УДК 517.928.1

СТАБИЛИЗАЦИЯ ОБОБЩЕННОГО РЕШЕНИЯ ТРЕТЬЕЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

© 2014 О.П. Филатов[1]

С ростом времени обобщенное решение задачи с периодическими по времени параметрами стремится к периодической по времени функции, если некоторые параметры удовлетворяют условию положительности или неотрицательности. Если параметры не являются периодическими по времени, то решение задачи сходится к решению этой же задачи с нулевой начальной функцией.

Ключевые слова: параболическое уравнение, третья краевая задача, обобщенное решение, стабилизация.

1. Теоремы о стабилизации

Рассматривается смешанная задача

$$u_t = div(p(t,x)\nabla u) - q(t,x)u + f(t,x), \quad (t,x) \in G_\infty, \tag{1.1}$$

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad x \in G; \quad \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + \alpha(t,x)u = 0, \quad (t,x) \in S_\infty, \tag{1.2}$$

где G — ограниченная область из евклидова пространства $\mathbb{R}^m$ с гладкой границей $\Gamma \in C^1$, $G_\infty = [0,\infty) \times G, S_\infty = [0,\infty) \times \Gamma, \mathbf{n}$ — внешняя единичная нормаль к границе Γ, $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $\nabla u = (u_{x_1}, \ldots, u_{x_m}), u_{x_j} = \partial u(t,x)/\partial x_j, u_t = \partial u(t,x)/\partial t$. Начальная функция φ и измеримые параметры p, q, f, α принимают вещественные значения и удовлетворяют следующим условиям:

$$\varphi \in L_2(G), \quad f \in L^{t,x}_{1,2}(G_\tau) \quad \forall\, \tau > 0, \tag{1.3}$$

$$0 < p_0 \leqslant p(t,x) \leqslant \mu(t), \quad |p_t(t,x)|, |q(t,x)| \leqslant \mu(t), \quad (t,x) \in G_\infty, \tag{1.4}$$

$$|\alpha(t,x)|, |\alpha_t(t,x)| \leqslant \mu(t), \quad (t,x) \in S_\infty, \tag{1.5}$$

где p_0 — постоянная, $\mu : [0,\infty) \to [p_0,\infty)$ — непрерывная функция, множество $G_\tau = [0,\tau] \times G$, функции p и α абсолютно непрерывны по $t \in [0,\infty)$.

Для определения обобщенного решения используется гильбертово пространство $W^{1,0}_2(G_\tau)$ функций $u \in L_2(G_\tau)$, которые имеют обобщенные производные

[1]Филатов Олег Павлович (filatov_oleg@samaradom.ru), кафедра уравнений математической физики Самарского государственного университета, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

$u_{x_j} \in L_2(G_\tau), j = 1, \dots, m$. Скалярное произведение и норма в этом пространстве определяются соотношениями

$$\langle u, v\rangle_\tau = \int_{G_\tau} (uv + \sum_{j=1}^{m} u_{x_j} v_{x_j}) dx\, dt, \quad \|u\|_\tau = \sqrt{\langle u, u\rangle_\tau}.$$

Пространство $W_2^1(G_\tau)$ отличается от пространства $W_2^{1,0}(G_\tau)$ тем, что его элементы дополнительно имеют обобщенную производную по t из $L_2(G_\tau)$.

Подпространство функций из $W_2^1(G_\tau)$, равных 0 при $t = \tau$, обозначается через $\Theta_0(G_\tau)$.

По определению функция $u \in W_2^{1,0}(G_\infty)$, если она определена на множестве G_∞, а ее сужение на множество G_τ принадлежит пространству $W_2^{1,0}(G_\tau) \forall \tau > 0$.

Скалярное произведение в $\mathbb{R}^m$ обозначается $\langle \cdot, \cdot \rangle$, а соответствующая норма — $\| \cdot \| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$.

Если уравнение (1.1) умножить на произвольную пробную функцию $\eta \in \in \Theta_0(G_\tau)$ и выполнить формальное интегрирование по частям с учетом условий (1.2), то получим соотношение

$$\int_{G_\tau} (-u\eta_t + p\langle \nabla u, \nabla \eta\rangle + qu\eta)\, dx\, dt + \int_{S_\tau} \alpha p u \eta\, d\sigma\, dt =$$
$$\int_G \varphi(x)\eta(0, x)\, dx + \int_{G_\tau} f\eta\, dx\, dt, \tag{1.6}$$

где $d\sigma$ — элемент площади поверхности Γ, $S_\tau = [0, \tau] \times \Gamma$.

Решением задачи (1.1), (1.2) называется функция $u \in W_2^{1,0}(G_\infty)$, которая удовлетворяет равенству (1.6) $\forall\, \eta \in \Theta_0(G_\tau) \forall \tau > 0$.

Из [1, теорема 4.1, с. 178] следует, что при выполнении условий (1.3)–(1.5) задача (1.1), (1.2) имеет единственное решение $u \in W_2^{1,0}(G_\infty)$.

Пусть $G_{\tau,1} = [\tau - 1, \tau] \times G$ при $\tau > 1$. Норму в пространстве $W_2^{1,0}(G_{\tau,1})$ обозначим через $\| \cdot \|_{\tau,1}$.

Определение 1. Функция $u \in W_2^{1,0}(G_\infty)$ стремится к функции $u_0 \in W_2^{1,0}(G_\infty)$ при $t \to \infty$, если

$$\lim_{\tau \to \infty} \|u - u_0\|_{\tau,1} = 0.$$

В краткой записи: $u \to u_0$ при $t \to \infty$.

Для частного случая задачи (1.1), (1.2), когда параметры p и α не зависят от t, хорошо известно свойство стабилизации классического решения этой задачи при $t \to \infty$ к предельной функции при условии $p \geqslant p_0, q, \alpha \geqslant 0$. Это следует из метода Фурье, который эффективно применяется в этом случае для решения задачи при достаточной гладкости входных данных [2–4].

В данной статье без доказательства формулируются теоремы, в которых классическое свойство стабилизации распространяется на обобщенное решение задачи (1.1), (1.2) (теоремы 1, 3) или на приближенное решение (теоремы 2, 4), при этом в теоремах 1, 2 параметры p, q, f, α являются периодическими по t функциями с периодом $\omega > 0$, а в теоремах 3, 4 не предполагается, что параметры зависят от t периодически.

Приближенным решением u^n задачи (1.1), (1.2) для $n = 1, 2 \dots$ называется функция

$$u^n(t, x) = \sum_{j=1}^{n} c_j(t)\varphi_j(x), \quad (t, x) \in G_\infty. \tag{1.7}$$

Здесь линейная оболочка системы функций $\{\varphi_j\}$ плотна в пространстве $W_2^1(G)$, и для удобства вычислений предполагается, что эта система ортонормирована в пространстве $L_2(G)$, то есть

$$\int_G \varphi_k\varphi_j\,dx = \delta_{kj},$$

где δ_{kj} — символ Кронекера. Более того, можно считать, что $\varphi_1 = 1/\sqrt{|G|}$, где $|G|$ — мера Лебега области G, $\varphi_j \in C^\infty(\overline{G}), j = 1, 2\dots$ [4, глава 3].

Набор абсолютно непрерывных функций $c_j : [0,\infty) \to \mathbb{R}, j = 1,\dots,n$ из (1.7) удовлетворяет системе обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями

$$\frac{dC^n}{dt} = A^n(t)C^n + F^n(t), \quad C^n(0) = C_0^n,$$

где

$$C^n = (c_1,\dots,c_n)^T, \quad F^n = (f_1,\dots,f_n)^T, \quad C_0^n = (c_{10},\dots,c_{n0})^T,$$

$$A^n = (a_{kj}), \quad a_{kj} = -(p_{kj} + q_{kj} + s_{kj}), \quad k, j = 1,\dots,n,$$

T — символ транспонирования. Здесь

$$p_{kj} = \int_G p\langle\nabla\varphi_k, \nabla\varphi_j\rangle\,dx, \quad q_{kj} = \int_G q\varphi_k\varphi_j\,dx, \quad s_{kj} = \int_\Gamma \alpha p\varphi_k\varphi_j\,d\sigma,$$

$$c_{k0} = \int_G \varphi\varphi_k\,dx, \quad f_k = \int_G f\varphi_k\,dx.$$

Более детальные сведения, связанные с построением приближенных решений, изложены в [1]. Как известно [1, теорема 4.1, с. 178], последовательность приближенных решений (1.7) слабо сходится к функции $u \in W_2^{1,0}(G_\tau)$ — единственному решению задачи (1.1), (1.2) для данного $\tau > 0$.

В следующих теоремах постоянные $q_0, \alpha_0 > 0$, $u_\varphi \in W_2^{1,0}(G_\infty)$ — решение задачи (1.1), (1.2) с начальной функцией φ, а u_0 — решение, отвечающее $\varphi = 0$; u_φ^n, u_0^n — соответствующие приближенные решения.

Теорема 1. Пусть выполняются условия (1.3)–(1.5), параметры p, q, f, α являются ω-периодическими функциями времени t и $q \geqslant q_0, \alpha \geqslant 0$. Тогда существует ω-периодическая по t функция $u_\omega \in W_2^{1,0}(G_\infty)$ такая, что $u_\varphi \to u_\omega$ при $t \to \infty$.

В условиях теоремы 1 $u_\varphi^n \to u_\omega^n$ при $t \to \infty$ для некоторой ω-периодической функции $u_\omega^n \in W_2^{1,0}(G_\infty)$. Оказывается, что свойство стабилизации приближенного решения сохраняется и при других условиях на параметры q и α.

Теорема 2. Пусть выполняются условия (1.3)–(1.5), параметры p, q, f, α являются ω-периодическими функциями времени t и, кроме того,

$$q \geqslant q_0,\ \alpha \geqslant 0 \quad \text{или} \quad q \geqslant 0,\ \alpha \geqslant \alpha_0. \tag{1.8}$$

Тогда $\forall\, n$ существует ω-периодическая по t функция $u_\omega^n \in W_2^{1,0}(G_\infty)$ такая, что $u_\varphi^n \to u_\omega^n$ при $t \to \infty$.

Если отбросить условие ω-периодичности параметров задачи, то тогда справедливы следующие аналоги теорем 1, 2.

Теорема 3. Пусть выполняются условия (1.3)–(1.5) и $q \geqslant q_0, \alpha \geqslant 0$. Тогда $u_\varphi \to u_0$ при $t \to \infty$.

Теорема 4. Пусть выполняются условия (1.3)–(1.5), (1.8). Тогда $u_\varphi^n \to u_0^n$ при $t \to \infty\,\forall\, n$.

Литература

[1] Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М: Наука, 1973. 408 с.

[2] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М: Наука, 1977. 736 с.

[3] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М: Наука, 1981. 512 с.

[4] Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М: Наука, 1976. 392 с.

[5] Бибиков Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Высшая школа, 1991. 303 с.

References

[1] Ladyzhenskaya O.A. Boundary-value problems of mathematical physics. M: Nauka, 1973. 408 p.

[2] Tikhonov A.N., Samarsky A.N. Equations of mathematical physics. M: Nauka, 1977. 736 p.

[3] Vladimirov V.S. Equations of mathematical physics. M: Nauka, 1981. 512 p.

[4] Mikhailov V.P. Partial differential equations. M: Nauka, 1976. 392 p.

[5] Bibikov Yu.N. Course of ordinary differential equations. M.: Vysshaya shkola, 1991. 303 p.

Поступила в редакцию 26/*II*/2014;
в окончательном варианте — 26/*II*/2014.

STABILIZATION OF GENERALIZED SOLUTION OF THE THIRD BOUNDARY PROBLEM FOR A PARABOLIC EQUATION

© 2014 O.P. Filatov[2]

With increasing time generalized solution of the problem with time-periodic parameters tends to time periodic function if some parameters satisfy the positivity or non-negativity. If parameters are not periodic in time, then the solution converges to the solution of the same problem with zero initial function.

Key words: parabolic equation, third boundary value problem, generalized solution, stabilization.

Paper received 26/*II*/2014.
Paper accepted 26/*II*/2014.

[2]Filatov Oleg Pavlovich (filatov_oleg@samaradom.ru), the Dept. of Equations of Mathematical Physics, Samara State University, Samara, 443011, Russian Federation.