УДК 517.95

ТОЧНОСТЬ КОМПЛЕКСА ГЕРСТЕНА ДЛЯ АЛГЕБР АДЗУМАЯ В РАВНОХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

 А.А. Мингазов[1]

Одной из хорошо известных задач в алгебраической K-теории является гипотеза Герстена. В статье доказывается вариант гипотезы Герстена для алгебр Адзумая в равнохарактеристическом случае. Геометрический случай этого утверждения доказан в статье И. Панина и А. Суслина.

Ключевые слова: K-теория, гипотеза Герстена, равнохарактеристическое кольцо, алгебра Адзумая.

Введение

Гипотеза Герстена в классической формулировке утверждает, что для любого регулярного локального кольца R имеет место точная последовательность

$$0 \to K_p(R) \to K_p(K) \to \bigoplus_{ht(\mathfrak{p})=1} K_{p-1}(k(\mathfrak{p})) \to \bigoplus_{ht(\mathfrak{q})=2} K_{p-2}(k(\mathfrak{q})) \to \dots .$$

Определение комплекса Герстена и доказательство гипотезы Герстена для локального кольца неособой точки многообразия над полем можно найти в статье Квиллена [8], и для равнохарактеристического кольца в статье Панина [4] (напомним, что локальное кольцо называется равнохарактеристическим, если оно нетерово и характеристика его поля вычетов совпадает с характеристикой его поля частных). В статье [1] был выдвинут и доказан некоторый аналог гипотезы Герстена, а именно для локального кольца $\mathcal{O}$ гладкой точки многообразия над полем k и центральной простой алгебры D над полем k утверждалась точность последовательности

$$0 \to K_n(D \underset{k}{\otimes} \mathcal{O}) \to K_n(D \underset{k}{\otimes} K) \to \bigoplus_{ht(\mathfrak{p})=1} K_{n-1}(D \underset{k}{\otimes} k(\mathfrak{p})) \to \dots$$

В статье [11] было доказано более общее утверждение, а именно точность последовательности

$$0 \to K_n(D) \to K_n(D \underset{\mathcal{O}}{\otimes} K) \to \bigoplus_{ht(\mathfrak{p})=1} K_{n-1}(D \underset{\mathcal{O}}{\otimes} k(\mathfrak{p})) \to \dots ,$$

где $\mathcal{O}$ — полулокальное кольцо, а D — алгебра Адзумая над $\mathcal{O}$ (про алгебры Адзумая можно прочитать в [10]). В данной работе мы доказываем гипотезу Герстена

[1]Мингазов Альберт Айдарович (mingazov88@gmail.com), лаборатория алгебры и теории чисел Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В.А. Стеклова, 191023, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, 27.

для случая произвольной алгебры Адзумая над регулярным равнохарактеристическим кольцом. Мы используем методы статьи [4], в которой данное утверждение было высказано в качестве гипотезы.

Основной результат. Пусть R — равнохарактеристическое регулярное кольцо, $\mathcal{A}$ — алгебра Адзумая над R. Тогда комплекс Герстена

$$0 \to K_n(\mathcal{A} \underset{\mathcal{O}}{\otimes} K) \to \bigoplus_{ht(\mathfrak{p})=1} K_{n-1}(\mathcal{A} \underset{\mathcal{O}}{\otimes} k(\mathfrak{p})) \to \dots$$

точен во всех членах кроме нулевого, а нулевые когомологии равны $K_n(\mathcal{A})$.

1. Некоторые обозначения

Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра Адзумая над R, с помощью обратного образа ее можно рассматривать как пучок на категории R-схем, будем обозначать его $\underline{\underline{\mathcal{A}}}$. Обозначим $\underline{\underline{K}}{}_*^{\mathcal{A}}$ — пучок, ассоциированный с предпучком, ставящим в соответствие открытому аффинному $U = Spec(B)$ группу $K_*(\underline{\underline{\mathcal{A}}}(U)) = K_*(\mathcal{A} \underset{R}{\otimes} B)$.

Будем обозначать $g_*^{\mathcal{A}}(X)$ — комплекс Герстена для алгебры Адзумая $\mathcal{A}$ на схеме X. Пучковую версию комплекса Герстена для алгебры Адзумая $\mathcal{A}$ на схеме X будем обозначать $\underline{\underline{g}}{}_*^{\mathcal{A}}(X)$. Если применить к пучковому комплексу функтор глобальных сечений, получим обычный комплекс Герстена, то есть $\Gamma(X, \underline{\underline{g}}{}_*^{\mathcal{A}}(X)) = g_*^{\mathcal{A}}(X)$.

2. Теорема Попеску и спуск алгебры Адзумая

Теорема 2.1 (Попеску). Пусть R — регулярное равнохарактеристическое локальное кольцо. Тогда существует совершенное поле k, содержащееся в R, и для каждого такого поля k кольцо R представимо в виде индуктивного предела $R = \varinjlim R^\alpha$, где R^α — гладкие конечнопорожденные k-алгебры.

Доказательство. Доказано в [5; 6; 7].

Пусть $R = \varinjlim S^\alpha$ — представление равнохарактеристического кольца в виде индуктивного предела конечнопорожденных гладких k-алгебр, $\varphi_{\alpha\beta}\colon S^\alpha \to S^\beta$ — связывающие гомоморфизмы, $\varphi_\alpha\colon S^\alpha \to R$ — проекции в предел.

Замечание 1. Из определения индуктивного предела для любого α_0 предел $\lim\limits_{\alpha \geqslant \alpha_0} S^\alpha$ тоже равен R.

Замечание 2. Обозначим максимальный идеал в R через $\mathfrak{m}$, и $\mathfrak{p}_\alpha = (\varphi_\alpha)^{-1}(\mathfrak{m})$. Несложно проверить, что $R = \varinjlim S^\alpha_{\mathfrak{p}_\alpha}$, то есть мы представили кольцо R в виде предела локальных колец гладких многообразий, причем связующие гомоморфизмы локальны. Теперь всюду далее мы будем считать, что кольца S^α и гомоморфизмы φ_α локальны.

Замечание 3. Пусть $f \in R$ — локальный параметр, то есть $f \in \mathfrak{m}_R$, но $f \notin \mathfrak{m}_R^2$. Тогда можно выбрать индекс α так, что:

а) для любого $\beta \geqslant \alpha$ у f существует прообраз f_β, то есть элемент S^β такой, что $\varphi_\beta(f_\beta) = f$, $\varphi_{\beta\gamma}(f_\beta) = f_\gamma$;

б) каждое f_β является локальным параметром в S^β.

Все сказанное можно переформулировать на языке аффинных схем, а именно мы имеем проективный предел $X = \lim\limits_{\leftarrow} X_\alpha$, где $X = Spec(R)$, $X_\alpha = Spec(S^\alpha)$ — локальные схемы и связующие морфизмы $X_\alpha \to X_\beta$ переводят замкнутые точки в замкнутые. Кроме того, выбрав локальные параметры $f_\alpha \in S^\alpha$ такие, что $\varphi_\alpha(f_\alpha) = f$, получаем предел $X_f = \lim\limits_{\leftarrow} X_{\alpha, f_\alpha}$.

Для осуществления предельного перехода нам понадобится лемма.

Лемма 2.2 (о спуске алгебры Адзумая). Пусть $\mathcal{A}$ — это алгебра Адзумая над равнохарактеристическим кольцом R. Представим R как индуктивный предел локальных колец гладких многообразий $R = \lim\limits_{\rightarrow} S^\alpha$. Тогда существуют индекс α и алгебра Адзумая $\mathcal{A}_\alpha$ такие, что $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\alpha \underset{S_\alpha}{\otimes} R$.

Доказательство. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — система образующих алгебры $\mathcal{A}$ над кольцом R, а соотношения имеют вид

$$e_i e_j = \sum_{k=1}^{n} a_{ij}^k e_k,$$

где $a_{ij}^k \in R$. Пусть индекс α такой, что все они имеют некоторый прообраз при гомоморфизме $\varphi_\alpha : S^\alpha \to R$ (поскольку набор $\{a_{ij}^k\}$ конечен, такой всегда можно выбрать). Тогда можем спустить алгебру $\mathcal{A}$ до S^α-алгебры $\mathcal{A}_\alpha$ с образующими $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и соотношениями

$$e_i e_j = \sum_{k=1}^{n} \widehat{a}_{ij}^k e_k,$$

где $\widehat{a}_{ij}^k$ таковы, что $\varphi_\alpha(\widehat{a}_{ij}^k) = a_{ij}^k$. При этом, если для некоторого индекса α такой спуск возможен, то то же верно и для любого $\beta \geqslant \alpha$, причем $\mathcal{A}_\beta = \mathcal{A}_\alpha \underset{S_\alpha}{\otimes} S^\beta$. Поскольку из теоремы Попеску следует, что $R = \lim\limits_{\beta \geqslant \alpha} S^\beta$, можем считать, что алгебру $\mathcal{A}$ можно спустить на любой уровень. Нам достаточно доказать (по теореме IV.2.1 из [10]), что существует α такое, что отображение $f_\alpha : \mathcal{A}_\alpha \underset{S_\alpha}{\otimes} \mathcal{A}_\alpha^{op} \to End_{S^\alpha} \mathcal{A}_\alpha$ является изоморфизмом. Рассмотрим коммутативную диаграмму с точными строками:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Kerf_\alpha \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{A}_\alpha \underset{S_\alpha}{\otimes} \mathcal{A}_\alpha^{op} \arrow[r] \arrow[d] & End_{S^\alpha} \mathcal{A}_\alpha \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathcal{A} \underset{R}{\otimes} \mathcal{A}^{op} \arrow[r, "\sim"] & End_R \mathcal{A}
\end{tikzcd}$$

из которой заключаем, что $\lim\limits_{\rightarrow} Kerf_\alpha = 0$. Из-за конечной порожденности существует номер β такой, что $Kerf_\gamma$ нулевое для любого $\gamma \geqslant \beta$, а потому f_γ инъективны для $\gamma \geqslant \beta$. Аналогичные рассуждения проводим для коядра и выбираем индекс, больший обоих.

3. Доказательство точности комплекса Герстена в равнохарактеристическом случае

Мы приведем доказательство, опустив технические подробности, поскольку доказательство с учетом леммы о спуске совершенно аналогично доказательству гипотезы Герстена для равнохарактеристического кольца [4].

Лемма 3.1. Пусть $X = Spec(R)$, где R — регулярное локальное кольцо, $\mathcal{A}$ — алгебра Адзумая над R, $f \in R$ —локальный параметр, то есть $f \in \mathfrak{m}$, но $f \notin \mathfrak{m}^2$, а $Z = V(f)$. Тогда имеет место расщепимая точная последовательность комплексов Герстена

$$0 \to g^{\mathcal{A}}_{*-1}(Z)[-1] \to g^{\mathcal{A}}_{*}(X) \to g^{\mathcal{A}}_{*}(X_f) \to 0,$$

где $[-1]$ означает сдвиг градуировки на единицу так, что для комплекса V_* верно $V[-1]_i = V_{i-1}$.

Доказательство. Утверждение сразу получается после выписывания соответствующих комплексов.

Лемма 3.2. Пусть S — локальное кольцо точки гладкого многообразия, $\mathcal{A}$ — алгебра Адзумая над S. Тогда имеет место точная последовательность

$$0 \to K_*(\mathcal{A}) \to K_*(\mathcal{A}_f) \to K_{*-1}(\mathcal{A} \underset{S}{\otimes} S/fS) \to 0.$$

Доказательство. Пусть E — поле частных S. Из геометрического случая гипотезы Герстена для алгебр Адзумая в частности следует, что для локального кольца S гладкого многообразия $K_*(\mathcal{A}) \hookrightarrow K_*(\mathcal{A} \underset{S}{\otimes} E)$. Значит, $K_*(\mathcal{A}) \hookrightarrow K_*(\mathcal{A}_f)$. Из-за этого точная последовательность локализации (о последовательности локализации для алгебраической К-теории можно прочитать в [8] или [9]) $\mathcal{A}$ по f расщепляется на точные тройки нужного нам вида.

Лемма 3.3. Пусть S — конечно порожденное регулярное локальное кольцо, $\mathcal{A}$ — алгебра Адзумая над S, $X = Spec(S)$, $f \in S$ — локальный параметр. Тогда

1) $H^p_{Zar}(X_f, \underline{\underline{K}}^{\mathcal{A}}_*) = 0$ для $p \geqslant 1$,

2) отображение пучковизации $can\colon K^{\mathcal{A}}_*(\mathcal{A}_f) \to \underline{\underline{K}}^{\mathcal{A}}_*(X_f)$ — изоморфизм.

Доказательство. В [11] доказано, что для любого локального кольца S геометрического типа и любой алгебры Адзумая $\mathcal{B}$ над S комплекс Герстена является резольвентой $K_*(\mathcal{B})$. Тогда, рассматривая пучок алгебр Адзумая $\underline{\underline{\mathcal{A}}}$ на категории S-схем, получаем, что пучковый комплекс Герстена является резольвентой пучка $\underline{\underline{K}}^{\mathcal{A}}_*$. В частности, комплекс $g^{\mathcal{A}}_*(X_f)$ вычисляет когомологии $H^i_{Zar}(X_f, \underline{\underline{K}}^{\mathcal{A}}_*)$. Запишем для кольца S и локального параметра f точную тройку комплексов из предыдущей леммы. Переходя к длинной точной последовательности когомологий, сразу получаем первое утверждение леммы для $p \geqslant 1$, поскольку в силу справедливости гипотезы Герстена для алгебры Адзумая старшие когомологии комплексов $g^{\mathcal{A}}_*(X)$ и $g^{\mathcal{A}}_{*-1}(Z)$ равны нулю. Кроме того, получим точную последовательность вида

$$0 \to K_*(\mathcal{A}) \to \underline{\underline{K}}^{\mathcal{A}}_*(X_f) \to K_{*-1}(\mathcal{A} \underset{S}{\otimes} S/fS) \to 0.$$

Второе утверждение леммы доказывается сравнением этой последовательности и последовательности из леммы 3.2. Это подробно сделано в [4] для классического случая, наш случай получается заменой в доказательстве К-теории схем на К-теорию алгебр Адзумая над ними.

В статье [4], методами которой мы пользуемся, далее с помощью теоремы Гротендика о предельном переходе доказывается аналог предыдущей леммы. В нашем случае здесь возникает некоторая сложность. Когда мы представим наше кольцо в виде $R = \varinjlim S_\alpha$ и рассмотрим алгебру $\mathcal{A}$ над S_α, то она, вообще говоря, не будет алгеброй Адзумая над S_α. Мы обойдем эту проблему следующим образом. Сначала спустим алгебру $\mathcal{A}$ до конечного уровня, то есть найдем индекс α и алгебру Адзумая $\mathcal{A}_\alpha$ над S_α такие, что $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\alpha \underset{S_\alpha}{\otimes} R$. Это можно сделать благодаря лемме о спуске алгебры Адзумая. Всюду далее мы будем рассматривать схемы над кольцом S_α, где индекс α удовлетворяет условию предыдущей леммы. Алгебру Адзумая $\mathcal{A}_\alpha$ мы можем поднять на любую S_α-схему. Алгебру $\mathcal{A}_\alpha \underset{S_\alpha}{\otimes} S_\beta$ по прежнему будем обозначать $\mathcal{A}_\beta$. Рассмотрим пучок на категории схем, ставящий в соответствие аффинной схеме $U = Spec(B)$ группу $K_*(\mathcal{A}_\alpha \underset{S_\alpha}{\otimes} B) = K_*(\underline{\underline{\mathcal{A}_\alpha}}(U))$. Его мы тоже будем обозначать $\underline{\underline{K}}{}_*^{\mathcal{A}}$, поскольку, ограничив его на категорию R-схем, получим как раз пучок, рассматривавшийся ранее.

Сформулируем нужную нам версию теоремы Гротендика.

Теорема 3.4 (Гротендика о предельном переходе). Пусть A — кольцо и Sch/A — категория нетеровых схем над A. Пусть F — это предпучок абелевых групп на Sch/A, перестановочный с проективными пределами нетеровых аффинных схем, то есть каноническое отображение $\varinjlim F(S^\alpha) \to F(\varinjlim S^\alpha)$ является изоморфизмом для каждой индуктивной системы нетеровых A-алгебр с пределом $S = \varinjlim S^\alpha$. Пусть $\widetilde{F}$ — пучок на сайте Зарисского, ассоциированный с F. Тогда для любого индуктивного предела нетеровых A-алгебр R^β с нетеровым пределом $R = \varinjlim R^\beta$ и любого целого $p \geqslant 0$ каноническое отображение $\varinjlim H^p_{Zar}(Spec(S^\beta), \widetilde{F}) \to H^p_{Zar}(Spec(S), \widetilde{F})$ есть изоморфизм.

Доказательство. Можно найти в [3]. Набросок доказательства есть также в [4].

Лемма 3.5. Пусть R — регулярное локальное равнохарактеристическое кольцо, $\mathcal{A}$ — алгебра Адзумая над R, $X = Spec(R)$, f — локальный параметр. Тогда каноническое отображение

$$can\colon K_*(\mathcal{A}_f) \to \underline{\underline{K}}{}_*^{\mathcal{A}}(X_f)$$

является изоморфизмом, то есть $H^0(X_f, \underline{\underline{K}}{}_*^{\mathcal{A}}) = K_*(\mathcal{A}_f)$.

Доказательство. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\varinjlim\limits_{\beta \geqslant \alpha} K_*(\mathcal{A}_{\beta, f_\beta}) \arrow[r] \arrow[d] & \varinjlim\limits_{\beta \geqslant \alpha} \underline{\underline{K}}{}_*^{\mathcal{A}}(X_{\beta, f_\beta}) \arrow[d] \\
K_*(\mathcal{A}_f) \arrow[r, "can"] & \underline{\underline{K}}{}_*^{\mathcal{A}}(X_f)
\end{tikzcd}$$

Левая вертикальная стрелка является изоморфизмом, поскольку тензорное произведение и K-функторы перестановочны с индуктивными пределами. Правая вертикальная стрелка является изоморфизмом в силу теоремы Гротендика о предельном переходе (используется частный случай, а именно перестановочность с пределом H^0). Верхняя стрелка — изоморфизм, поскольку имеем изоморфизм для каждого β.

Лемма 3.6. Пусть R — равнохарактеристическое регулярное локальное кольцо, $\mathcal{A}$ — алгебра Адзумая над R, $f \in R$ — локальный параметр. Тогда

$$H^p_{Zar}(X_f, \underline{\underline{K}}^{\mathcal{A}}_*) = 0$$

для любого $p \geqslant 1$.

Доказательство. Из теоремы Гротендика и замечаний после теоремы Попеску имеем

$$H^p(X_f, \underline{\underline{K}}^{\mathcal{A}}_*) = \lim_{\beta \geqslant \alpha} H^p(X_{\beta, f_\beta}, \underline{\underline{K}}^{\mathcal{A}}_*).$$

Группы $H^p(X_{\beta, f_\beta}, \underline{\underline{K}}^{\mathcal{A}}_*)$ равны нулю при $p > 0$ по лемме 3.3. Значит, правая часть равенства зануляется для $p > 0$.

Лемма 3.7. Пусть R — равнохарактеристическое регулярное кольцо, $\mathcal{A}$ — алгебра Адзумая над R. Тогда имеет место точная последовательность

$$0 \to K_*(\mathcal{A}) \to K_*(\mathcal{A}_f) \to K_{*-1}(\mathcal{A} \otimes_R R/fR) \to 0.$$

Доказательство. Это утверждение будет следовать из последовательности локализации, если мы докажем, что $K_*(\mathcal{A}) \to K_*(\mathcal{A}_f)$ инъективно. Для этого рассмотрим диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
\lim\limits_{\beta \geqslant \alpha} K_*(\mathcal{A}_\beta) \arrow[r] \arrow[d] & \lim\limits_{\beta \geqslant \alpha} K_*(\mathcal{A}_{\beta, f_\beta}) \arrow[d] \\
K_*(\mathcal{A}) \arrow[r] & K_*(\mathcal{A}_f)
\end{tikzcd}$$

Вертикальные стрелки являются изоморфизмами, поскольку K-группы коммутируют с индуктивными пределами. Верхняя строчка является инъекцией, поскольку $\mathcal{A}_\beta$ — алгебры Адзумая над конечнопорожденными локальными кольцами, а значит, для них верна гипотеза Герстена, из которой следует инъективность $K_*(\mathcal{A}_\beta) \to K_*(\mathcal{A}_{\beta, f_\beta})$.

Теорема 3.8. Пусть R — равнохарактеристическое регулярное локальное кольцо, $\mathcal{A}$ — алгебра Адзумая над R, $X = Spec(R)$. Тогда комплекс Герстена для алгебры $\mathcal{A}$

$$0 \to K_*(\mathcal{A} \otimes_R k(X)) \to \bigoplus_{ht(\mathfrak{p})=1} K_{*-1}(\mathcal{A} \otimes_R k(\mathfrak{p})) \to \bigoplus_{ht(\mathfrak{q})=2} K_{*-2}(\mathcal{A} \otimes_R k(\mathfrak{q})) \to \dots$$

является резольвентой $K_*(\mathcal{A})$.

Доказательство. Доказательство проводится по индукции по круллевской размерности d кольца R.

1. База индукции. Пусть $\dim(R) = 1$, $f \in R$ — локальный параметр. В этом случае $K = R_f$ — поле частных. Предыдущая лемма в этом случае утверждает ровно то, что мы хотим доказать.

2. Переход индукции. Пусть $\dim(R) \geqslant 2$, и теорема выполняется для любого регулярного равнохарактеристического кольца размерности меньше, чем d.

Пусть, как обычно, $f \in \mathfrak{m}$ — локальный параметр, $Z = V(f)$ — множество нулей, $\dim(Z) = d - 1$. Размерность $\dim(X_f)$ меньше d, поскольку любая цепочка неприводимых подмногообразий X наибольшей длины заканчивалась точкой, соответствующей максимальному идеалу $\mathfrak{m}$, который не принадлежит X_f. Лемма 3.1 дает нам точную последовательность

$$0 \to g^{\mathcal{A}}_{*-1}(Z)[-1] \to g^{\mathcal{A}}_*(X) \to g^{\mathcal{A}}_*(X_f) \to 0.$$

Комплекс $g^{\mathcal{A}}_{*-1}(Z)$ является резольвентой группы $K_*(\mathcal{A} \otimes_R R/fR)$. Отсюда $H^p(g^{\mathcal{A}}_{*-1}(Z)[-1]) = 0$ для $p \geqslant 2$ и $H^1(g^{\mathcal{A}}_{*-1}(Z)[-1]) = K_{*-1}(\mathcal{A} \otimes_R R/fR)$. Так как $dim(X_f) < d$, для всех локальных колец схемы X_f гипотеза Герстена верна. Значит, комплекс пучков $\underline{\underline{g}}^{\mathcal{A}}_*(X_f)$ является резольвентой пучка $\underline{\underline{K}}^{\mathcal{A}}_*$. Комплекс $\underline{\underline{g}}^{\mathcal{A}}_*(X_f)$ состоит из вялых пучков, а комплекс его глобальных сечений — это $g^{\mathcal{A}}_*(X_f)$, потому заключаем $H^p(g^{\mathcal{A}}_*(X_f)) = H^p(X_f, \underline{\underline{K}}^{\mathcal{A}}_*)$.

Из лемм 3.5 и 3.6 мы знаем, что когомологии пучка $\underline{\underline{K}}^{\mathcal{A}}_*$ на X_f таковы: $H^p(g^{\mathcal{A}}_*(X_f)) = 0$ для $p \geqslant 1$ и $H^0(g^{\mathcal{A}}_*(X_f)) = \underline{\underline{K}}_*(X_f)$. Рассматривая длинную точную последовательность когомологий, получаем, что $H^p(g^{\mathcal{A}}_*(X)) = 0$ для всех $p \geqslant 2$, а группы $H^0(g^{\mathcal{A}}_*(X))$ и $H^1(g^{\mathcal{A}}_*(X))$ связаны точной последовательностью

$$0 \to H^0(g^{\mathcal{A}}_*(X)) \to \underline{\underline{K}}^{\mathcal{A}}_*(X_f) \to K_{*-1}(\mathcal{A} \otimes_R R/fR) \to H^1(g^{\mathcal{A}}_*(X)) \to 0.$$

Равенства $H^0(g^{\mathcal{A}}_*(X)) = K_*(\mathcal{A})$, $H^1(g^{\mathcal{A}}_*(X)) = 0$ получаются сравнением этой точной последовательности с последовательностью 3.7. Это доказывает теорему.

Литература

[1] Colliot-Thélène J.-L., Ojanguren M. Espaces principaux homogénes localement triviaux // Inst. Hautes Études Sci.Publ.Math. 1992. № 75. P. 97–122.

[2] Grayson D. Higher algebraic K-theory. II (after D. Quillen), Algebraic K-Theore (Proc.Conf., Northwestern Univ., Evanston, IL, 1976) // Lecture Notes in Math. V. 551. Springer-verlag. № 176. P. 217–240.

[3] Grothendieck A., Artin M., Verdie J.-L. Theorie des topos et cohomologie etale des schemas. Berlin: Springer, 1972. (Lect. Notes Math.; V. 270).

[4] Panin I.A. The Equicharacteristic Case of the Gersten Conjecture. Теория чисел, алгебра и алгебраическая геометрия: сборник статей к 80-летию со дня рождения академика Игоря Ростиславовича Шафаревича // Тр. МИАН. М.: Наука, 2003. Т. 241. С. 169–178.

[5] Popesku D. General Néron Desingularization // Nagoya Math. J. 1985. V. 100. P. 97–126.

[6] Popesku D. General Néron Desingularization and Approximation // Nagoya Math. J. 1986. V. 104. P. 85–115.

[7] Popesku D. Letter to Editor; General Néron Desingularization and Approximation // Nagoya Math. J. 1990. V. 118. P. 45–53.

[8] Quillen D. Higher algebraic K-theory. I // Albebraic K-Theory. I: Higher K-Theories (Proc. Conf., Seattle Res. Center, Battelle Memorial Inst., 1972) // Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, Berlin, 1973. V. 341. P. 85–147.

[9] Swan R.G., Higher algebraic K-theory // Proceeding of Symposia in Pure Mathematics. 1995. V. 58.1. P. 247–292.

[10] Милн Дж. Этальные когомологии. М.: Мир, 1983. 392 с.

[11] Панин И.А., Суслин А.А. Об одной гипотезе Гротендика, касающейся алгебр Адзумая // Алгебра и анализ. 1997. № 9:4. С. 215–223.

References

[1] Colliot-Thélène J.-L., Ojanguren M. Espaces principaux homogénes localement triviaux // Inst. Hautes Études Sci.Publ.Math. 1992. № 75. P. 97–122.

[2] Grayson D. Higher algebraic K-theory. II (after D. Quillen), Algebraic K-Theore (Proc.Conf., Northwestern Univ., Evanston, IL, 1976) // Lecture Notes in Math. V. 551. Springer-verlag. № 176. P. 217–240.

[3] Grothendieck A., Artin M., Verdie J.-L. Theorie des topos et cohomologie etale des schemas. Berlin: Springer, 1972. (Lect. Notes Math.; V. 270).

[4] Panin I.A. The Equicharacteristic Case of the Gersten Conjecture, Theory of numbers, algebra and algebraic geometry. Collection of articles to the 80-th anniversary of the birth of Academician Igor Rostislavovich Shafarevich // Tr. MIAN. M.: Nauka, 2003. V. 241. P. 169–178.

[5] Popesku D. General Néron Desingularization // Nagoya Math. J. 1985. V. 100. P. 97–126.

[6] Popesku D. General Néron Desingularization and Approximation // Nagoya Math. J. 1986. V. 104. P. 85–115.

[7] Popesku D. Letter to Editor; General Néron Desingularization and Approximation // Nagoya Math. J. 1990. V. 118. P. 45–53.

[8] Quillen D. Higher algebraic K-theory. I // Albebraic K-Theory. I: Higher K-Theories (Proc. Conf., Seattle Res. Center, Battelle Memorial Inst., 1972) // Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, Berlin, 1973. V. 341. P. 85–147.

[9] Swan R.G., Higher algebraic K-theory // Proceeding of Symposia in Pure Mathematics. 1995. V. 58.1. P. 247–292.

[10] Milne J. Etale cohomology. M.: Mir, 1983. 392 p.

[11] Panin I.A., Suslin A.A. On one Grothendieck conjecture, concerning Adzumaya algebras // Algebra and analysis, № 9:4. 1997. P. 215–223

Поступила в редакцию $6/II/2014$;
в окончательном варианте — $6/II/2014$.

THE EXACTNESS OF THE GERSTEN COMPLEX FOR ADZUMAYA ALGEBRAS IN EQUICHARACTERISTIC CASE

© 2014 A.A. Mingazov[2]

One of the well-known problems of algebraic K-theory is the Gersten conjecture. In this work we prove a variant of Gersten conjecture for Adzumaya algebras in equicharacteristic case. Geometrical case of this proposition was proved in the article by I. Panin and A. Suslin.

Key words: K-theory, Gersten conjecture, equicharacteristic ring, Adzumaya algebras.

Paper received 6/*II*/2014.
Paper accepted 6/*II*/2014.

[2]Mingazov Al'bert Aidarovich (mingazov88@gmail.com), Laboratory of Algebra and Theory of Numbers, St. Petersburg Department of V.A. Steklov Institute of Mathematics of the Russian Academy of Sciences, St. Petersburg, 191023, Russian Federation.