УДК 517.928

РЕДУКЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РОБОТА С УПРУГИМИ СОЧЛЕНЕНИЯМИ[1]

© 2014 О.В. Видилина, Н.В. Воропаева[2]

Рассматривается модель n-звенного манипулятора с упругими сочленениями в условиях слабой диссипации. Выделяется класс сингулярно возмущенных дифференциальных систем, описывающих динамику робота. Для данного класса систем устанавливаются существование и единственность интегрального многообразия медленных движений, изучаются его свойства. Доказывается, что интегральное многообразие может быть построено с любой степенью точности в виде асимптотического разложения по степеням малого параметра. Система, описывающая движение на многообразии, может быть использована в качестве редуцированной модели исходной системы.

Ключевые слова: сингулярно возмущенные системы, интегральные многообразия, асимптотические методы, редукция.

Введение

Решение задач анализа и управления сложными робототехническими системами сопряжено с проблемами, обусловленными высокой размерностью моделей и наличием нескольких временных масштабов. В связи с этим актуальной становится задача редукции моделей, т. е. построения моделей более низкого порядка, адекватно отражающих поведение исходной системы.

Одним из подходов, позволяющих производить редукцию сложных разнотемповых динамических систем, является метод асимптотической декомпозиции [1–3], базирующийся на аппарате теории интегральных многообразий и сочетающий в себе элементы геометрических и асимптотических методов анализа.

В настоящей работе рассматривается модель n-звенного робота-манипулятора с упругими сочленениями при наличии слабой диссипации. Для описания динамики манипулятора в рассмотрение вводится класс сингулярно возмущенных дифференциальных систем, содержащих малый параметр ε при старшей производной. Традиционно в качестве упрощенной модели исходной системы используется порождающая система, получаемая из исходной при $\varepsilon = 0$. Ответ на вопрос о допустимости использования порождающей системы в качестве "нулевого приближения" дает известная теорема А.Н. Тихонова, основное предположение которой

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках базовой части государственного задания и РФФИ (грант 13-01-97002-р_поволжье_а).

[2]Видилина Ольга Викторовна (vidilina_olga@mail.ru), Воропаева Наталия Владимировна (voropaevan61@mail.ru), кафедра дифференциальных уравнений и теории управления Самарского государственного университета, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

состоит в требовании асимптотической устойчивости так называемой присоединенной системы.

Для рассматриваемого класса систем условия теоремы А.Н. Тихонова не выполняются, поэтому целью настоящей работы стало изучение условий существования притягивающего интегрального многообразия медленных движений и возможности использования медленной подсистемы, описывающей движение на интегральном многообразии, в качестве упрощенной модели манипулятора. Подобные вопросы для других классов квазиосциллирующих систем рассматривались в работах [2; 3; 7].

1. Основные результаты

1.1. Описание модели

Рассмотрим динамическую модель n-звенного манипулятора с упругими сочленениями (рис. 1).

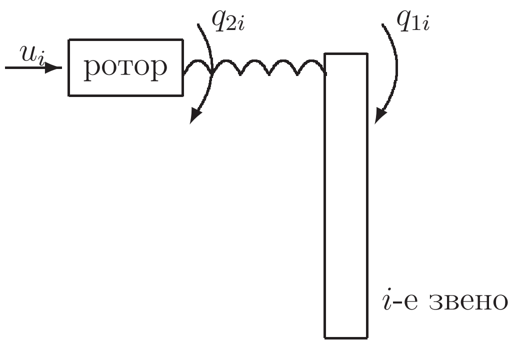

Рис. 1. Динамическая модель n-звенного манипулятора с упругими сочленениями

Каждое сочленение имеет привод. Податливость i-го кинематического сочленения моделируется пружиной кручения с линейной жесткостной характеристикой. Предполагается, что коэффициенты упругости пружин сочленений — это достаточно большие величины одного порядка. Уравнения, описывающие динамику робота, имеют вид [4–6]

$$\begin{aligned} D(q_1)\ddot{q}_1 + c(q_1, \dot{q}_1) + K(q_1 - q_2) + B(\dot{q}_1 - \dot{q}_2) = 0,& \\ J\ddot{q}_2 - K(q_1 - q_2) - B(\dot{q}_1 - \dot{q}_2) = u,& \end{aligned} \tag{1.1}$$

где координаты векторов $q_1 \in R^n$ и $q_2 \in R^n$ – углы, характеризующие положение звеньев манипулятора и роторов, соответственно, $D(q_1)$ – матрица инерции звеньев, J – диагональная матрица инерции роторов, вектор $c(q_1, \dot{q}_1)$ определяется кориолисовой, центробежной и гравитационной составляющими, $K = k\,diag(\widetilde{K}_1, \ldots, \widetilde{K}_n)$ – диагональная матрица жесткости связей. $B = diag(B_1, \ldots, B_n)$ – диагональная матрица демпфирования.

Введем в рассмотрение малый параметр $\mu = 1/k$. Заметим, что в работах [4; 5] вводится более жесткое ограничение на матрицу B. При построении комбинированного управления предполагается, что $B_j = \widetilde{B}_j/\mu$, или $B_j = \widetilde{B}_j/\sqrt{\mu}$, что означает наличие в системе достаточно большой диссипации. Это ограничение обеспечивает выполнение условий теоремы А.Н. Тихонова об асимптотической устойчивости присоединенной системы. В настоящей работе предполагается $B_j = O(1)$, и условия данной теоремы не выполнены.

Произведем замену переменных $q = q_1,\ z = k(q_1 - q_2)$. Получаем систему вида

$$\begin{aligned} \ddot q &= a_1(q,\dot q) + A_1(q)z + \mu A_3(q)\dot z, \\ \mu \ddot z &= a_2(q,\dot q) - A_2(q)z - \mu A_4(q)\dot z + M_2 u, \end{aligned} \qquad (1.2)$$

где

$$\begin{aligned} &a_1(q,\dot q) = a_2(q,\dot q) = -D^{-1}(q)c(q,\dot q), \quad A_1(q) = -D^{-1}(q)\widetilde K, \\ &A_2(q) = (D^{-1}(q) + J^{-1})\widetilde K, \quad A_3(q) = -D^{-1}(q)B, \\ &A_4(q) = (D^{-1}(q) + J^{-1})B, \quad M_2 = -J^{-1}. \end{aligned}$$

1.2. Приведение системы к специальному виду

Введем новые переменные: $x_1 = q,\ x_2 = \dot q,\ z_1 = z,\ z_2 = \dot z$ и перепишем систему (1.2) в виде

$$\begin{aligned} \dot x_1 &= x_2, \\ \dot x_2 &= a_1(x) + A_1(x_1)z_1 + \mu A_3(x_1)z_2, \\ \mu \dot z_1 &= \mu z_2, \\ \mu \dot z_2 &= a_2(x) - A_2(x_1)z_1 - \mu A_4(x_1)z_2 + M_2 u(t,x,\mu). \end{aligned} \qquad (1.3)$$

Представим функцию $u(t,x,\mu)$ в виде

$$u(t,x,\mu) = u_0(t,x) + \mu u_1(t,x) + \mu^2 u_2(t,x,\mu).$$

Положим в последнем уравнении системы (1.3) $\mu = 0$ и выразим z_1. Получаем

$$z_1 = h_0(t,x) = A_2^{-1}(x_1)[a_2(x) + M_2 u_0(t,x)].$$

Пусть

$$H_0(t,x) = \frac{\partial h_0}{\partial t} + \frac{\partial h_0}{\partial x_1}x_2 + \frac{\partial h_0}{\partial x_2}\big[a_1 + A_1 h_0\big],$$

$$h_1(t,x) = -A_2^{-1}\Big[\frac{\partial H_0}{\partial t} + \frac{\partial H_0}{\partial x_1}x_2 + \frac{\partial H_0}{\partial x_2}[a_1 + A_1 h_0] + A_4 H_0 - M_2 u_1\Big].$$

Произведем в системе (1.3) замену переменных

$$\begin{aligned} y_1 &= z_1 - h_0(t,x) - \mu h_1(t,x), \\ y_2 &= z_2 - H_0(t,x). \end{aligned} \qquad (1.4)$$

Получим систему вида

$$\begin{aligned} \dot x &= C_1 x + C_2(x_1,\mu)y + f_1(t,x,\mu), \\ \mu \dot y &= C_4(t,x,\mu)y + \mu^2 M u_2(t,x,\mu) + \mu^2 g_2(t,x,\mu), \end{aligned} \qquad (1.5)$$

где

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_2(x_1,\mu) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A_1 & \mu A_3 \end{pmatrix},$$

$$f_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ a_1 + A_1[h_0 + \mu h_1] + \mu A_3 H_0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 \\ M_2 \end{pmatrix},$$

$$C_4(t,x,\mu) = \begin{pmatrix} -\mu\Big[\frac{\partial h_0}{\partial x_2} + \mu\frac{\partial h_1}{\partial x_2}\Big]A_1 & \mu I - \mu^2\Big[\frac{\partial h_0}{\partial x_2} + \mu\frac{\partial h_1}{\partial x_2}\Big]A_3 \\ -A_2 - \mu\frac{\partial H_0}{\partial x_2}A_1 & -\mu A_4 - \mu^2\frac{\partial H_0}{\partial x_2}A_3 \end{pmatrix},$$

$$g_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\partial h_0}{\partial x_2}\Big[A_1 h_1 + A_3 H_0\Big] - \Big[\frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{\partial h_1}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial h_1}{\partial x_2}(a_1 + A_1[h_0 + \mu h_1] + \mu A_3 H_0)\Big] - \\ -\frac{\partial H_0}{\partial x_2}\Big[A_1 h_1 + A_3 H_0\Big] \end{pmatrix}.$$

Представим матрицу $C_4(t,x,\mu)$ в виде

$$C_4(t,x,\mu) = A(x,\mu) + \mu C(t,x,\mu),$$

где

$$A(x,\mu) = \begin{pmatrix} 0 & \mu I \\ -A_2(x_1) & -\mu A_4(x_1) \end{pmatrix},$$

$$C(t,x,\mu) = \begin{pmatrix} -\Big[\frac{\partial h_0}{\partial x_2} + \mu \frac{\partial h_1}{\partial x_2}\Big] A_1 & -\mu\Big[\frac{\partial h_0}{\partial x_2} + \mu \frac{\partial h_1}{\partial x_2}\Big] A_3 \\ -\frac{\partial H_0}{\partial x_2} A_1 & -\mu \frac{\partial H_0}{\partial x_2} A_3 \end{pmatrix}.$$

Введем в рассмотрение матрицу

$$Q(x_1,\mu) = A_2(x_1) - \frac{\mu}{4} A_4^2(x_1).$$

Матрицы $A_2(x_1)$ и $A_4(x_1)-$ симметрические и положительно определенные. Предположим, что существует такое $\mu_0 > 0$, что при $\mu \in (0,\mu_0]$ матрица $Q(x_1,\mu)$ будет тоже симметрической и положительно определенной. Тогда существует симметрическая положительно определенная матрица $S(x_1,\mu)$ такая, что $S^2(x_1,\mu) = Q(x_1,\mu)$, а значит, $A_2(x_1) = S^2(x_1,\mu) + \frac{\mu}{4} A_4^2(x_1)$. Рассмотрим матрицу

$$\frac{1}{\mu} A(x,\mu) = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -\frac{1}{\mu} S^2 - \frac{1}{4} A_4^2 & -A_4 \end{pmatrix}.$$

Произведем невырожденное линейное преобразование $y = P(x_1,\varepsilon) r$, где $\varepsilon = \sqrt{\mu}$,

$$P(x_1,\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -\frac{S}{\varepsilon} & -\frac{A_4}{2} \end{pmatrix}.$$

В новых переменных система (1.5) примет вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= C_1 x + C_2(x_1) P(x_1,\varepsilon) r + f_1(t,x,\mu), \\ \varepsilon \dot{r} &= \varepsilon P^{-1}\Big(\frac{1}{\mu} C_4 P r - \dot{P} r + \mu g_2(t,x,\mu) + \mu M u_2(t,x,\mu)\Big), \end{aligned} \tag{1.6}$$

где $\dot{P} = \frac{\partial P}{\partial x_1} x_2$.

Второе уравнение системы (1.6) можно переписать следующим образом:

$$\varepsilon \dot{r} = G(t,x,\varepsilon) r + \varepsilon^3 P^{-1} g_2(t,x,\mu) + \varepsilon^3 P^{-1} M u_2(t,x,\mu),$$

где

$$G(t,x,\varepsilon) = G_1(x) + \varepsilon K_1(x_1) + \varepsilon K_2(t,x,\varepsilon), \qquad G_1 + \varepsilon K_1 = P^{-1} \frac{A}{\varepsilon} P,$$

$$K_2 = -P^{-1}\dot{P} + P^{-1}CP,$$

$$G_1 = \begin{pmatrix} 0 & S \\ -S & 0 \end{pmatrix}, \quad K_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}S^{-1}A_4S & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}A_4 \end{pmatrix}, \quad K_2 = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} K_{11} &= -S^{-1}\frac{\partial S}{\partial x_1}x_2 - \frac{\varepsilon^2}{2}S^{-1}A_4\left[\frac{\partial h_0}{\partial x_2} + \mu\frac{\partial h_1}{\partial x_2}\right]A_3S - \varepsilon^2 S^{-1}\frac{\partial H_0}{\partial x_2}A_3S, \\ K_{12} &= -\frac{\varepsilon}{2}S^{-1}\frac{\partial A_4}{\partial x_1}x_2 + \frac{\varepsilon}{2}S^{-1}A_4\left[\frac{\partial h_0}{\partial x_2} + \mu\frac{\partial h_1}{\partial x_2}\right]A_1 + \varepsilon S^{-1}\frac{\partial H_0}{\partial x_2}A_1 - \\ &- \frac{\varepsilon^3}{4}S^{-1}A_4\left[\frac{\partial h_0}{\partial x_2} + \mu\frac{\partial h_1}{\partial x_2}\right]A_3A_4 - \frac{\varepsilon^3}{2}S^{-1}\frac{\partial H_0}{\partial x_2}A_3A_4, \\ K_{21} &= \varepsilon\left[\frac{\partial h_0}{\partial x_2} + \mu\frac{\partial h_1}{\partial x_2}\right]A_3S, \\ K_{22} &= -\left[\frac{\partial h_0}{\partial x_2} + \mu\frac{\partial h_1}{\partial x_2}\right]A_1 + \frac{\varepsilon}{2}\left[\frac{\partial h_0}{\partial x_2} + \mu\frac{\partial h_1}{\partial x_2}\right]A_3A_4. \end{aligned}$$

Пусть $x = \varphi(t,\varepsilon)$ – заданная вектор-функция, определенная и непрерывная при $t \in (-\infty, \infty)$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 = \sqrt{\mu_0}$. Рассмотрим линейное однородное уравнение

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{\varepsilon}G(t, \varphi(t), \varepsilon)v. \tag{1.7}$$

Для любого решения этого уравнения при $t \geqslant s$ справедлива следующая оценка:

$$\frac{\|v(t,\varepsilon)\|}{\|v(s,\varepsilon)\|} \leqslant e^{\int\limits_s^t \rho(\tau)d\tau}, \tag{1.8}$$

где $\rho(\tau)$ – суммируемая функция, удовлетворяющая условию

$$\rho(\tau) \geqslant \Lambda\{\frac{1}{2\varepsilon}\Big(G + G^T\Big)\},$$

где $\Lambda\{Z\}$ – наибольшее собственное значение матрицы Z.

В рассматриваемом случае $G_1^T = -G_1$, $K_1^T = K_1$, следовательно,

$$\frac{1}{2\varepsilon}(G + G^T) = K_1 + \frac{1}{2}\Big(K_2 + K_2^T\Big).$$

Потребуем, чтобы собственные значения матрицы $K_1 + \frac{1}{2}\Big(K_2 + K_2^T\Big)$ удовлетворяли условию $\lambda_i(t,x,\varepsilon) < -\beta$. В качестве $\rho(\tau)$ в неравенстве (1.8) можно взять $-\beta$, тогда оно примет вид:

$$\frac{\|v(t,\varepsilon)\|}{\|v(s,\varepsilon)\|} \leqslant e^{-\beta(t-s)}, \qquad t \geqslant s.$$

Эта оценка является равномерной для всех решений уравнения (1.7). Следовательно, такая же оценка справедлива и для матрицы Коши этого уравнения, то есть для $t \geqslant s$ выполняется неравенство

$$\|W_\varphi(t,s,\varepsilon)\| \leqslant e^{-\beta(t-s)}. \tag{1.9}$$

Из ограниченности частных производных элементов матриц G_1, K_1, K_2 вытекает существование такого положительного числа L, что

$$\|G(t,x,\varepsilon) - G(t,\bar{x},\varepsilon)\| \leqslant L\|x - \bar{x}\|.$$

1.3. Основные предположения

Перепишем систему (1.6) в виде:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= C_1x + F(x,\varepsilon)r + f(t,x,\varepsilon),\\ \varepsilon\dot{r} &= G(t,x,\varepsilon)r + \varepsilon^3 g(t,x,\varepsilon).\end{aligned} \tag{1.10}$$

Здесь

$$F(x,\varepsilon) = C_2(x)P(x,\varepsilon), \quad f(t,x,\varepsilon) = f_1(t,x,\varepsilon^2),$$

$$G(t,x,\varepsilon) = G_1(x_1) + \varepsilon K_1(x_1) + \varepsilon K_2(t,x,\varepsilon),$$

$$g(t,x,\varepsilon) = P^{-1}(x_1,\varepsilon)[B_1u_2(t,x,\varepsilon^2) + g_2(t,x,\varepsilon^2)].$$

Очевидно, что существуют такие константы $K \geqslant 1$ и $\alpha \geqslant 0$, что

$$\|e^{C_1(t-s)}\| \leqslant Ke^{\alpha(s-t)} \tag{1.11}$$

при всех t и s $(-\infty < t \leqslant s < \infty)$.

Предположим, что векторные и матричные функции f, g, F определены и непрерывны в области

$$\Omega = \{(t,x,r,\varepsilon)| \quad t \in R, \ x \in R^n, \ \|r\| \leqslant \rho, \ \varepsilon \in (0,\varepsilon_0]\}$$

и удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned}\|f(t,x,\varepsilon)\| &\leqslant m_1,\\ \|g(t,x,\varepsilon)\| &\leqslant m_2,\\ \|F(x,\varepsilon)\| &\leqslant m,\\ \|f(t,x,\varepsilon) - f(t,\bar{x},\varepsilon)\| &\leqslant l_1\|x-\bar{x}\|,\\ \|g(t,x,\varepsilon) - g(t,\bar{x},\varepsilon)\| &\leqslant l_2\|x-\bar{x}\|,\\ \|F(x,\varepsilon) - F(\bar{x},\varepsilon)\| &\leqslant l\|x-\bar{x}\|,\\ \|G(t,x,\varepsilon) - G(t,\bar{x},\varepsilon)\| &\leqslant L\|x-\bar{x}\|.\end{aligned} \tag{1.12}$$

Будем изучать интегральные многообразия системы (1.10), описываемые уравнением

$$r = p(t,x,\varepsilon), \tag{1.13}$$

где функция $p(t,x,\varepsilon)$ непрерывна и удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned}\|p(t,x,\varepsilon)\| &\leqslant D,\\ \|p(t,x,\varepsilon) - p(t,\bar{x},\varepsilon)\| &\leqslant \Delta\|x-\bar{x}\|\end{aligned} \tag{1.14}$$

при $t \in R$, $x \in R^n$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$, Будем называть такие многообразия (D,Δ)-многообразиями. Движение по многообразию (1.13) описывается уравнением

$$\dot{x} = C_1x + F(x,\varepsilon)p(t,x,\varepsilon) + f(t,x,\varepsilon). \tag{1.15}$$

Можно доказать, что поверхность $r = p(t,x,\varepsilon)$ является (D,Δ)-многообразием системы (1.10) тогда и только тогда, когда $p(t,x,\varepsilon)$ является решением уравнения

$$p(\tau,x,\varepsilon) = \varepsilon^2 \int\limits_{-\infty}^{\tau} W_\varphi(\tau,t,\varepsilon)g(t,\Phi(t,\tau,x,\varepsilon|p),\varepsilon)dt, \tag{1.16}$$

где $\Phi(t,\tau,x,\varepsilon|p)=\varphi(\tau)$ – решение уравнения (1.15), удовлетворяющее начальному условию $\varphi(\tau)=x$.

Рассмотрим пространство ограниченных и непрерывных на Ω функций $p(t,x,\varepsilon)$, принимающих значения в R^n и удовлетворяющих условиям (1.14). Введем в этом пространстве метрику

$$\rho(p,\bar p)=\sup_{\Omega}\|p(t,x,\varepsilon)-\bar p(t,x,\varepsilon)\|.$$

Это пространство в дальнейшем будем обозначать через $C(D,\Delta)$. Можно показать, что это пространство является полным метрическим пространством.

1.4. Оценка разности решений

Для произвольных функций $p,\bar p\in C(D,\Delta)$ рассмотрим уравнение (1.15). Справедливо следующее утверждение

Лемма 1 . *Пусть $\alpha+K(m\Delta+lD+l_1)\leqslant\gamma$, где γ – некоторое положительное число. Тогда при $\tau\geqslant t$ справедливо неравенство*

$$\|\Phi(t,\tau,x,\varepsilon|p)-\Phi(t,\tau,\bar x,\varepsilon|\bar p)\|\leqslant[K\|x-\bar x\|+\frac{m}{\delta}\rho(p,\bar p)]e^{\gamma(\tau-t)}, \tag{1.17}$$

где $\delta=m\Delta+lD+l_1$.

Доказательство.

Пусть $\varphi(t)=\Phi(t,\tau,x,\varepsilon|p)$, $\bar\varphi(t)=\Phi(t,\tau,\bar x,\varepsilon|\bar p)$. Эти функции удовлетворяют интегральным уравнениям

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= e^{C_1(t-\tau)}x+\int_\tau^t e^{C_1(t-s)}\Big[F(\varphi(s),\varepsilon)p(s,\varphi(s),\varepsilon)+f(s,\varphi(s),\varepsilon)\Big]ds,\\
\bar\varphi(t) &= e^{C_1(t-\tau)}\bar x+\int_\tau^t e^{C_1(t-s)}\Big[F(\bar\varphi(s),\varepsilon)\bar p(s,\bar\varphi(s),\varepsilon)+f(s,\bar\varphi(s),\varepsilon)\Big]ds.
\end{aligned}$$

Из (1.15), используя условия (1.11),(1.12) и (1.14), получаем при $\tau\geqslant t$:

$$\|\varphi(t)-\bar\varphi(t)\|\leqslant\|e^{C_1(t-\tau)}\|\|x-\bar x\|+\int_\tau^t\|e^{C_1(t-s)}\|\Bigg(\|F(\varphi(s),\varepsilon)p(s,\varphi(s),\varepsilon),\varepsilon)+$$

$$+f(s,\varphi(s))-F(\bar\varphi(s),\varepsilon)\bar p(s,\bar\varphi(s),\varepsilon)-f(s,\bar\varphi(s))\|\Bigg)ds\leqslant$$

$$\leqslant\|e^{C_1(t-\tau)}\|\|x-\bar x\|+\int_\tau^t\|e^{C_1(t-s)}\|\Bigg(\|F(\varphi(s),\varepsilon)\|\|p(s,\varphi(s),\varepsilon)-p(s,\bar\varphi(s),\varepsilon)\|+$$

$$+\|F(\varphi(s),\varepsilon)\|\|p(s,\bar\varphi(s),\varepsilon)-\bar p(s,\bar\varphi(s),\varepsilon)\|+$$

$$+\|F(\varphi(s),\varepsilon)-F(\bar\varphi(s),\varepsilon)\|\|\bar p(s,\bar\varphi(s),\varepsilon)\|+$$

$$+\|f(s,\varphi(s))-f(s,\bar\varphi(s))\|\Bigg)ds\leqslant$$

$$\leqslant Ke^{\alpha(\tau-t)}\|x-\bar x\|+\int_\tau^t Ke^{\alpha(\tau-t)}\Bigg(\Big(m\Delta+lD+l_1\Big)\|\varphi(s)-\bar\varphi(s)\|+m\rho(p,\bar p)\Bigg)ds.$$

Если ввести в рассмотрение вспомогательную функцию

$$\psi(t) = \Big(\|\varphi(t) - \bar\varphi(t)\| + \frac{m\rho(p,\bar p)}{\delta}\Big)e^{-\alpha(\tau - t)},$$

рассматриваемое неравенство примет вид

$$\psi(t) \leqslant K\|x - \bar x\| + \frac{m\rho(p,\bar p)}{\delta} + \int\limits_t^\tau K\delta\psi(s)ds.$$

Из неравенства Гронуолла — Беллмана следует

$$\psi(t) \leqslant \Big(K\|x - \bar x\| + \frac{m\rho(p,\bar p)}{\delta}\Big)e^{K\delta(\tau - t)}.$$

Отсюда имеем

$$\|\varphi(t) - \bar\varphi(t)\| \leqslant \Big(K\|x - \bar x\| + \frac{m\rho(p,\bar p)}{\delta}\Big)e^{(\alpha + K\delta)(\tau - t)},$$

что и доказывает лемму.

1.5. Оценка разности матриц Коши

Оценим теперь разность матриц $W_\varphi(t,s,\varepsilon) - W_{\bar\varphi}(t,s,\varepsilon)$, где $\varphi(t) = \Phi(t,t_0,x,\varepsilon|p)$, $\bar\varphi(t) = \Phi(t,t_0,\bar x,\varepsilon|\bar p)$. Имеет место соотношение

$$W_\varphi(s_1,s_2,\varepsilon) - W_{\bar\varphi}(s_1,s_2,\varepsilon) =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{s_2}^{s_1} W_\varphi(s_1,s,\varepsilon)\Bigg(G(\varphi(s),s,\varepsilon) - G(\bar\varphi(s),s,\varepsilon)\Bigg)W_{\bar\varphi}(s,s_2,\varepsilon)ds.$$

Используя последнее из неравенств (1.12), получаем при $s_1 \geqslant s_2$

$$\|W_\varphi(s_1,s_2,\varepsilon) - W_{\bar\varphi}(s_1,s_2,\varepsilon)\| \leqslant \frac{1}{\varepsilon}L\ e^{-\beta(s_1 - s_2)}\int\limits_{s_2}^{s_1}\|\varphi(s) - \bar\varphi(s)\|ds.$$

Полагая $s_1 = t_0 = \tau$, $s_2 = t$, из неравенства (1.17) получаем

$$\|W_\varphi(\tau,t,\varepsilon) - W_{\bar\varphi}(\tau,t,\varepsilon)\| \leqslant \frac{L}{\varepsilon\gamma}\Bigg(K\|x - \bar x\| + \frac{m\rho(p,\bar p)}{\delta}\Bigg)e^{-(\beta-\gamma)(\tau - t)}.$$

1.6. Теорема существования интегрального многообразия

Введем в рассмотрение оператор $T_{\tau,x}(p)$, определяемый правой частью уравнения (1.16)

$$T_{\tau,x}(p) = \varepsilon^2\int\limits_{-\infty}^{\tau} W_\varphi(\tau,t,\varepsilon)g(t,\Phi(t,\tau,x,\varepsilon|p),\varepsilon)dt. \qquad (1.18)$$

Докажем некоторые вспомогательные неравенства.

Лемма 2 . *Пусть* $\gamma \leqslant \beta$, *тогда имеют место неравенства*

$$\|T_{\tau,x}(p)\| \leqslant \frac{\varepsilon^2 m_2}{\beta}, \qquad (1.19)$$

$$\|T_{\tau,x}(p) - T_{\tau,\bar x}(p)\| \leqslant \varepsilon^2 K\|x - \bar x\|\left[\frac{Lm_2}{\varepsilon\gamma} + l_2\right]\frac{1}{\beta - \gamma}, \qquad (1.20)$$

$$\|T_{\tau,x}(p) - T_{\tau,x}(\bar{p})\| \leqslant \varepsilon^2 \frac{m}{\delta}\rho(p,\bar{p})\left[\frac{Lm_2}{\varepsilon\gamma} + l_2\right]\frac{1}{\beta-\gamma}. \tag{1.21}$$

Доказательство.

Чтобы получить оценку (1.19), воспользуемся условиями (1.9) и (1.12). Получаем

$$\|T_{\tau,x}(p)\| \leqslant \varepsilon^2 \int\limits_{-\infty}^{\tau} \|W_\varphi(\tau,t,\varepsilon)\|\|g(t,\varphi(t),\varepsilon)\|dt \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon^2 \int\limits_{-\infty}^{\tau} e^{-\beta(\tau-t)} m_2 dt = \frac{\varepsilon^2 m_2}{\beta}.$$

Далее имеем

$$\|T_{\tau,x}(p) - T_{\tau,\bar{x}}(p)\| \leqslant \varepsilon^2 \int\limits_{-\infty}^{\tau} \Big(\|W_\varphi(\tau,t,\varepsilon) - W_{\bar{\varphi}}(\tau,t,\varepsilon)\|\|g(t,\varphi(t),\varepsilon)\|)dt+$$

$$+\varepsilon^2 \int\limits_{-\infty}^{\tau} \|W_{\bar{\varphi}}(\tau,t,\varepsilon)\|\|g\ \ (t,\varphi(t),\varepsilon) - g\ \ (t,\bar{\varphi}(t),\varepsilon)\|\Big)dt \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon^2 \int\limits_{-\infty}^{\tau} \left(\frac{L}{\varepsilon\gamma}\Big[K\|x-\bar{x}\| + \frac{m}{\delta}\rho(p,\bar{p})\Big]e^{-(\beta-\gamma)(\tau-t)}m_2)dt+\right.$$

$$\left.+\varepsilon^2 \int\limits_{-\infty}^{\tau} e^{-\beta(\tau-t)} l_2\Big[K\|x-\bar{x}\| + \frac{m}{\delta}\rho(p,\bar{p})\Big]e^{\gamma(\tau-t)}\right)dt \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon^2\left[K\|x-\bar{x}\| + \frac{m}{\delta}\rho(p,\bar{p})\right]\left(\frac{Lm_2}{\varepsilon\gamma} + l_2\right)\frac{1}{\beta-\gamma}.$$

Положив в последнем неравенстве поочередно $p = \bar{p}$ и $x = \bar{x}$, получим требуемые оценки. Лемма доказана.

Предположим теперь, что при определении класса функций $C(D,\Delta)$ величины D и Δ удалось выбрать таким образом, что выполняются неравенства

$$\frac{\varepsilon^2 m_2}{\beta} \leqslant D, \tag{1.22}$$

$$\varepsilon^2 K\left[\frac{Lm_2}{\varepsilon\gamma} + l_2\right]\frac{1}{\beta-\gamma} \leqslant \Delta, \tag{1.23}$$

$$\varepsilon^2 \frac{m}{\delta}\left[\frac{Lm_2}{\varepsilon\gamma} + l_2\right]\frac{1}{\beta-\gamma} \leqslant q \leqslant 1. \tag{1.24}$$

Очевидно, что эти неравенства выполняются, если $D = \varepsilon^2 D_1$, $\Delta = \varepsilon\Delta_1$.

Тогда из неравенств (1.19), (1.20) имеем

$$\begin{aligned} \|T_{\tau,x}(p)\| &\leqslant \varepsilon^2 D_1, \\ \|T_{\tau,x}(p) - T_{\tau,\bar{x}}(p)\| &\leqslant \varepsilon\Delta_1\|x-\bar{x}\|, \end{aligned}$$

то есть оператор $T_{\tau,x}(p)$ переводит $C(D,\Delta)$ в себя. Вычислив в (1.18) точную верхнюю грань по t и x, получим с учетом (1.24) существование такого числа q $(0 \leqslant q < 1)$, что

$$\rho\Big(T_{\tau,x}(p), T_{\tau,x}(\bar p)\Big) \leqslant q\ \ \rho(p,\bar p).$$

Следовательно, оператор T является сжимающим и в силу принципа сжимающих отображений имеет в $C(D,\Delta)$ единственную неподвижную точку.

Таким образом, система (1.10) имеет единственное интегральное многообразие вида: $r = p^*(t,x,\varepsilon)$, где функция $p^*(t,x,\varepsilon)$ удовлетворяет неравенствам

$$\begin{aligned}\|p^*(t,x,\varepsilon)\| &\leqslant \varepsilon^2 D_1,\\ \|p^*(t,x,\varepsilon) - p^*(t,\bar x,\varepsilon)\| &\leqslant \varepsilon\Delta_1\|x-\bar x\|.\end{aligned}$$

В силу соотношения $y = P(x_1,\varepsilon)r$ это означает существование интегрального многообразия

$$y_1 = h^*(t,x,\varepsilon), \quad y_2 = H^*(t,x,\varepsilon)$$

для системы (1.5), где $\|h^*(t,x,\varepsilon)\| \leqslant \varepsilon^2 D$, $\|H^*(t,x,\varepsilon)\| \leqslant \varepsilon a D$, a – некоторая константа. Тогда в силу (1.4) для исходной системы (1.3) получим интегральное многообразие медленных движений вида

$$\begin{aligned} z_1 &= h^*(t,x,\varepsilon) + h_0(t,x) + \mu h_1(t,x) = h(t,x,\mu),\\ z_2 &= H^*(t,x,\mu) + H_0(t,x) = H(t,x,\mu). \end{aligned} \tag{1.25}$$

Следуя схеме рассуждений, приведенной в [2], можно получить условия, при которых интегральное многообразие обладает свойством притяжения.

1.7. Асимптотическое разложение интегрального многообразия

Докажем, что функции h, H могут быть построены в виде асимптотических разложений по степеням малого параметра $\mu = \varepsilon^2$.

С этой целью в системе (1.3) произведем замену переменных

$$\begin{aligned} z_1 &= s_1 + h_0(t,x) + \mu h_1(t,x) + \ldots + \mu^{k-1}h_{k-1}(t,x) + \mu^k h_k(t,x),\\ z_2 &= s_2 + H_0(t,x) + \mu H_1(t,x) + \ldots + \mu^{k-1}H_{k-1}(t,x). \end{aligned}$$

Определим $h_i(t,x), H_i(t,x)$, приравнивая коэффициенты при соответствующих степенях μ в системе

$$\mu(\dot h_0 + \mu\dot h_1 + \ldots + \mu^k\dot h_k + \dot s_1) = \mu(H_0 + \mu H_1 + \ldots + \mu^{k-1}H_{k-1} + s_2),$$

$$\mu(\dot H_0 + \mu\dot H_1 + \ldots + \mu^{k-1}\dot H_{k-1} + \dot s_2) = a_2 - A_2(h_0 + \mu h_1 + \ldots + \mu^k h_k + s_1) -$$

$$-\mu A_4(H_0 + \mu H_1 + \ldots + \mu^{k-1}H_{k-1} + s_2) + B_2u_0 + \mu B_2 u_1 + \mu^2 B_2 u_2 + \ldots$$

Здесь

$$\begin{aligned} \dot h_i &= \frac{\partial h_i}{\partial t} + \frac{\partial h_i}{\partial x_1}x_2 + \frac{\partial h_i}{\partial x_2}\dot x_2, \quad \dot H_i = \frac{\partial H_i}{\partial t} + \frac{\partial H_i}{\partial x_1}x_2 + \frac{\partial H_i}{\partial x_2}\dot x_2,\\ \dot x_2 &= a_1 + A_1 s_1 + \mu A_3 s_2 + A_1(h_0 + \mu h_1 + \ldots + \mu^{k-1}h_{k-1} + \mu^k h_k) +\\ &+ \mu A_3(H_0 + \mu H_1 + \ldots + \mu^{k-1}H_{k-1}), \end{aligned}$$

Для h_0, H_0 имеем формулы

$$h_0 = A_2^{-1}[a_2 + B_2u_0], \quad H_0 = \frac{\partial h_0}{\partial t} + \frac{\partial h_0}{\partial x_1}x_2 + \frac{\partial h_0}{\partial x_2}[a_1 + A_1h_0].$$

Тогда для h_1, H_1 получаем:

$$\begin{aligned} h_1 &= A_2^{-1}\Big[-\frac{\partial H_0}{\partial t} - \frac{\partial H_0}{\partial x_1}x_2 - \frac{\partial H_0}{\partial x_2}[a_1 + A_1 h_0] - A_4 H_0 + B_2 u_1\Big], \\ H_1 &= \frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{\partial h_1}{\partial x_1}x_2 + \frac{\partial h_1}{\partial x_2}[a_1 + A_1 h_0] + \frac{\partial h_0}{\partial x_2}[A_1 h_1 + A_3 H_0]. \end{aligned}$$

Аналогично получаем формулы для h_k, H_k

$$\begin{aligned} h_k &= A_2^{-1}\Big[B_2 u_k - A_4 H_{k-1} - \frac{\partial H_{k-1}}{\partial t} - \frac{\partial H_{k-1}}{\partial x_1}x_2 - \frac{\partial H_{k-1}}{\partial x_2}[a_1 + A_1 h_0] - \\ &- \sum_{i=0}^{k-2}\frac{\partial H_i}{\partial x_2}[A_1 h_{k-i-1} + A_3 H_{k-i-2}]\Big], \\ H_k &= \frac{\partial h_k}{\partial t} + \frac{\partial h_k}{\partial x_1}x_2 + \frac{\partial h_k}{\partial x_2}[a_1 + A_1 h_0] + \sum_{i=0}^{k-1}\frac{\partial h_i}{\partial x_2}[A_1 h_{k-i} + A_3 H_{k-i-1}]. \end{aligned}$$

Для переменных x_1, x_2, s_1, s_2 получим уравнения

$$\begin{aligned} \dot{x} &= C_1 x + C_2(x_1,\mu)s + f(t,x,\mu), \\ \mu\dot{s} &= A(t,x,\mu)s + \mu^{k+1}\Big(g(t,x,\mu) + B_1 u_{k+1}(t,x,\mu)\Big), \end{aligned} \tag{1.26}$$

где

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_2(x_1,\mu) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A_1(x_1) & \mu A_3(x_1) \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ B_2 \end{pmatrix},$$

$$f = \begin{pmatrix} 0 \\ a_1 + A_1(h_0 + \mu h_1 + \ldots + \mu^k h_k) + \mu A_3(H_0 + \mu H_1 + \ldots + \mu^{k-1} H_{k-1}) \end{pmatrix},$$

$$A(t,x,\mu) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad A_{11} = -\mu\left[\frac{\partial h_0}{\partial x_2} + \mu\frac{\partial h_1}{\partial x_2} + \ldots + \mu^k\frac{\partial h_k}{\partial x_2}\right]A_1,$$

$$A_{12} = \mu I - \mu^2\left[\frac{\partial h_0}{\partial x_2} + \mu\frac{\partial h_1}{\partial x_2} + \ldots + \mu^k\frac{\partial h_k}{\partial x_2}\right]A_3,$$

$$A_{21} = -A_2 - \mu\left[\frac{\partial H_0}{\partial x_2} + \mu\frac{\partial H_1}{\partial x_2} + \ldots + \mu^{k-1}\frac{\partial H_{k-1}}{\partial x_2}\right]A_1,$$

$$A_{22} = -\mu A_4 - \mu^2\left[\frac{\partial H_0}{\partial x_2} + \mu\frac{\partial H_1}{\partial x_2} + \ldots + \mu^{k-1}\frac{\partial H_{k-1}}{\partial x_2}\right]A_3, \quad g(t,x) = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} &g_1 = \tfrac{\partial h_0}{\partial x_2}[A_1 h_k + A_3 H_{k-1}] + \tfrac{\partial h_1}{\partial x_2}[A_1(h_{k-1} + \mu h_k) + A_3(H_{k-2} + \mu H_{k-1})] + \ldots \\ &\ldots + \tfrac{\partial h_{k-1}}{\partial x_2}[A_1(h_1 + \ldots + \mu^{k-1} h_k) + A_3(H_0 + \ldots + \mu^{k-1} H_{k-1})] + \\ &+ \tfrac{\partial h_k}{\partial x_2} + \tfrac{\partial h_k}{\partial x_1}x_2 + \tfrac{\partial h_k}{\partial x_2}[a_1 + A_1(h_0 + \ldots + \mu^k h_k) + \mu A_3(H_0 + \ldots + \mu^{k-1} H_{k-1})], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &g_2 = \tfrac{\partial H_0}{\partial x_2}[A_1 h_k + A_3 H_{k-1}] + \tfrac{\partial H_1}{\partial x_2}[A_1(h_{k-1} + \mu h_k) + A_3(H_{k-2} + \mu H_{k-1})] + \ldots \\ &\ldots + \tfrac{\partial H_{k-1}}{\partial x_2}[A_1(h_1 + \ldots + \mu^{k-1} h_k) + A_3(H_0 + \ldots + \mu^{k-1} H_{k-1})]. \end{aligned}$$

Повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве существования интегрального многообразия медленных движений системы (1.6), можно доказать, что полученная система (1.26) имеет интегральное многообразие вида $s_1 = \widehat{h}(t,x,\varepsilon)$, $\quad s_2 = \widehat{H}(t,x,\varepsilon)$, для которого имеют место оценки

$$\|\widehat{h}(t,x,\varepsilon)\| \leqslant \varepsilon^{2k} D, \quad \|\widehat{H}(t,x,\varepsilon)\| \leqslant \varepsilon^{2k-1} bD,$$

где b – некоторая константа. Полученные неравенства и доказывают асимптотический характер разложения интегрального многообразия (1.25) системы (1.10).

Система, описывающая движение на интегральном многообразии медленных движений, имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{v_1} &= v_2, \\ \dot{v_2} &= a_1(v) + A_1(v_1)h(t,v,\mu) + \mu A_3(v_1)H(t,v,\mu). \end{aligned}$$

Эта система имеет вдвое меньшую размерность по сравнению с исходной системой (1.10), не содержит разнотемповых переменных, но тем не менее достаточно достоверно отражает поведение исходной системы в окрестности интегрального многообразия, что позволяет использовать ее в качестве редуцированной модели робота с упругими сочленениями.

В работах [8; 9] предлагаемый подход к построению редуцированной модели использовался для решения задач управления и оценивания для однозвенного манипулятора. Рассмотрим теперь задачу управления двухзвенным манипулятором с упругими сочленениями. Динамика манипулятора описывается системой (1.1), где

$$D(q_1) = \begin{pmatrix} \theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3\cos\varphi_2 & \theta_2 + \theta_3\cos\varphi_2 \\ \theta_2 + \theta_3\cos\varphi_2 & \theta_2 \end{pmatrix}, \quad q_1 = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix},$$

$$\theta_1 = m_1 l_{c_1}^2 + m_2 l_1^2 + I_1, \quad \theta_2 = m_2 l_{c_2}^2 + I_2, \quad \theta_3 = m_2 l_1 l_{c_2},$$

$$\theta_4 = m_1 l_{c_1}, \quad \theta_5 = m_2 l_1, \quad \theta_6 = m_2 l_{c_2},$$

$$c(q_1,\dot{q}_1) = \theta_3 \sin\varphi_2 \begin{pmatrix} -2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_2^2 \\ \dot{\varphi}_1^2 \end{pmatrix},$$

$$g(q_1) = \begin{pmatrix} (\theta_4+\theta_5)g\cos\varphi_1 + \theta_6 g\cos(\varphi_1+\varphi_2) \\ \theta_6 g\cos(\varphi_1+\varphi_2) \end{pmatrix}.$$

Пользуясь изложенным выше алгоритмом, построим интегральное многообразие медленных движений (1.25) и редуцированную систему (1.27) с точностью до членов второго порядка по ε. Подобно тому как это делается в [9], построим управляющее воздействие с целью обеспечения перехода звеньев манипулятора в вертикальное положение. На рис. 2 приведены графики изменения углов поворота звеньев манипулятора с использованием управляющего воздействия, сформированного на основании анализа редуцированной системы, для следующих значений параметров системы: $m_1 = 10$, $m_2 = 5$, $l_1 = 1$, $l_2 = 1$, $l_{c_1} = 0,5$, $l_{c_2} = 0,5$,

$J_1 = 1$, $J_2 = 1$, $\widetilde{K}_1 = 1$, $\varepsilon = 0.1$, $\widetilde{K}_2 = 1$.

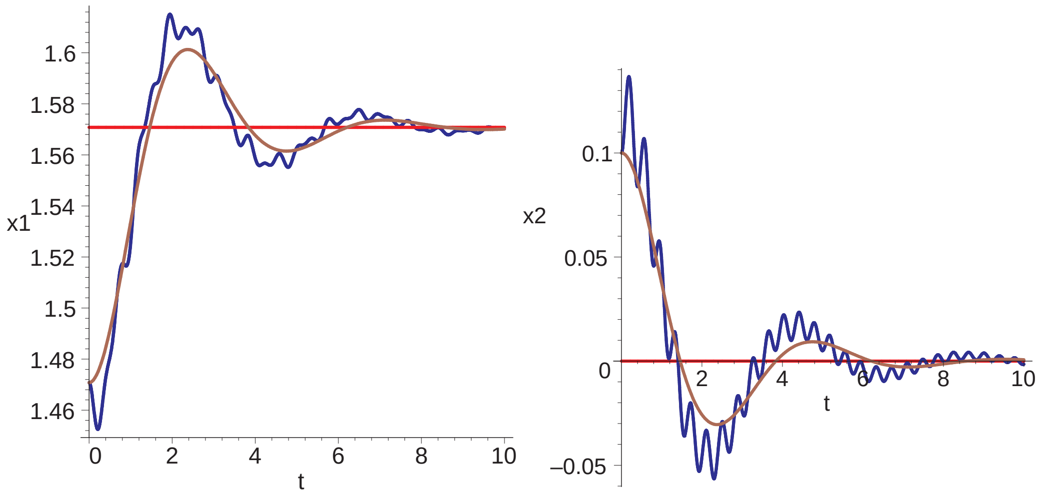

Рис. 2. Углы поворота звеньев манипулятора $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$

Видно, что траектории исходной системы, характеризующиеся наличием гаснущих высокочастотных колебаний, приближаются к траекториям редуцированной системы, которые в свою очередь, в соответствии с заданным законом, приближаются к желаемым стационарным режимам.

Литература

[1] Sobolev V.A. Integral manifolds and decomposition of singularly perturbed systems // Syst. & Control Lett. 1984. № 5. P. 169–279.

[2] Стрыгин В.В., Соболев В.А. Разделение движений методом интегральных многообразий. М.: Наука, 1988.

[3] Воропаева Н.В., Соболев В.А. Геометрическая декомпозиция сингулярно возмущенных систем. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009.

[4] Spong M.W. Modeling and control of elastic joint robots // Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control. 1987. № 109. P. 310–319.

[5] Spong M.W., Khorasani K., Kokotovic P.V. An integral manifold approach to feedback control of flexible joint robots // IEEE Journal of Robotics and Automation. 1987. V. 3. № 4. P. 291–301.

[6] Moberg S. On modeling and control of flexible manipulators. Linkoping: Linkoping University, 2007.

[7] Singular Perturbation and Hysteresis / M.P. Mortell [et al.]. Philadelphia: SIAM, 2005.

[8] Осинцев М.С., Соболев В.А. Понижение размерности задач оптимального оценивания и управления для систем твердых тел с малой диссипацией // Автоматика и телемеханика. 2013. № 8. С. 121–137.

[9] Воропаева Н.В. Декомпозиция разнотемповых динамических систем со слабой диссипацией // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2013. № 9/2(110). С. 5–10.

References

[1] Sobolev V.A. Integral manifolds and decomposition of singularly perturbed systems // Syst. & Control Lett. 1984. № 5. P. 169–279.

[2] Strygin V.V., Sobolev V.A. Separation of motions by integral manifolds method. M.: Nauka, 1988.

[3] Voropaeva N.V., Sobolev V.A. Geometrical decomposition of singularly perturbed systems. M.: FIZMATLIT, 2009.

[4] Spong M.W. Modeling and control of elastic joint robots // Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control. 1987. № 109. P. 310–319.

[5] Spong M.W., Khorasani K., Kokotovic P.V. An integral manifold approach to feedback control of flexible joint robots // IEEE Journal of Robotics and Automation. 1987. V.3. № 4. P. 291–301.

[6] Moberg S. Modeling and control of flexible manipulators. Linkoping: Linkoping University, 2007.

[7] Singular Perturbation and Hysteresis / M.P. Mortell [et al.]. Philadelphia: SIAM, 2005. 344 p.

[8] Osintsev M.S., Sobolev V.A. Dimensionality reduction in optimal control and estimation problems for systems of solid bodies with low disipation // Automation and remote control. 2013. №74(8). P. 1334-1347

[9] Voropaeva N.V. Decomposition of multirate dynamic systems with small dissipation // Vestnik SamGU. Estestvennonauchnaya seriya. 2013. № 9/2(110). P. 5–10.

Поступила в редакцию 17/*II*/2014;
в окончательном варианте — 17/*II*/2014.

REDUCTION OF MATHEMATICAL MODEL OF ROBOT WITH ELASTIC JOINTS

 O.V. Vidilina, N.V. Voropaeva[3]

A model of n — joint manipulator with elastic joints with small dissipation is studied. Class of singularly perturbed differential systems that describe the dynamics of robot is singled out. For a given class of systems the existence and uniqueness of integral manifoldness of slow movement is established, its features are studied. It is proved that integral manifold may be constructed with any degree of accuracy as asymptotic decomposition in powers of small parameter. System that is used to describe movement in manifolds may be used as a reduced model of initial system.

Key words: singularly perturbed systems, integral manifolds, asymptotic methods, reduction.

Paper received 17/*II*/2014.
Paper accepted 17/*II*/2014.

[3]Vidilina Olga Viktorovna (`vidilina_olga@mail.ru`), Voropaeva Nataliya Vladimirovna (`voropaevan61@mail.ru`), the Dept. of Differential Equations and Control Theory, Samara State University, Samara, 443011, Russian Federation.