sup>1</sup>

В 2014 г. исполняется 100 лет со дня рождения выдающегося ученого-механика Юрия Николаевича Работнова, вместе с Л.М. Качановым заложившим основы современной механики поврежденности — динамично развивающейся области механики деформируемого твердого тела. История кафедры механики деформируемого твердого тела Самарского государственного университета неразрывно связана с идеями и наследием Ю.Н. Работнова. В статье приведен обзор современной научной литературы, посвященной вопросам длительного разрушения, развивающей гипотезы и идеи Ю.Н. Работнова и Л.М. Качанова о механизмах длительного разрушения в условиях ползучести, которые применяются для описания процессов разрушения с помощью скалярной и тензорной мер поврежденности. Обсуждаются современные исследования в теории упругости, пластичности и ползучести, механике композиционных материалов, нелинейной механике разрушения, учитывающие поврежденность материалов.

**Ключевые слова:** параметр поврежденности, тензорная мера поврежденности, длительное разрушение, ползучесть, континуальная механика поврежденности, компьютерное имитационное моделирование.

### 1. Идеи Ю.Н. Работнова: концепция длительного разрушения вследствие ползучести

В 1959 г. была опубликована статья Ю.Н. Работнова "О механизме длительного разрушения" [1], в которой рассмотрены механизмы развития трещины и даны оценки длительной прочности на примере образца с трещиной, перпендикулярной направлению растяжения. Позже в 1991 г. статья была воспроизведена в сборнике избранных работ Ю.Н. Работнова "Избранные труды. Проблемы механики деформируемого твердого тела" [2]. В данной работе введена функция  $\omega$ , представляющая собой площадь трещин, приходящуюся на единицу площади поперечного сечения в данный момент времени. В случае плоской модели трещины

<sup>1</sup>Степанова Лариса Валентиновна (stepanova1v@samsu.ru), Игонин Сергей Александрович (sergejigonin@yandex.ru), кафедра математического моделирования в механике Самарского государственного университета, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

скорость роста площади  $\omega$  равна скорости роста трещины  $v$ , т. е.  $\partial\omega/\partial t = v(\sigma)$ . В рамках предположения, что трещина имеет круговую форму, можно получить  $d\omega/dt = \omega^{1/2}v(\sigma)$ . Обобщая полученное соотношение, можно принять

$$d\omega/dt = \omega^\beta v(\sigma). \quad (1.1)$$

Среднее напряжение в сечении при нормальном напряжении  $\sigma_0$  равно  $\sigma = \sigma_0/(1 - \omega)$ . Последняя формула выражает эффект повышения уровня напряжений в поврежденном материале, поскольку  $0 \leq \omega \leq 1$ . Вводя выражение  $\sigma = \sigma_0/(1 - \omega)$  в уравнение (1.1), можно получить дифференциальное уравнение относительно функции  $\omega(t)$ , где  $\sigma_0$  – заданная функция времени. В начальный момент времени  $t = 0$  функция  $\omega$  равна нулю  $\omega = 0$ , в момент разрушения  $t = T$   $\omega = 1$ . Уравнение может быть легко проинтегрировано в том случае, когда скорость роста трещины представляет собой степенную функцию от напряжения  $v = A\sigma^\alpha$ . В этом случае переменные разделяются и можно вывести уравнение  $(1 - \omega)^\alpha \omega^{-\beta} d\omega = A\sigma_0^\alpha dt$ . Интегрируя полученное уравнение, можно найти  $A \int_0^T \sigma_0^\alpha dt = \Gamma(1 + \alpha)\Gamma(1 - \beta)/(\Gamma(2 + \alpha - \beta))$ , откуда следует, что  $\int_0^T \sigma^\alpha dt = C = const$ , и при постоянном напряжении справедливо

$$T = C/\sigma_0^\alpha. \quad (1.2)$$

В [1] отмечается, что кривые длительной прочности при постоянном напряжении удовлетворительно описываются соотношением (1.2). Постоянные  $C$  и  $\alpha$  определяются экспериментально путем обработки кривых длительной прочности. После определения  $C$  и  $\alpha$  находят длительную прочность  $\sigma_0$  при переменном напряжении.

С тех пор в простейшем варианте поврежденность описывают некоторым скаляром, структурным параметром  $1 \geq \psi \geq 0$  (Л.М. Качанов [3]) или параметром поврежденности Ю.Н. Работнова  $0 \leq \omega \leq 1$ . В начальном состоянии при отсутствии поврежденности  $\psi = 1$ , а поврежденность  $\omega = 0$ ; с течением времени функция  $\psi$  убывает, поврежденность растет. Таким образом, Ю.Н. Работнов [1; 2] ввел функцию  $\omega \geq 0$ , равную нулю в начальном состоянии и единице в момент разрушения, которую можно принять за меру охрупчивания. Функцию  $\omega$  естественно назвать поврежденностью. В русскоязычной литературе параметр поврежденности, как правило, обозначается буквой  $\omega$ , а в англоязычной –  $D$  (в отличие от сплошности  $\psi$ ); можно считать, что  $\psi = 1 - \omega$ . Величина  $\omega$  может быть интерпретирована как относительная площадь поперечного сечения, занятая трещинами, микропорами, микродефектами. Предполагается, что скорость изменения параметра  $\dot{\omega}$  зависит от напряжения и от  $\omega$ . Такое предположение позволяет считать  $\omega$  за один из структурных параметров. Простейшая гипотеза состоит в том, что  $\dot{\omega}$  есть степенная функция отношения  $\sigma/(1 - \omega)$ , это отношение может быть истолковано как среднее напряжение на площади поперечного сечения, свободной от трещин [2; 4]. Делая вывод, можно заключить, что согласно классической теории Качанова – Работнова текущее состояние внутренней поврежденности образца может быть представлено с помощью единственного скалярного параметра (параметра поврежденности)  $\omega$ , который представляет собой монотонно возрастающую функцию времени  $0 \leq \omega \leq 1$ . Параметр поврежденности интерпретируется как относительное сокращение вследствие распределенных внутри образца микродефектов эффективной, несущей нагрузку площади поперечного сечения. Дегградация материала объясняется как постепенное уменьшение эффективной площади, которая реально несет растягивающую нагрузку и определяет сопротивляемость образца

растяжению. В силу такой интерпретации несущая нагрузку площадь оказывается равной не  $S_0$ , а некоторому меньшему значению  $S$ , и для параметра  $\omega$  имеет место следующее простое соотношение:  $\omega = (S_0 - S)/S_0$ . Определенный таким образом параметр поврежденности представляет собой чисто геометрическую характеристику текущего состояния поврежденности, и его изменение определяется свойствами материала и историей внешнего нагружения.

## 2. Современное состояние

В настоящее время разрушение (макроскопическое нарушение сплошности тела в результате воздействия на него внешнего окружения) рассматривается с учетом процессов скрытого разрушения [5–9]. Исследование скрытого разрушения (зарождение и развитие микродефектов, рассеянных по объему тела) осуществляется с помощью методов и теорий механики поврежденности – динамично развивающегося раздела современной механики деформируемого твердого тела [10–48]. Только в самое последнее время вопросам компьютерного моделирования роста трещин и длительного разрушения с использованием различных мер поврежденности посвящается большое количество работ [10–19]. Континуальная механика поврежденности исходит из того, что изменение со временем механических свойств материалов феноменологически можно интерпретировать как результат накопления повреждений, различных дефектов, микропор, трещин. Когда повреждения достигают опасного уровня, происходит разрушение. Трещинообразование начинается на самых ранних этапах деформации и связано с ростом имеющихся и возникновением новых суб- и микродефектов. В материале всегда имеется большое число различных дефектов, приводящих к высоким местным напряжениям. Уменьшение прочности (свойства тела сопротивляться воздействиям со стороны внешнего окружения) деформируемых твердых тел часто может быть объяснено скрытым разрушением и микродефектной структурой тела. Таким образом, поскольку повреждения тела существенно влияют на характер его разрушения, то становится очевидным, что и механика разрушения, и механика поврежденности призваны решить главную прикладную задачу об оценке запаса прочности твердого тела [20].

После появления работ Ю.Н. Работнова и Л.М. Качанова началось активное моделирование процессов разрушения с применением параметра поврежденности. В конце 70-х годов прошлого века моделирование роста трещины основывалось на предположении, что рост трещины происходит в том случае, если некоторая мера поврежденности достигает своего критического значения на некотором расстоянии от вершины трещины. В [21] при моделировании роста трещин использовался скалярный параметр поврежденности Качанова – Работнова. В [22] параметр поврежденности связывался с величиной пористости материала и предполагалось, что процесс накопления повреждений обусловлен совместным действием диффузионного и вязкого механизмов роста пор в условиях высокотемпературной ползучести. В [23] в качестве меры поврежденности материала принималась величина интенсивности накопленных деформаций ползучести. Модель, описывающая рост трещины в условиях ползучести, в более общей постановке была предложена в [24]. В рамках этой модели предполагалось, что величина критической поврежденности материала не является постоянной, зависит от уровня напряжений и убывает при возрастании интенсивности напряжений. В 70–90 гг. прошлого столетия появилось огромное количество исследований, использующих идеи континуальной механики поврежденности и базирующиеся на параметре поврежденно-

сти (сплошности) Качанова — Работнова [25–29]. Например, В.И. Астафьевым и Л.К. Ширяевой [30] предложена математическая модель накопления поврежденности в металлах в условиях коррозионного растрескивания под напряжением. В настоящее время проблемы учета процессов накопления повреждений продолжают интересовать представителей различных научных школ как в нашей стране, так и за рубежом. По всей видимости, можно выделить три основных направления, в соответствии с которыми развивалась континуальная механика поврежденности.

1. Анализ взаимного влияния процессов накопления повреждений и эволюции напряженно-деформированного состояния в проблемах нелинейной механики разрушения и изменение характера сингулярности поля напряжений у вершины трещины, вызванное накоплением рассеянных повреждений [14; 20; 24; 31–35; 38–40].

2. Компьютерное имитационное моделирование поврежденности и инкорпорирование различных мер поврежденности в вычислительные САЕ-комплексы, такие как Simulia Abaqus [10; 18; 43–50].

3. Введение тензорных мер поврежденности, отражающих анизотропный характер накоплений повреждений в твердом теле [25; 51; 52]. В настоящее время предложены многочисленные подходы к моделированию анизотропной поврежденности. Достаточно полный библиографический список работ, посвященных тензорным мерам поврежденности и опубликованных к 1996 г., приведен в [25]. Ссылки на более поздние работы и представление анизотропной поврежденности с помощью тензора поврежденности 2-го ранга приведены в [20]. В целом литература по тензорным мерам поврежденности столь многообразна и обширна, что заслуживает отдельного обсуждения. Остановимся на первых двух из указанных направлений более подробно.

## 2.1. Связанные задачи нелинейной механики разрушения

Можно выделить характерные особенности, свойственные двумерным задачам о стационарной и растущей полубесконечных трещинах в бесконечном теле в связанной постановке (упругость — поврежденность, пластичность — поврежденность, ползучесть — поврежденность). В [32–35] показано, что влияние накопления повреждений проявляется либо в полном устранении особенности напряжений в окрестности вершины трещины, либо в значительном ослаблении сингулярности поля напряжений (показатель степени  $\alpha$  в  $r^{-\alpha}$  уменьшается). В [34] установлено, что эффективные напряжения  $\sigma_{ij}/\psi$ , где  $\psi$  — параметр сплошности Качанова–Работнова, ограничены при приближении к вершине трещины, а параметр сплошности и сами компоненты тензора напряжений линейным образом спадают до нуля при  $r \rightarrow 0$ , где  $r$  — расстояние от кончика трещины. В [32] представлен асимптотический анализ полей напряжений и деформаций в окрестности растущей усталостной трещины в связанной постановке для линейно-упругих определяющих соотношений. Численное исследование полученной системы уравнений для различных значений констант  $m$  и  $n$ , входящих в кинетическое уравнение, задающее степенной закон накопления повреждений:

$$\frac{d\psi}{dN} = \begin{cases} -c(\sigma_e/\psi)^m \psi^{m-n} & (\sigma_e \geq \sigma_{th}\psi), \\ 0 & (\sigma_e < \sigma_{th}\psi), \end{cases} \quad (2.1)$$

где  $N$  — число циклов нагружения,  $c, \sigma_{th}, m, n$  — постоянные, определяемые экспериментальным путем, показало, что связанность постановки задачи приводит к слабой сингулярности (по сравнению с классической асимптотикой линейной механики разрушения) поля напряжений для малых значений  $m$  и  $n$ , тогда как при

возрастании значений данных параметров особенность вообще исчезает. В [14; 15] результаты проведенного в [32] численного анализа были уточнены и найдено аналитическое решение задачи об усталостном росте трещины в среде с поврежденностью, в котором установлено, что и для малых значений  $m$  и  $n$  особенность поля напряжений устраняется. Аккуратное численное решение сформулированной системы сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений и анализ угловых распределений компонент тензора напряжений позволяют найти аналитическое представление угловых распределений функции напряжений и сплошности вблизи вершины:

$$f(\theta) = \frac{\varkappa (\cos \theta)^{\mu+2}}{(\lambda+2)(\lambda+1)}, \quad g(\theta) = \varkappa^{m/(n+1)} (\cos \theta)^\mu, \quad \lambda = \mu = \frac{1}{1+n-m}. \quad (2.2)$$

На рис. 1 представлены область активного накопления повреждений и экспериментальные данные по усталому распространению трещины.

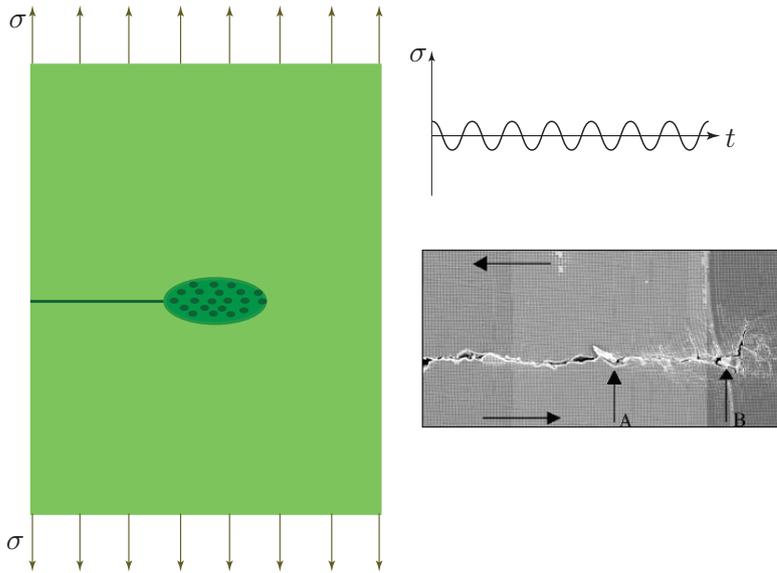


Рис. 1. Область активного накопления повреждений и экспериментальные данные по усталому распространению трещины [41]

Итоговое распределение напряжений и сплошности в зоне активного накопления повреждений ( $0 \leq \theta \leq \pi/2$ ) у вершины усталостной трещины имеет вид (рис. 2, 3)

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta}(r, \theta) &= \varkappa r^\lambda (\cos \theta)^{2+\mu}, \quad \sigma_{r\theta}(r, \theta) = \varkappa r^\lambda \sin \theta (\cos \theta)^{\mu+1}, \\ \sigma_{rr}(r, \theta) &= \varkappa r^\lambda \sin^2 \theta \cos^\mu \theta, \quad \psi(r, \theta) = \varkappa^{m/(n+1)} r^\lambda \cos^\mu \theta. \end{aligned} \quad (2.3)$$

В [36; 37], где представлено асимптотическое исследование стационарной трещины нормального отрыва в упругом нелинейно-вязком материале со степенной зависимостью между напряжениями и скоростями деформаций ползучести, также учет влияния поврежденности приводит к устранению особенности поля напряжений в окрестности вершины трещины.

Следующей характерной чертой, присущей этому типу задач, является наличие области полностью разрушенного материала, в которой все компоненты тензора напряжений и сплошность обращаются в нуль [14; 31–35; 40] (см. рис. 1).

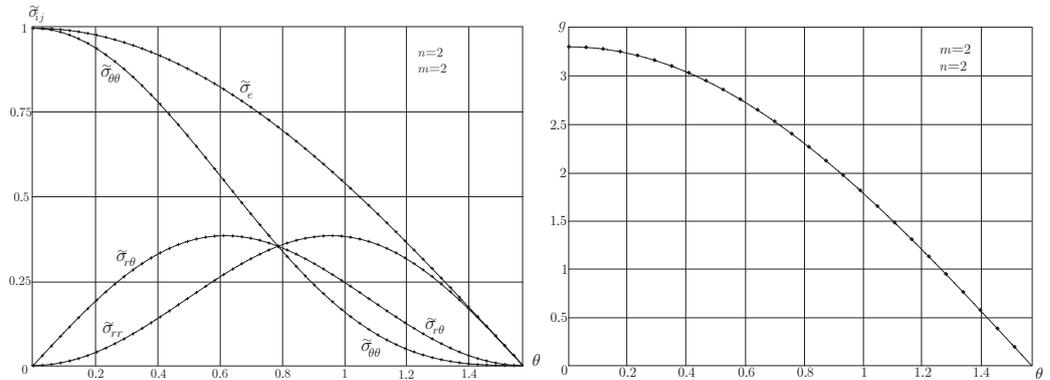


Рис. 2. Угловые распределения компонент тензора напряжений и параметра сплошности в окрестности вершины трещины ( $m = 2, n = 2$ ). Сплошной линией показано аналитическое решение, знаком "плюс" показаны точки, найденные в результате численного счета

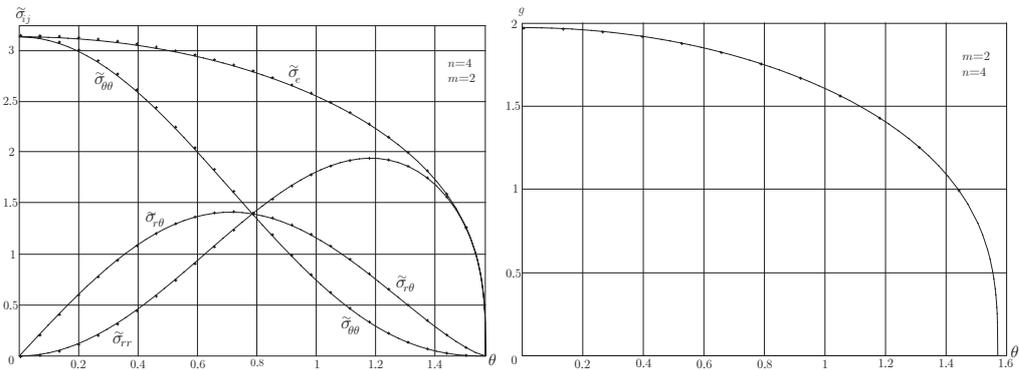


Рис. 3. Угловые распределения компонент тензора напряжений и параметра сплошности в окрестности вершины трещины ( $m = 2, n = 4$ ). Сплошной линией показано аналитическое решение, знаком "плюс" показаны точки, найденные в результате численного счета

В данных работах при численном определении коэффициентов асимптотических разложений компонент тензора напряжений и сплошности (угловых распределений компонент тензора напряжений и параметра сплошности) оказалось, что, начиная с некоторого значения полярного угла  $\theta_d$  (значение  $\theta = \pi$  соответствует верхнему берегу трещины,  $\theta = 0$  — ее продолжению), функция, определяющая главный член асимптотического разложения параметра сплошности, начинает принимать отрицательные значения, что противоречит физическому смыслу этой величины. Данное обстоятельство привело к модифицированной постановке задачи, согласно которой решение разыскивалось для  $0 \leq \theta \leq \theta_d$ . Оставшаяся область  $\theta_d \leq \theta \leq \pi$ , локализованная в окрестности вершины распространяющейся трещины, есть полностью разрушенная зона, в которой все компоненты тензора напряжений и сплошность равны нулю, на границе же введенных областей должны выполняться условия непрерывности функции сплошности и компонент тензора напряжений. В [32] авторы апеллируют к невозможности выполнения граничных

условий на берегах трещины и переходят к модифицированной постановке задачи, вводя область полностью разрушенного материала, примыкающую к берегам трещины. В [38; 39] исследованы асимптотики напряжений и параметра сплошности у вершины растущей трещины нормального отрыва. Авторы статьи, основываясь на экспериментальных данных, предполагают, что граница области, в которой происходит процесс накопления повреждений, есть полуэллипс и прямые, параллельные берегам трещины. Задавая этой гипотезой форму области процесса, можно определить асимптотические разложения компонент тензора напряжений и сплошности. Заметим, что авторы не определяют геометрию области процесса, а задают ее априори. Поэтому задача нахождения конфигурации областей полностью поврежденного материала либо области активного накопления повреждений у вершины трещины не является еще полностью исследованной.

Одним из перспективных подходов изучения взаимного влияния эволюции поврежденности и напряженно-деформированного состояния представляется использование свойства автомодельности процесса накопления повреждений в окрестности вершины трещины в материале со степенными определяющими соотношениями в среде, в которой кинетика накопления повреждений описывается уравнением Качанова — Работнова (или модификацией этого кинетического уравнения, предложенной Хэйхарстом и Леки [53]). Следует отметить, что в настоящее время возникает необходимость не только понять явление накопления повреждений в каждом из диапазонов масштабов, но и рассмотреть взаимодействие явлений на разных масштабных уровнях: от микро- до макроуровня. Приведенные ранее исследования процессов накопления повреждений как в нашей стране (В.Н. Кукуджанов [10], И.А. Волков, Ю.Г. Коротких [17]), так и за рубежом (S. Murakami [38; 39], H. Riedel [22; 53], H.D. Bui, J. Lemaitre [27], G.Z. Voyiadjis [51], J.L. Chaboche [28]) ясно показывают, что часто влияние параметров, описывающих явление в малых масштабах, распространяется по всему диапазону масштабов рассматриваемой проблемы. Неполная автомодельность является с математической точки зрения главным средством, ключом, основной парадигмой в понимании многомасштабных явлений и возникающем сейчас искусстве решения таких задач на компьютере. Неполная автомодельность характерна для задачи о стационарной трещине в среде с поврежденностью, когда определяющие уравнения материала строятся на основе степенного закона ползучести с применением концепции эффективного напряжения:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = (3/2)B(\sigma_e/\psi)^{n-1}s_{ij}/\psi, \quad (2.4)$$

где  $\psi$  — параметр сплошности, эволюционирующий в соответствии со степенным законом накопления повреждений

$$\dot{\psi} = -A(\sigma_e/\psi)^m. \quad (2.5)$$

Процесс активного накопления рассеянных повреждений происходит в непосредственной окрестности вершины трещины, где образуется область диспергированного материала, а на удалении от нее параметр сплошности стремится к единице, что соответствует неповрежденному материалу и позволяет сформулировать асимптотическое граничное условие в бесконечно удаленной точке как условие асимптотического сближения с решением Хатчинсона–Райса–Розенгрена (ХРР) — решением для степенного определяющего закона (2.4), где  $\psi \equiv 1$  (таким образом, рассматривается непосредственная окрестность вершины трещины). На основе гипотезы о маломасштабной поврежденности на больших расстояниях от вершины трещины (больших по сравнению с характерным линейным размером области пол-

ностью поврежденного материала, но все еще малых по сравнению с длиной трещины, характерным линейным размером образца) поле напряжений определяется решением ХРР:

$$\sigma_{ij}(r \rightarrow \infty, \theta, t) = (C^*/(BI_n r))^{1/(n+1)} \bar{\sigma}_{ij}(\theta, n), \quad (2.6)$$

где  $C^*$  – инвариантный интеграл теории установившейся ползучести. Анализ размерности величин, входящих в уравнения (2.4)–(2.6), позволяет установить, что для определяющих соотношений (2.4), кинетического уравнения (2.5), граничных условий (2.6) существует автомодельная переменная  $R = r(At)^{-(n+1)/m} BI_n/C^*$ , и система уравнений задачи допускает автомодельное представление решения:

$$\sigma_{ij}(r, \theta, t) = (At)^{-1/m} \hat{\sigma}_{ij}(R, \theta), \quad \psi(r, \theta, t) = \hat{\psi}(R, \theta).$$

Следует отметить, что граничное условие в бесконечно удаленной точке может быть сформулировано в более общей по сравнению с (2.6) форме

$$\sigma_{ij}(r \rightarrow \infty, \theta, t) \rightarrow \tilde{C} r^s \bar{\sigma}_{ij}(\theta, n), \quad (2.7)$$

где показатель степени  $s$  подлежит определению в ходе решения задачи,  $\tilde{C}$  – амплитуда поля напряжений на бесконечности, определяемая геометрией реального образца и системой приложенных нагрузок. Для степенных определяющих соотношений (2.4), кинетического уравнения (2.5) и более общих граничных условий (2.7) существует автомодельная переменная  $R = r(At\tilde{C}^m)^{1/(sm)}$  (автомодельные решения, основанные на введении автомодельных переменных, степени которых должны быть определены в ходе решения задачи, относят к автомодельным решениям второго рода и отвечают неполной автомодельности по переменной  $R$ ) [40; 42].

Асимптотическое решение задачи вне области диспергированного материала, формирующейся у вершины трещины (на больших расстояниях от вершины трещины  $R \rightarrow \infty$ ), разыскивается в форме

$$\chi(R, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} R^{\lambda_k+1} f_k(\theta), \quad \psi(R, \theta) = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} R^{\gamma_k} g_k(\theta), \quad (2.8)$$

где  $\lambda_k - 1 < 0$ ,  $\gamma_k < 0$ ,  $f_k(\theta)$ ,  $g_k(\theta)$  подлежат определению в ходе решения задачи. Асимптотическое решение задачи, базирующееся на представлении (2.8), приведено в [31]. Конфигурации области полностью поврежденного материала вблизи кончика трещин нормального отрыва и поперечного сдвига показаны на рис. 4. После возвращения к исходным переменным поле напряжений вне области полностью поврежденного материала определяется с помощью равенства

$$\sigma_{ij}(r, \theta, t) = (Atm)^{-1/m} \tilde{C} \left[ R^{\lambda-1} \tilde{\sigma}_{ij}^{(0)}(\theta) + R^{\lambda_1-1} \tilde{\sigma}_{ij}^{(1)}(\theta) + R^{\lambda_2-1} \tilde{\sigma}_{ij}^{(2)}(\theta) + \dots \right], \quad (2.9)$$

где  $R = r(At\tilde{C}^m)^{1/((\lambda-1)m)}$ . Отличительной особенностью полученного представления является зависимость поля напряжений только от одного амплитудного множителя  $\tilde{C}$ , отражающего влияние поля напряжений в окрестности вершины трещины от геометрии образца и системы приложенных нагрузок. Поэтому для нахождения поля напряжений вблизи кончика трещины достаточно определить всего один масштабный множитель (амплитудный коэффициент)  $\tilde{C}$ . В традиционной механике трещин используется подход, приводящий к задаче нахождения трех или более коэффициентов асимптотических разложений поля напряжений.

В последнее время в нелинейной механике разрушения, одной из задач которой является определение напряженно-деформированного состояния в непосредственной окрестности вершины трещины, большое внимание уделяется построению высших приближений в асимптотических разложениях механических величин (полей напряжений, деформаций и перемещений) в окрестности вершины трещины в нелинейных материалах.

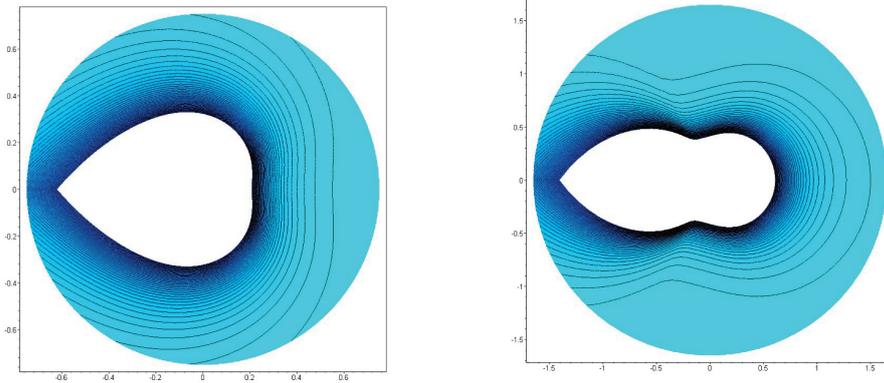


Рис. 4. Геометрия области полностью поврежденного материала у вершины трещин нормального отрыва и поперечного сдвига

Для материалов, следующих степенному закону установившейся ползучести  $\dot{\epsilon}_{ij} = 3B\sigma_e^{n-1}s_{ij}/2$ , асимптотические разложения компонент тензора напряжений могут быть представлены в форме

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = (C^*/(BI_n r))^{1/(n+1)} \sigma_{ij}^{(1)}(\theta) + A_2 r^{s_2-1} \sigma_{ij}^{(2)}(\theta) + A_3 r^{s_3-1} \sigma_{ij}^{(3)}(\theta) + \dots \quad (2.10)$$

Первое слагаемое в (2.10) в литературе носит название решения ХРР. В (2.10) фигурирует  $C^*$ -интеграл, определяемый равенством

$$C^* = \int_{\Gamma} (\dot{W} dx_2 - \sigma_{ij} n_j u_{i,1} ds), \quad (2.11)$$

где  $\dot{W} = \int_0^{\dot{\epsilon}_{kl}} \sigma_{ij} d\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{n}{n+1} \sigma_e \dot{\epsilon}_e$ . Асимптотический анализ асимптотического выражения интенсивности напряжений позволяет установить, что показатели степеней в (2.10) связаны между собой  $s_3 - s_1 = 2(s_2 - s_1)$ . Детальный асимптотический анализ трехчленного асимптотического разложения компонент тензора напряжений (2.10) и интенсивности касательных напряжений показывает, что константы  $A_2$  и  $A_3$  не являются независимыми, они связаны равенством  $A_3/A_1 = (A_2/A_1)^2$ . В литературе имеется достаточно большое число оценок инвариантного  $C^*$ -интеграла, полученных для различных образцов, наиболее часто используемых в эксперименте. Однако остаются открытыми многие вопросы, связанные с определением второго коэффициента в асимптотических разложениях, а именно  $A_2$ . Естественно предположить, что  $A_2$  в общем случае является функцией приложенных нагрузок, геометрических характеристик образца и показателя нелинейности материала  $n$ . Определение этого коэффициента и составляет одну из важных задач нелинейной механики разрушения, поскольку даже известные оценки, приведенные в справочной литературе дают существенную погрешность. Например, для образца с односторонним боковым надрезом для инвариантного  $C^*$ -интеграла имеется

оценка  $C^* = B\sigma_0\epsilon_0W(1-a)ah_1(P/P_0)$ , где  $P_0 = 1.4555\eta W(1-a)\sigma_0$ ,  $h_1$  – безразмерная функция приложенной нагрузки и геометрии образца. Оказывается, что уточненные вычисления, проведенные в последнее время, показали, что значения функции  $h_1$  могут отличаться от приведенных в справочниках более чем на сто процентов. Следовательно, с появлением вычислительных комплексов, таких как Abaqus, предоставляется возможность получения более точных оценок для параметров механики разрушения, что и составляет одну из задач современной механики деформируемого твердого тела. Амплитудные коэффициенты, входящие в структуру полей напряженно-деформированного состояния в области вершины трещины, как известно, являются характеристиками сопротивления материала разрушению. Эти коэффициенты могут описывать текущее состояние или принимать предельные значения в зависимости от уровня накопленных повреждений в исследуемом объекте. Для нахождения оставшейся постоянной  $A_2$  применяются различные подходы, включающие конечно-элементный расчет для образцов различной конфигурации, находящихся в условиях разных систем усилий. Тем не менее в общем случае исследование данной проблемы не является математически завершенным и требует объединения полученных разными исследователями результатов в единый справочник, подобный существующим справочникам, содержащим оценки коэффициентов интенсивности напряжений и  $J$ -интегралу.

Альтернативой описанному выше подходу является учет процессов накопления повреждений в окрестности вершины трещины, что приводит к асимптотическому представлению механических полей вблизи кончика трещины (2.9), содержащему лишь один амплитудный множитель, что значительно упрощает решение задачи [42]. Один амплитудный фактор  $C$  может быть определен с помощью инкорпорирования скалярного параметра сплошности (поврежденности) в расчетные комплексы, осуществляющие конечно-элементный анализ.

## 2.2. Инкорпорирование мер поврежденности в САЕ-системы

В последнее время большое внимание уделяется компьютерному моделированию процессов деформирования поврежденности и континуального разрушения нелинейных материалов и конструкций [10; 18; 19] с привлечением скалярной или тензорной мер поврежденности. При построении математических моделей нелинейного деформирования и поврежденности материалов и прогнозировании на их основе прочности и долговечности элементов конструкций обращаются к конечно-элементным решениям задач определения напряженно-деформированного состояния элементов конструкций с учетом процессов накопления повреждений. Основной подход базируется на встраивании в многоцелевую программу инженерного анализа Simulia Abaqus процедуры, позволяющей учитывать влияние накопления повреждений на напряженно-деформированное состояние в модельном образце или реальном элементе конструкции. Часто используется скалярный параметр поврежденности, а также симметричный тензор поврежденности Вакуленко – Качанова 2-го ранга и их инкорпорирование в определяющие соотношения теории упругости и теории установившейся ползучести для описания взаимного влияния процессов накопления повреждений и эволюции напряженно-деформированного состояния в образце. С внедрением программного комплекса Abaqus в инженерную практику имеется возможность встроить в конечно-элементное решение, получаемое в комплексе ABACUS, кинетическое уравнение накопления повреждений и определяющие соотношения, содержащие параметр поврежденности в численный анализ с помощью процедуры UMAT (вводя в рассмотрение материал, свой-

ства которого задаются пользователем) [44; 45]. В [44] представлено исследование влияния переменной нагрузки на эволюцию поврежденности в пластине. Текущее состояние поврежденности в материале образца характеризуется симметричным тензором поврежденности второго ранга Вакуленко – Качанова. Физические свойства материала описываются с помощью тензора  $A_{ijkl}$  как функции компонент тензора поврежденности  $\mathbf{D}$  и материальных констант неповрежденного материала при текущей температуре – модуля Юнга  $E$  и коэффициента Пуассона  $\nu$

$$A_{ijkl} = -\frac{\nu}{E}\delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{1+\nu}{2E}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \frac{D_1}{4(1+D_1)E}(\delta_{jk}D_{il} + \delta_{il}D_{jk} + \delta_{jl}D_{ik}),$$

где  $D_{ij}$  – компоненты тензора поврежденности,  $D_1$  – главное значение тензора поврежденности. Энергетическая модель континуального разрушения хрупких сред была реализована в САЕ-системе Simulia Abaqus в работе [45]. Как отмечается в [45], теория континуального разрушения (теория поврежденности) дает феноменологическое описание эволюции рассеянных дефектов – микротрещин, число которых в любом элементарном объеме предполагается весьма большим, что позволяет описывать этот процесс с помощью осредненного параметра – поврежденности. Основное преимущество теории поврежденности перед теориями прочности заключается в учете предыстории нагружения, предшествующей макроскопическому разрушению. В конце девяностых годов двадцатого века в работах В.Е. Фортова и В.И. Кондаурова [54] была развита модель сплошной повреждающейся среды, которая ассоциирует параметр поврежденности с необратимыми потерями термомеханической энергии, связанными с образованием новых поверхностей при развитии микротрещин. В рассматриваемой модели принимается следующий вид кинетического уравнения:

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{1}{\tau\beta}\langle du(\mathbf{e}, \omega)/d\omega \rangle, \quad \langle x \rangle = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x, & x > 0, \end{cases} \quad (2.12)$$

где  $\omega$  – параметр поврежденности,  $\mathbf{e}$  – тензор малых деформаций,  $u(\mathbf{e}, \omega)$  – сумма упругого потенциала и поверхностной энергии микротрещин,  $\tau$  – время релаксации,  $\beta$  – положительная константа. Кинетическое уравнение (2.12) означает, что скорость накопления поврежденности определяется балансом работы, которую нужно затратить на образование новых поверхностей, и освобождающейся упругой энергии. Если упругой энергии выделяется больше, чем необходимо затратить на образование новых микротрещин, то  $\omega$  будет накапливаться. Рассмотренная модель континуального разрушения была реализована в Simulia/ Abaqus 6.9 с помощью пользовательских подпрограмм UMAT и VUMAT и протестирована на характерных примерах. В [45] была проведена серия расчетов квазистатической задачи накопления повреждений вблизи цилиндрической и сферической полостей. В [45] показаны зоны поврежденности при различных граничных условиях: на внутренней стенке задано давление, достаточное для развития поврежденности, на бесконечности заданы разные сочетания напряжений  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$ . Численное решение тестовых задач находится в хорошем согласии с теоретическими оценками, что открывает дальнейшие перспективы использования рассмотренной модели в практических приложениях [47]. Решению связанных задач континуального разрушения термо- и пороупругих сред в Simulia Abaqus посвящена работа О.Я. Извекова, А.М. Крупеника [46]. В [46; 47; 49] модель Качанова – Работнова была обобщена на случай насыщенной пористой среды с повреждаемым скелетом. Рассмотренная модель континуального разрушения была реализована в Simulia/ Abaqus 6.9 с учетом процессов переноса для одного флюида. Выявлены некото-

рые ограничения применения пользовательских подпрограмм для решения задач континуального разрушения с учетом неизотермической фильтрации [48].

В [50] демонстрируется, как вычислительная механика поврежденности может быть использована для прогнозирования поведения элементов конструкций (сосудов под высоким давлением), находящихся в реальных эксплуатационных условиях. В [50] на примере сварного соединения (цилиндр-цилиндр) в трехмерной постановке задачи рассмотрено применение критерия разрушения в рамках континуальной механики поврежденности.

### **3. Перспективы развития представлений о прочности и применение континуальной механики поврежденности**

Цикл работ Ю.Н. Работнова, открывшийся статьей [1], вместе с работами Л.М. Качанова положил начало целому направлению механики деформируемого твердого тела – континуальной механике поврежденности. Континуальная механика поврежденности дает феноменологическое описание эволюции рассеянных дефектов – микротрещин, число которых в любом элементарном объеме предполагается весьма большим, что позволяет описывать этот процесс с помощью осредненного параметра – поврежденности. Этот подход в последнее десятилетие был разработан в духе рациональной механики сплошных сред и приобрел строгую форму, в которой поврежденность выступает в качестве дополнительного термодинамического параметра.

Основываясь на приведенном обзоре научной литературы, который, безусловно, не может быть исчерпывающим ввиду огромного количества направлений, использующих представления механики поврежденности, можно заключить, что теоретическое развитие идей и представлений континуальной механики поврежденности будет идти по пути создания математических моделей накопления повреждений на макро, мезо- и микроуровнях: процесс накопления повреждений является многомасштабным и многоуровневым. В этом направлении неполная автомательность является с математической точки зрения многообещающим средством в понимании многомасштабных явлений и возникающем сейчас искусстве решения таких задач на компьютере. Например, в [31] на основе автомательного представления решения задачи накопления повреждений в твердом теле и введения автомательной промежуточной асимптотики получен закон скейлинга накопления повреждений.

По всей видимости, развитие практических приложений механики поврежденности будет идти по пути разработки комплекса вычислительных программ, позволяющих оценить напряженно-деформированное состояние в элементах конструкции; определить конфигурацию зон локализаций необратимых деформаций и зон активного накопления повреждений, что даст возможность оптимизировать массогабаритные характеристики элементов конструкций и по пути реализации имитационного (компьютерного) моделирования на основе экспериментальных и теоретических исследований для модельных и используемых в теплоэнергетике, авиации и автомобилестроении элементов конструкций, что позволит выработать и сформулировать критерии разрушения, учитывающие изменение свойств материала в процессе работы элемента конструкции, дать современные варианты ремонтных технологий.

## Литература

- [1] Работнов Ю.Н. О механизме длительного разрушения // Вопросы прочности материалов и конструкций. М.: Изд-во АН СССР, 1959. С. 5–7.
- [2] Работнов Ю.Н. Избранные труды. Проблемы механики деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1991. 196 с.
- [3] Качанов Л.М. О времени разрушения в условиях ползучести // Изв. АН СССР. ОТН. 1958. С. 26–31.
- [4] Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966.
- [5] Kuna M. Finite Elements in Fracture Mechanics. Theory-Numerics-Applications. Dordrecht: Springer, 2013. 464 p.
- [6] Murakami S. Continuum Damage Mechanics. A Continuum Mechanics Approach to the Analysis of Damage and Fracture. Dordrecht: Springer, 2012. 423 p.
- [7] Voyiadis G.Z., Woelke P. Elasto-Plastic and Damage Analysis of Plates and Shells. Berlin: Springer, 2008. 213 p.
- [8] Voyiadis G.Z., Kattan P.I. Damage Mechanics with Finite Elements: Practical Applications with Computer Tools. Springer, 2012. 113 p.
- [9] Zhang W., Cai Y. Continuum Damage Mechanics and Numerical Applications. Berlin: Springer, 2010. 936 p.
- [10] Кукуджанов В.Н. Компьютерное моделирование деформирования, повреждаемости и разрушения неупругих материалов и конструкций. М.: МФТИ, 2008.
- [11] Simulation of creep crack growth in 316 stainless steel using a novel creep-damage model / J.-F. Wen [et al.] // Engng. Fracture Mechanics. 2013. V. 98. P. 169–184.
- [12] Kim E.-H., Rim M.-S., Hwang T.-K. Composite damage model based on continuum damage mechanics and low velocity impact analysis of composite plates // Composite Structures. 2013. V. 95. P. 123–134.
- [13] Numerical investigation of factors affecting creep damage accumulation in ASME P92 steel welded joint / L. Zhao [et al.] // Material and Design. 2012. V. 34. P. 566–575.
- [14] Степанова Л.В. Уточненный расчет напряженно-деформированного состояния у вершины трещины в условиях циклического нагружения в среде с поврежденностью // Вестник Самарского государственного университета. 2011. № 83. С. 105–115.
- [15] Адылина Е.М., Игонин С.А., Степанова Л.В. О нелинейной задаче на собственные значения, следующей из анализа напряжений у вершины усталостной трещины // Вестник Самарского государственного университета. 2012. № 3.1(94). С. 83–102.
- [16] Riedel H. Creep Crack Initiation and Growth // Encyclopedia of Materials: Science and Technology. 2008. P. 1767–1773.
- [17] Волков И.А., Коротких Ю.Г. Уравнения состояния вязкоупругопластических сред с повреждениями. М.: Физматлит, 2008. 424 с.
- [18] Королев И.К., Петин С.В., Фрейдин А.Б. Численное моделирование накопления повреждений и развития усталостной трещины в упругих материалах // Вычислительная механика сплошных сред. 2009. Т. 2. № 3. С. 34–43.
- [19] Wriggers P. Nonlinear Finite Element Methods. Berlin: Springer, 2008. 566 p.
- [20] Астафьев В.И., Радаев Ю.Н., Степанова Л.В. Нелинейная механика разрушения. Самара: Изд-во "Самарский университет", 2001. 632 с.
- [21] Астафьев В.И. О росте трещины при ползучести с учетом пластической зоны вблизи вершины трещины // Прикладная механика и техническая физика. 1979. № 6. С. 154–158.

- [22] Riedel H. The extension of a macroscopic crack at elevated temperature by the growth and coalescence of microvoids // *Creep in Structures*. Berlin: Springer, 1981. P. 504–519.
- [23] Cocks A.C.F., Ashby M.F. The growth of dominant crack in a creeping material // *Scr. Metall.* 1982. V. 16. P. 109–114.
- [24] Астафьев В.И. Закономерности подрастания трещин в условиях ползучести // *Изв. АН СССР. МТТ.* 1986. № 1. С. 127–134.
- [25] Krajcinovic D. *Damage Mechanics*. Amsterdam: Elsevier Science, 1996.
- [26] Lemaitre J.A. *Course on Damage Mechanics*. Berlin: Springer-Verlag, 1992.
- [27] Lemaitre J.A., Desmorat R. *Engineering Damage Mechanics: Ductile, Creep, Fatigue and Brittle Failures*. Berlin: Springer-Verlag, 2005.
- [28] Chaboche J.L. Phenomenological aspects of Continuum Damage Mechanics // *Theoretical and Applied Mechanics*. P. German, M. Piau, D. Caillerie (Editors). IUTAM. 1989. P. 41–56.
- [29] Kachanov L.M. *Introduction to Continuum Damage Mechanics*. Dordrecht; Boston: Martinus Nijhoff, 1986.
- [30] Астафьев В.И., Ширяева Л.К. Накопление поврежденности и коррозионное растрескивание металлов под напряжением. Самара: Изд-во "Самарский университет", 1998. 123 с.
- [31] Степанова Л.В. Математические методы механики разрушения М.: Физматлит, 2009. 336 с.
- [32] Zhao J., Zhao X. The asymptotic study of fatigue crack growth based on damage mechanics // *Engn. Fracture Mechanics*. 1995. V. 50. № 1. P. 131–141.
- [33] Zhao J., Zhang X. On the process zone of a quasi-static growing tensile crack with power-law elastic-plastic damage // *Intern. J. of Fracture*. 2001. V. 108. P. 383–395.
- [34] Астафьев В.И., Григорова Т.В., Пастухов В.А. Влияние поврежденности материала на напряженно-деформированное состояние в окрестности вершины трещины при ползучести // *Физико-химическая механика материалов*. 1992. Т. 28. № 1. С. 5–11.
- [35] Астафьев В.И., Григорова Т.В. Распределение напряжений и поврежденности у вершины растущей в процессе ползучести трещины // *Известия Российской академии наук. Сер.: Механика твердого тела*. 1995. № 3. С. 160–166.
- [36] Lee S.B., Lu M., Kim J.Y. An asymptotic analysis of a tensile crack in creeping solids coupled with cumulative damage — Part I. Small damage region around the crack tip // *Int. J. Solids Structures*. 1997. V. 34. № 24. P. 3163–3178.
- [37] Lee S.B., Lu M., Kim J.Y. An asymptotic analysis of a tensile crack in creeping solids coupled with cumulative damage — Part II. Small damage region around the crack tip // *Int. J. Solids Structures*. 1997. V. 34. № 10. P. 1183–1197.
- [38] Murakami S., Hirano T., Liu Y. Asymptotic fields of stress and damage of a mode I creep crack in steady-state growth // *Int. J. Solids Structures*. 2000. № 37. P. 6203–6220.
- [39] Murakami S., Liu Y., Mizuno M. Computational methods for creep fracture analysis by damage mechanics // *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 2000. V. 183. P. 15–33.
- [40] Степанова Л.В., Федина М.Е. О геометрии области полностью поврежденного материала у вершины трещины антиплоского сдвига в связанной постановке задачи (связка "ползучесть - поврежденность") // *Вестник Самарского государственного университета*. 2001. № 2. С. 87.
- [41] Pinna Ch., Doquet V. The preferred fatigue crack propagation mode in a M250 maraging steel loaded in shear // *Fatigue Fract. Eng. Mater. Structure*. 1999. V. 23. P. 173–183.

- [42] Степанова Л.В. О собственных значениях в задаче о трещине антиплоского сдвига в материале со степенными определяющими уравнениями // Прикладная механика и техническая физика. 2008. Т. 49. № 1. С. 173–180.
- [43] Кукуджанов В.Н. Связанные модели упругопластичности и поврежденности и их интегрирование // Изв. РАН. МТТ. 2006. № 6. С. 103–135.
- [44] Mika P. Influence of variable load on damage evolution in the plate structures // 15th International conference on computer methods in mechanics CMM-2003. Short papers. Gliwice, 2003. P. 253–254.
- [45] Извеков О.Я., Селицкий А.А., Крупеник А.М. Реализация энергетической модели континуального разрушения хрупких сред в SIMULIA/ABAQUS 6.9. URL: <http://www.thesis.com/software/abaqus/abaqus-exp.php>.
- [46] Извеков О.Я., Крупеник А.М. Решение связанных задач континуального разрушения термо- и пороупругих сред в SIMULIA ABAQUS. URL: <http://www.thesis.com/software/abaqus/abaqus-exp.php>.
- [47] Извеков О.Я., Кондауров В.И. Модель пористой среды с упругим трещиноватым скелетом // Известия РАН. Сер.: Физика Земли. 2009. № 4. С. 31–42.
- [48] Кондауров В.И. Механика и термодинамика насыщенной пористой среды. М.: МФТИ, 2007.
- [49] Извеков О.Я., Кондауров В.И. О рассеянном разрушении пористых материалов с хрупким скелетом // Изв. РАН. МТТ. 2010. № 3. С. 164–187.
- [50] Hayhurst D.R. CDM mechanisms-based modelling of tertiary creep: ability to predict the life of engineering components // Arch. Mech. 2005. V. 57. P. 103–132.
- [51] Voyiadjis G.Z., Kattan P.I. Advances in Damage Mechanics: Metals and Metal Matrix Composites. Oxford: Elsevier, 2006.
- [52] Litewka A., Lis Z. Creep damage and creep rupture of metals // In Applied Stress Analysis / Т.Н. Hyde [et al.] (eds.) Elsevire, 1990. P. 201–210.
- [53] Riedel H. Fracture at high temperature. Berlin: Springer, 1987.
- [54] Кондауров В.И., Фортов В.Е. Основы термомеханики конденсированных сред. М.: МФТИ, 2002. 336 с.

## References

- [1] Rabotnov Y.N. On a mechanism of delayed failure // Questions of strength of materials and structures. М.: Akademia Nauk, 1959. P. 5–7.
- [2] Rabotnov Y.N. Selected works. Problems of Solid Mechanics. М.: Nauka, 1991. 196 p.
- [3] Kachanov L.M. On failure time under creep conditions // Izvestia Akademii Nauk USSR. OTN. 1958. P. 26–31.
- [4] Rabotnov Y.N. Creep of structure elements. М.: Nauka. 1966.
- [5] Kuna M. Finite Elements in Fracture Mechanics. Theory-Numerics-Applications. Dordrecht: Springer, 2013. 464 p.
- [6] Murakami S. Continuum Damage Mechanics. A Continuum Mechanics Approach to the Analysis of Damage and Fracture. Dordrecht: Springer, 2012. 423 p.
- [7] Voyiadis G.Z., Woelke P. Elasto-Plastic and Damage Analysis of Plates and Shells. Berlin: Springer, 2008. 213 p.
- [8] Voyiadis G.Z., Kattan P.I. Damage Mechanics with Finite Elements: Practical Applications with Computer Tools. Springer, 2012. 113 p.

- [9] Zhang W., Cai Y. Continuum Damage Mechanics and Numerical Applications. Berlin: Springer, 2010. 936 p.
- [10] Kukudzhanov V.N. Computer modelling of deformation, damage and fracture of nonelastic materials and structures. M.: MFTI, 2008.
- [11] Simulation of creep crack growth in 316 stainless steel using a novel creep-damage model / J.-F. Wen [et al.] // Engng. Fracture Mechanics. 2013. V. 98. P. 169–184.
- [12] Kim E.-H., Rim M.-S., Hwang T.-K. Composite damage model based on continuum damage mechanics and low velocity impact analysis of composite plates // Composite Structures. 2013. V. 95, P. 123–134.
- [13] Numerical investigation of factors affecting creep damage accumulation in ASME P92 steel welded joint / L. Zhao [et al.] // Material and Design. 2012. V. 34. P. 566–575.
- [14] Stepanova L.V. Refined calculations of the stress-strain state near the crack tip under cyclic loading in a damaged medium // Vestnik of Samara State University. 2011. № 83. C. 105–115.
- [15] Adylina E.M., Igonin S.A., Stepanova L.V. On nonlinear eigenvalue problem arising from the near crack tip stress analysis in the vicinity of the fatigue growing crack // Vestnik of Samara State University. 2012. № 3.1(94). P. 83–102.
- [16] Riedel H. Creep Crack Initiation and Growth // Encyclopedia of Materials: Science and Technology. 2008. P. 1767–1773.
- [17] Volkov I.A., Korotkich Y.G. State equations for visco - elastic - plastic media with damage. M.: Fizmatlit, 2008. 424 p.
- [18] Korolev I.K., Petinov S.V., Freidin A.B. Numerical Modelling of damage accumulation and fatigue crack growth in elastic materials // Numerical continuum mechanics. 2009. T. 2. № 3. C. 34–43.
- [19] Wriggers P. Nonlinear Finite Element Methods. Berlin: Springer, 2008. 566 p.
- [20] Astafjev V.I., Radayev Y.N., Stepanova L.V. Nonlinear fracture mechanics // Izd-vo "Samarskiy universitet", 2001. 632 p.
- [21] Astafjev V.I. On the crack growth with taking into account the plastic flow under creep conditions. 1979. № 6. P. 154–158.
- [22] Riedel H. The extension of a macroscopic crack at elevated temperature by the growth and coalescence of microvoids // Creep in Structures. Berlin: Springer, 1981. P. 504–519.
- [23] Cocks A. C. F., Ashby M.F. The growth of dominant crack in a creeping material // Scr. Metall. 1982. V. 16. P. 109–114.
- [24] Astafjev V.I. Regularities of crack growth under creep conditions // Izvestia Akademii Nauk USSR. Mekhanika Tverdogo Tela. 1986. № 1. P. 127–134.
- [25] Krajcinovic D. Damage Mechanics. Amsterdam: Elsevier Science, 1996.
- [26] Lemaitre J. A. Course on Damage Mechanics // Berlin: Springer-Verlag, 1992.
- [27] Lemaitre J.A., Desmorat R. Engineering Damage Mechanics: Ductile, Creep, Fatigue and Brittle Failures. Berlin: Springer-Verlag, 2005.
- [28] Chaboche J.L. Phenomenological aspects of Continuum Damage Mechanics // Theoretical and Applied Mechanics. P. German, M. Piau, D. Caillerie (Editors). IUTAM. 1989. P. 41–56.
- [29] Kachanov L.M. Introduction to Continuum Damage Mechanics. Dordrecht; Boston: Martinus Nijhoff, 1986.
- [30] Astafjev V.I., Shiryayeva L.K. Damage accumulation and corrosion cracking in metals under stress. Samara: Samara State University. 1998. 123 p.

- [31] Stepanova L.V. *Mathematical Methods of Fracture Mechanics*. M.: Fizmatlit, 2009. 336 p.
- [32] Zhao J., Zhao X. The asymptotic study of fatigue crack growth based on damage mechanics // *Engn. Fracture Mechanics*. 1995. V. 50. № 1. P. 131–141.
- [33] Zhao J., Zhang X. On the process zone of a quasi-static growing tensile crack with power-law elastic-plastic damage // *Intern. J. of Fracture*. 2001. V. 108. P. 383–395.
- [34] Astafjev V.I., Grigirova T.V., Pastuchov V.A. Influence of continuum damage on stress distribution near a tip of a growing crack under creep conditions // *Fiziko-chimicheskay mekhanika materialov*. 1992. T. 28. № 1. P. 5–11.
- [35] Astafjev V.I., Grigirova T.V. Stress and damage distribution near the growing crack tip under creep conditions // *Izvestia Akademii Nauk USSR. Mekhanika Tverdogo Tela*. 1995. № 3. P. 160–166.
- [36] Lee S.B., Lu M., Kim J.Y. An asymptotic analysis of a tensile crack in creeping solids coupled with cumulative damage — Part I. Small damage region around the crack tip // *Int. J. Solids Structures*. 1997. V. 34. № 24. P. 3163–3178.
- [37] Lee S.B., Lu M., Kim J.Y. An asymptotic analysis of a tensile crack in creeping solids coupled with cumulative damage — Part II. Small damage region around the crack tip // *Int. J. Solids Structures*. 1997. V. 34. № 10. P. 1183–1197.
- [38] Murakami S., Hirano T., Liu Y. Asymptotic fields of stress and damage of a mode I creep crack in steady-state growth // *Int. J. Solids Structures*. 2000. № 37. P. 6203–6220.
- [39] Murakami S., Liu Y., Mizuno M. Computational methods for creep fracture analysis by damage mechanics // *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 2000. V. 183. P. 15–33.
- [40] Stepanova L.V., Fedina M.E. On the geometry of the totally damaged zone near the crack tip in the coupled formulation (creep - damage coupling) // *Vestnik of Samara State University*. 2001. № 2. P. 87.
- [41] Pinna Ch., Doquet V. The preferred fatigue crack propagation mode in a M250 maraging steel loaded in shear // *Fatigue Fract. Eng. Mater. Structure*. 1999. V. 23. P. 173–183.
- [42] Stepanova L.V. Eigenvalues of the antiplane-shear crack problem for a power-law material // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2008. T. 49. № 1. P. 142–147.
- [43] Kukudzanov V.N. Coupled models of elastoplasticity and damage and their integration // *Izvestia Akademii Nauk USSR*. 2006. № 6. P. 103–135. *Mekhanika Tverdogo Tela*.
- [44] Mika P. Influence of variable load on damage evolution in the plate structures // 15th International conference on computer methods in mechanics CMM-2003. Short papers. Gliwice, 2003. P. 253–254.
- [45] Izvekov O.Y., Seliskij A.A., Krypenik A.M. Realization of energy model of continuum fracture of brittle media in SIMULIA/ABAQUS 6.9. URL: <http://www.thesis.com/software/abaqus/abaqus-exp.php>.
- [46] Izvekov O.Y., Krypenik A.M. Solution of coupled problems of continuum fracture of thermo and porous elastic media in Simulia Abaqus. URL: <http://www.thesis.com/software/abaqus/abaqus-exp.php>.
- [47] Izvekov O.Y., Kondaurov V.I. Model of porous medium with elastic cracked skeleton. *Physics of Earth*. 2009. № 4. P. 31–42.
- [48] Kondaurov V.I. *Mechanics and thermodynamics of saturated porous medium*. M.: MFTI, 2007.

- [49] Izvekov O.Y., Kondaurov V.I. Scattered fracture of porous materials with brittle skeleton. *Mechanics of Solids*. 2010. Т. 45. № 3. P. 445–464.
- [50] Hayhurst D.R. CDM mechanisms-based modelling of tertiary creep: ability to predict the life of engineering components // *Arch. Mech.* 2005. V. 57. P. 103–132.
- [51] Voyiadjis G.Z., Kattan P.I. *Advances in Damage Mechanics: Metals and Metal Matrix Composites*. Oxford: Elsevier, 2006.
- [52] Litewka A., Lis Z. Creep damage and creep rupture of metals // In *Applied Stress Analysis* / T.H. Hyde [et al.] (eds.) Elsevire, 1990. P. 201–210.
- [53] Riedel H. *Fracture at high temperature*. Berlin: Springer, 1987.
- [54] Kondaurov V.I., Fortov V.E. *Basics of termomechanics of condensed media*. M.: MFTI, 2002. 336 p.

Поступила в редакцию 15/VI/2013;  
в окончательном варианте — 4/VII/2013.

**DESCRIPTION OF DETERIORATION PROCESSES:  
DAMAGE PARAMETER OF Y.N. RABOTNOV:  
HISTORICAL REMARKS, FUNDAMENTAL RESULTS  
AND CONTEMPORARY STATE**

© 2014 L.V. Stepanova, S.A. Igonin<sup>2</sup>

In the paper the detailed review of the present-day results related to problems of continuum damage mechanics is given. The survey shows the development of ideas of Y.N. Rabotnov who together with L.M. Kachanov introduced damage and continuity variables which characterize the damage state. In the paper the recent studies in the elasticity, plasticity and creep theories accounting for damage accumulation processes are discussed.

**Key words:** damage variable, continuity parameter, damage tensor, computer modelling, continuum damage mechanics.

Paper received 15/VI/2013.

Paper accepted 4/VII/2013.

---

<sup>2</sup>Stepanova Larisa Valentinovna (1st@ssu.samara.ru), Igonin Sergey Alexandrovich (sergejigonin@yandex.ru), Dept. of Mathematical Modelling in Mechanics, Samara State University, Samara, 443011, Russian Federation.