МАТЕМАТИКА

УДК 517.95, 624.07

ЗАДАЧА О ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ СТЕРЖНЯ С ДИНАМИЧЕСКИМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

© 2014 А.Б. Бейлин[1], Л.С. Пулькина[2]

В статье рассматриваются одномерные продольные колебания твердого стержня, закрепленного на концах при помощи сосредоточенных масс и пружин. В качестве математической модели используется стержень Рэлея. Доказана однозначная разрешимость задачи.

Ключевые слова: стержень Рэлея, динамические граничные условия, обобщенное решение.

Введение

Колебательные процессы возникают в любой работающей механической системе. Они могут порождаться различными причинами, например, неуравновешенностью деталей вследствие их конструктивных особенностей или силами, возникающими при перераспределении нагрузок между различными элементами штатно работающей конструкции. Наличие в механизме источников колебательных процессов существенно затрудняет диагностику его состояния, а также может привести к нарушению режима его работы, а в некоторых случаях и к разрушению. Различные проблемы, связанные с нарушением точности и даже работоспособности механических систем в результате вибрации некоторых их элементов, приводят к необходимости теоретического изучения процессов колебания этих элементов. Описание распространения волн в относительно длинных и тонких твердых стержнях базируется на математической модели, в основе которой лежит волновое уравнение второго порядка. Такие задачи хорошо изучены и давно стали классикой [1]. Как показано Рэлеем [2, т. I, с. 273–274], эта модель не вполне соответствует исследованию колебаний толстого и короткого стержня, однако многие детали реальных механизмов можно интерпретировать именно как короткий и толстый стержень. Для более точного анализа продольных колебаний в этом случае следует учитывать деформации стержня и в поперечном направлении. Математическая модель продольных колебаний толстого короткого стержня, в которой учтены эффекты поперечного движения стержня, называется стержнем Рэлея.

[1]Бейлин Александр Борисович (abeilin@mail.ru), кафедра АСиИС Самарского государственного технического университета, 443100, Российская Федерация, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 133.

[2]Пулькина Людмила Степановна (louise@samdiff.ru), кафедра уравнений математической физики Самарского государственного университета, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

1. Постановка задачи

Рассмотрим продольные колебания толстого короткого стержня, которые возбуждаются распределенной силой $f(x,t)$. Концы стержня $x=0, x=l$ прикреплены к неподвижному основанию при помощи сосредоточенных масс M_1, M_2 и пружин, жесткости которых K_1 и K_2. Будем считать, что стержень представляет собой тело вращения относительно оси $0x$. Продольные смещения, подлежащие определению, обозначим $\tilde{u}(x,t)$. Введем еще некоторые обозначения: $A(x)$ — площадь поперечного сечения, $\rho(x)$ — массовая плотность стержня, $E(x)$ — модуль Юнга, $\nu(x)$ — коэффициент Пуассона, $I_p(x)$ — полярный момент инерции.

В монографии [3, с. 158–184] построен Лагранжиан модели стержня Рэлея, применение к которому вариационного принципа Гамильтона приводит после элементарных преобразований к уравнению

$$\sigma(x)\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(a(x)\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(b(x)\frac{\partial^3\tilde{u}}{\partial t^2\partial x}\right) = f(x,t) \tag{1.1}$$

и граничным условиям

$$\begin{aligned} &a(0)\tilde{u}_x(0,t) + b(0)\tilde{u}_{xtt}(0,t) - K_1\tilde{u}(0,t) - M_1\tilde{u}_{tt}(0,t) = 0,\\ &a(l)\tilde{u}_x(l,t) + b(l)\tilde{u}_{xtt}(l,t) + K_2\tilde{u}(l,t) + M_2\tilde{u}_{tt}(l,t) = 0, \end{aligned} \tag{1.2}$$

где обозначено

$$\sigma(x) = \rho(x)A(x), \quad a(x) = A(x)E(x), \quad b(x) = \rho(x)\nu^2(x)I_p(x).$$

Пусть начальное отклонение и начальная скорость колебания стержня известны:

$$\tilde{u}(x,0) = \varphi(x), \quad \tilde{u}_t(x,0) = \psi(x). \tag{1.3}$$

Тогда мы приходим к начально-краевой задаче с динамическими граничными условиями для определения продольных смещений стержня:

найти в $Q_T = (0,l)\times(0,T)$, где $T\in(0,\infty)$, решение уравнения (1.1), удовлетворяющее граничным условиям (1.2) и начальным данным (1.3)

В статье [4] рассмотрены некоторые частные случаи задачи (1.1)–(1.3) в предположении о гармонических колебаниях, что позволило искать решение в виде $\tilde{u}(x,t) = \Phi(x)e^{i\omega t}$, и приведены примеры, в которых коэффициенты уравнения имеют явный вид, в том числе постоянны. Основной же целью нашей статьи является обоснование разрешимости поставленной задачи в общем случае.

2. Разрешимость задачи

Прежде всего из технических соображений сведем начальные условия (1.3) к однородным, что не ограничивает общности, но упрощает многие преобразования. Для этого введем новую неизвестную функцию $u(x,t)$, положив $u(x,t) = \tilde{u}(x,t) - w(x,t)$, где $w(x,t) = \varphi(x) + t\psi(x)$, что приводит к задаче относительно нее:

найти в Q_T решение уравнения

$$Lu \equiv \sigma(x)u_{tt} - (a(x)u_x)_x - (b(x)u_{ttx})_x = F(x,t), \tag{2.1}$$

удовлетворяющее начальным данным

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \tag{2.2}$$

и граничным условиям

$$\begin{aligned} &a(0)u_x(0,t)+b(0)u_{xtt}(0,t)-K_1u(0,t)-M_1u_{tt}(0,t)=g_1(t),\\ &a(l)u_x(l,t)+b(l)u_{xtt}(l,t)+K_2u(l,t)+M_2u_{tt}(l,t)=g_2(t), \end{aligned} \tag{2.3}$$

где

$$\begin{aligned} &F(x,t)=f(x,t)+a(x)(\varphi''(x)+t\psi''(x))+a'(x)(\varphi'(x)+t\psi'(x)),\\ &g_1(x)=K_1(\varphi(0)+t\psi(0))-a(0)(\varphi'(0)+t\psi'(0))-b(0)\psi''(0),\\ &g_2(x)=-K_2(\varphi(l)+t\psi(l))-a(l)(\varphi'(l)+t\psi'(l))-b(l)\psi''(l). \end{aligned}$$

Обозначим

$$W(Q_T)=\{u:\ \ u\in W_2^1(Q_T),\ \ u_t\in W_2^1(Q_T),\ \ u_{xtt}\in L_2(Q_T),\ \ u\in W_2^2(\Gamma)\},$$

где $\Gamma=\Gamma_0\cup\Gamma_l$, Γ_0,Γ_l—боковые границы $Q_T:\ x=0$ и $x=l$ соответственно,

$$V(Q_T)=\{v:\ \ v\in W_2^1(Q_T),\ \ v_{xt}\in L_2(Q_T)\}.$$

Нормы в этих пространствах определим естественным образом

$$||u||_W^2=||u||^2_{W_2^1(Q_T)}+||u_t||^2_{W_2^1(Q_T)}+||u_{xtt}||^2_{L_2(Q_T)}+||u||^2_{W_2^2(\Gamma)},$$

$$||v||_V^2=||v||^2_{W_2^1(Q_T)}+||v_{xt}||^2_{L_2(Q_T)}.$$

Введем понятие обобщенного решения задачи (2.1)—(2.3). Следуя [5, с. 92, 210], из тождества $\int\limits_0^T\int\limits_0^l(Lu-F)vdxdt=0$ в предположении, что $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (2.1) и условиям (2.2), (2.3) в классическом смысле, а $v(x,t)$ — гладкая функция, получим в результате интегрирования по частям равенство

$$\begin{aligned} &\int\limits_0^T\int\limits_0^l\left(\sigma(x)u_{tt}v+a(x)u_xv_x+bu_{xtt}v_x\right)dxdt+\\ &+\int\limits_0^T v(0,t)[K_1u(0,t)+M_1u_{tt}(0,t)]dt+\int\limits_0^T v(l,t)[K_2u(l,t)+M_2u_{tt}(l,t)]dt=\\ &=\int\limits_0^T\int\limits_0^l Fvdxdt-\int\limits_0^T v(0,t)g_1(t)dt-\int\limits_0^T v(l,t)g_2(t)dt. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Заметим, что все интегралы, входящие в (2.4), существуют и для функций $u\in$ $\in W(Q_T,\ \ v\in V(Q_T)$, поэтому его можно использовать для определения обобщенного решения задачи (2.1)—(2.3).

Определение 1. Обобщенным решением задачи (2.1)–(2.3) будем называть функцию $u\in W(Q_T)$, удовлетворяющую начальным данным $u(x,0)=0,\ \ u_t(x,0)=$ $=0$ и тождеству (2.4) для любой функции $v\in V(Q_T)$.

Теорема 1. Если $F\in L_2(Q_T),\ \ F_t\in L_2(Q_T),\ \ a,b,\sigma\in C[0,l]\cap C^1(0,l),\ \ g_i\in$ $\in W_2^1(0,T)$, то существует единственное обобщенное решение задачи (2.1)–(2.3).

Доказательство. Доказательство теоремы проведем в несколько этапов. На первом докажем единственность обобщенного решения. Реализацию второго этапа начнем с построения последовательности приближенных решений. Затем получим априорную оценку решений, которая позволит выделить из построенной последовательности приближенных решений слабо сходящуюся в пространстве $W(Q_T)$ подпоследовательность. На заключительном этапе покажем, что предел выделенной подпоследовательности и есть искомое обобщенное решение.

Единственность. Предположим, что существует два различных обобщенных решения задачи (2.1)–(2.3), u_1 и u_2. Тогда их разность, $u=u_1-u_2$, удовлетворяет условиям $u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=0$ и тождеству

$$\begin{gathered}\int\limits_0^T\int\limits_0^l\left(\sigma(x)u_{tt}v+a(x)u_xv_x+bu_{xtt}v_x\right)dxdt+\\+\int\limits_0^T v(0,t)[K_1u(0,t)+M_1u_{tt}(0,t)]dt+\int\limits_0^T v(l,t)[K_2u(l,t)+M_2u_{tt}(l,t)]dt=0.\end{gathered}\tag{2.5}$$

Положим в (2.5) $v=u_t$ при $0\leqslant t\leqslant\tau$, $v=0$ при $\tau<t\leqslant T$, где $\tau\in[0,T]$ произвольно, и преобразуем его, интегрируя по частям. Получим равенство

$$\int\limits_0^l[\sigma u_t^2(x,\tau)+au_x^2(x,\tau)+bu_{xt}^2(x,\tau)]dx+$$

$$+K_1u^2(0,\tau)+K_2u^2(l,\tau)+M_1u_t^2(0,\tau)+M_2u_t^2(l,\tau)=0,$$

откуда следует, что $\forall\tau\in[0,T]\ u_t(x,\tau)=0,\ u_x(x,\tau)=0$, так как из физического смысла коэффициентов $K_i\geqslant0,\ M_i\geqslant0$. Из очевидного представления

$$u(x,\tau)=\int\limits_0^\tau u_t(x,t)dt$$

вытекает неравенство

$$u^2(x,\tau)\leqslant\tau\int\limits_0^\tau u_t^2(x,t)dt,$$

которое в свою очередь приводит к равенству $u(x,\tau)=0$. Так как $\tau\in[0,T]$ произвольно, то $u(x,t)=0$ всюду в Q_T, следовательно, $u_1=u_2$.

Существование. Пусть $w_k\in C^2[0,l]$, линейно независимы и образуют полную систему в $W_2^2(0,l)$. Будем искать приближенное решение задачи в виде

$$u^m(x,t)=\sum_{k=1}^m c_k(t)w_k(x)$$

из соотношений

$$\int\limits_0^l\left(\sigma u_{tt}^mw_j+au_x^mw_j'+bu_{xtt}^mw_j'\right)dx+[K_1u^m(0,t)+M_1u_{tt}^m(0,t)]w_j(0)+$$

$$+[K_2u^m(l,t)+M_2u_{tt}^m(l,t)]w_j(l)=\int\limits_0^l Fw_jdx-g_1(t)w_j(0)-g_2(t)w_j(l),\tag{2.6}$$

которые для каждого представляют собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно $c_k(t)$:

$$\sum_{k=1}^m[A_{kj}c_k''(t)+B_{kj}c_k(t)]=f_j(t),\tag{2.7}$$

коэффициенты которой выражаются формулами

$$A_{kj}=\int\limits_0^l(\sigma w_kw_j+bw_k'w_j')dx+M_1w_k(0)w_j(0)+M_2w_k(l)w_j(l);$$

$$B_{kj} = \int\limits_0^l a w_k' w_j' dx + K_1 w_k(0) w_j(0) + K_2 w_k(l) w_j(l);$$

$$f_j(t) = \int\limits_0^l F(x,t) w_j(x) dx - g_1(t) w_j(0) - g_2(t) w_j(l).$$

Добавив начальные условия

$$c_k(0) = 0, \quad c_k'(0) = 0, \tag{2.8}$$

получаем задачу Коши для системы (2.7).

Выясним, разрешима ли эта система относительно $c_k''(t)$. Рассмотрим матрицу $\mathcal{A} = (A_{kj})_{k,j=1}^m$ коэффициентов при старших производных и покажем, что она положительно определена. Введем квадратичную форму с матрицей $\mathcal{A}$

$$q = \sum_{k,j=1}^m A_{kj} \xi_k \xi_j,$$

где ξ_k, ξ_j—коэффициенты линейных комбинаций $\xi = \sum\limits_{i=1}^m \xi_i w_i(x)$. Преобразуем квадратичную форму, учитывая представление ее коэффициентов:

$$q = \sum_{k,j=1}^m \int\limits_0^l (\sigma w_k w_j \xi_k \xi_j + b w_k' w_j' \xi_k \xi_j) dx + M_1 w_k(0) w_j(0) \xi_k \xi_j + M_2 w_k(l) w_j(l) \xi_k \xi_j.$$

Изменив порядок суммирования и интегрирования, получим

$$q = \int\limits_0^l \left(\sigma |\xi|^2 + b |\xi_x|^2 \right) dx + M_1 |\xi(0)|^2 + M_2 |\xi(l)|^2.$$

Из физического смысла коэффициентов уравнения (2.1) следует, что $\sigma, b,\ M_1, M_2$ положительны. Заметим, что квадратичная форма q обращается в нуль только при $\xi = 0$, а тогда в силу линейной независимости $w_k(x)$ $\xi_k = 0,\ \forall k = 1, ..., m$. Следовательно, матрица $\mathcal{A}$ положительно определена, и в силу этого система (2.7) разрешима относительно старших производных. Так как из условий теоремы следует ограниченность ее коэффициентов и принадлежность правой части пространству $L_1(Q_T)$, то задача Коши (2.7)–(2.8) разрешима и $c_k''(t) \in L_1(Q_T)$.

Итак, последовательность приближенных решений $\{u^m(x,t)\}$ построена. Следующий шаг в доказательстве теоремы состоит в получении априорных оценок.

Первая априорная оценка.

Умножим (2.6) на $c_j'(t)$, просуммируем от $j = 1$ до $j = m$, а затем проинтегрируем полученное равенство от $t = 0$ до $t = \tau$, в результате чего получим:

$$\int\limits_0^\tau \int\limits_0^l (\sigma u_{tt}^m u_t^m + a u_x^m u_{xt}^m + b u_{xtt}^m u_{xt}^m)\, dx dt +$$

$$+ \int\limits_0^\tau u_t^m(0,t)[K_1 u^m(0,t) + M_1 u_{tt}^m(0,t)] dt + \int\limits_0^\tau u_t^m(l,t)[K_2 u^m(l,t) + M_2 u_{tt}^m(l,t)] dt =$$

$$= \int_0^\tau \int_0^l F u_t^m dxdt - \int_0^\tau g_1(t) u_t^m(0,t)dt - \int_0^\tau g_2(t) u_t^m(l,t)dt. \tag{2.9}$$

Интегрируя по частям, как и при доказательстве единственности, приходим к равенству

$$\int_0^l \left(\sigma(u_t^m(x,\tau))^2 + a(u_x^m(x,\tau))^2 + b(u_{xt}^m(x,\tau))^2\right) dx+$$
$$+K_1(u^m(0,\tau))^2 + K_2(u^m(l,\tau))^2 + M_1(u_t^m(0,\tau))^2 + M_2(u_t^m(l,\tau))^2 =$$
$$= 2\int_0^\tau \int_0^l F u_t^m dxdt - 2\int_0^\tau g_1(t) u_t^m(0,t)dt - 2\int_0^\tau g_2(t) u_t^m(l,t)dt. \tag{2.10}$$

Оценим правую часть (2.10), заметив, что левая часть этого равенства неотрицательна. Применив неравенство Коши, получим

$$\int_0^l \left(\sigma(u_t^m(x,\tau))^2 + a(u_x^m(x,\tau))^2 + b(u_{xt}^m(x,\tau))^2\right) dx+$$
$$+K_1(u^m(0,\tau))^2 + K_2(u^m(l,\tau))^2 + M_1(u_t^m(0,\tau))^2 + M_2(u_t^m(l,\tau))^2 \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^\tau \int_0^l (u_t^m)^2 dxdt + \int_0^\tau (u_t^m(0,t))^2 dt + \int_0^\tau (u_t^m(l,t))^2 dt+$$
$$+\int_0^\tau \int_0^l F^2 dxdt + \int_0^\tau g_1^2 dt + \int_0^\tau g_2^2 dt. \tag{2.11}$$

Рассмотрим последние два слагаемых правой части неравенства (2.11). Из представлений

$$u_t^m(0,t) = \int_x^0 u_{\xi t}^m d\xi + u_t^m(x,t), \;\; u_t^m(l,t) = \int_x^l u_{\xi t}^m d\xi + u_t^m(x,t)$$

вытекают неравенства

$$(u_t^m(0,t))^2 \leqslant 2l \int_0^l (u_{xt}^m)^2 dx + \frac{2}{l}\int_0^l (u_t^m)^2 dx,$$

$$(u_t^m(l,t))^2 \leqslant 2l \int_0^l (u_{xt}^m)^2 dx + \frac{2}{l}\int_0^l (u_t^m)^2 dx,$$

которые позволяют сделать оценку

$$\int_0^\tau (u_t^m(0,t))^2 dt \leqslant 2l \int_0^\tau \int_0^l (u_{xt}^m)^2 dxdt + \frac{2}{l}\int_0^\tau \int_0^l (u_t^m)^2 dxdt,$$

$$\int_0^\tau (u_t^m(l,t))^2 dt \leqslant 2l \int_0^\tau \int_0^l (u_{xt}^m)^2 dxdt + \frac{2}{l}\int_0^\tau \int_0^l (u_t^m)^2 dxdt.$$

Но тогда из (2.11) следует

$$\int\limits_0^l \left(\sigma(u_t^m(x,\tau))^2 + a(u_x^m(x,\tau))^2 + b(u_{xt}^m(x,\tau))^2\right) dx +$$
$$+K_1(u^m(0,\tau))^2 + K_2(u^m(l,\tau))^2 + M_1(u_t^m(0,\tau))^2 + M_2(u_t^m(l,\tau))^2 \leqslant$$
$$\leqslant M_0 \int\limits_0^\tau \int\limits_0^l [(u_t^m)^2 + (u_{xt}^m)^2] dxdt +$$
$$+ \int\limits_0^\tau \int\limits_0^l F^2 dxdt + \int\limits_0^\tau g_1^2 dt + \int\limits_0^\tau g_2^2 dt, \tag{2.12}$$

где $M_0 = \max\{4l, \frac{4+l}{l}\}$. Еще раз обратимся к физическому смыслу коэффициентов уравнения (2.1) и заметим, что $\sigma(x) \geqslant \sigma_0 > 0$, $a(x) \geqslant a_0 > 0$, $b(x) \geqslant b_0 > 0$. Выберем $m_0 = \min\{\sigma_0, a_0, b_0\}$ и обозначим $C_1 = M_0/m_0$. Заметим также, что в силу условий теоремы 1 нормы $||F||_{L_2(Q_T)}$, $||g_i||_{L_2(0,T)}$, $i = 1, 2$ конечны, поэтому

$$\frac{1}{m_0}\left(\int\limits_0^\tau \int\limits_0^l F^2 dxdt + \int\limits_0^\tau g_1^2 dt + \int\limits_0^\tau g_2^2 dt\right) \leqslant C_2,$$

и (2.12) можем теперь записать так:

$$\int\limits_0^l \left((u_t^m(x,\tau))^2 + (u_x^m(x,\tau))^2 + (u_{xt}^m(x,\tau))^2\right) dx +$$
$$+K_1(u^m(0,\tau))^2 + K_2(u^m(l,\tau))^2 + M_1(u_t^m(0,\tau))^2 + M_2(u_t^m(l,\tau))^2 \leqslant$$
$$\leqslant C_1 \int\limits_0^\tau \int\limits_0^l [(u_t^m)^2 + (u_{xt}^m)^2] dxdt + C_2. \tag{2.13}$$

В частности,

$$\int\limits_0^l \left((u_t^m(x,\tau))^2 + (u_{xt}^m(x,\tau))^2\right) dx \leqslant$$
$$\leqslant C_1 \int\limits_0^\tau \int\limits_0^l [(u_t^m)^2 + (u_{xt}^m)^2] dxdt + C_2.$$

Применим к последнему неравенству лемму Гронуолла. Тогда

$$\int\limits_0^l [(u_t^m(x,\tau))^2 + (u_{xt}^m(x,\tau))^2] dx \leqslant C_2 e^{C_1 \tau}.$$

Интегрируя полученное неравенство по τ от 0 до T, получим

$$\int\limits_0^T \int\limits_0^l [(u_t^m)^2 + (u_{xt}^m)^2] dxdt \leqslant \frac{C_2}{C_1}(e^{C_1 T} - 1).$$

Теперь из (2.13) нетрудно получить оценку

$$\int\limits_0^l (u_x^m(x,\tau))^2 dx \leqslant C_2 e^{C_1 T}.$$

Добавив еще одно почти очевидное неравенство

$$\int\limits_0^l (u^m(x,\tau))^2 dx \leqslant \tau \int\limits_0^\tau \int\limits_0^l (u_t^m)^2 dxdt$$

к полученным выше, приходим к неравенству

$$\int\limits_0^l \left((u^m(x,\tau))^2 + (u_t^m(x,\tau))^2 + (u_x^m(x,\tau))^2 + (u_{xt}^m(x,\tau))^2\right) dx \leqslant C_3,$$

где $C_3 = C_2 e^{C_1 T}(T+2)$, интегрируя которое получаем *первую априорную оценку*

$$||u^m||_{W_2^1(Q_T)} + ||u_{xt}^m||_{L_2(Q_T)} \leqslant P_1. \tag{2.14}$$

Кроме этого, из (2.13) мы получаем еще одно важное неравенство

$$\int\limits_0^T [K_1(u^m(0,t))^2 + K_2(u^m(l,t))^2 + M_1(u_t^m(0,t))^2 + M_2(u_t^m(l,t))^2]dt \leqslant R_1, \tag{2.15}$$

где $R_1 = C_2 e^{C_1 T}$.

Вторая априорная оценка.

Умножим (2.6) на $c_j''(t)$, просуммируем от $j=1$ до $j=m$, а затем проинтегрируем по t от 0 до τ :

$$\int\limits_0^\tau \int\limits_0^l [\sigma(u_{tt}^m)^2 + a u_x^m u_{xtt}^m + b(u_{xtt}^m)^2]dxdt + \int\limits_0^\tau K_1 u^m(0,t) u_{tt}^m(0,t)dt +$$

$$+ \int\limits_0^\tau K_2 u^m(l,t) u_{tt}^m(l,t)dt + \int\limits_0^\tau M_1(u_{tt}^m(0,t))^2 dt + \int\limits_0^\tau M_2(u_{tt}^m(l,t))^2 dt =$$

$$= \int\limits_0^\tau \int\limits_0^l F u_{tt}^m dxdt - \int\limits_0^\tau g_1(t) u_{tt}^m(0,t)dt - \int\limits_0^\tau g_2(t) u_{tt}^m(l,t)dt.$$

Преобразуем слагаемые этого равенства, содержащие произведения функций, интегрируя по частям. Получим

$$\int\limits_0^\tau \int\limits_0^l [\sigma(u_{tt}^m)^2 + b(u_{xtt}^m)^2]dxdt + M_1 \int\limits_0^\tau (u_{tt}^m(0,t))^2 dt + M_2 \int\limits_0^\tau (u_{tt}^m(l,t))^2 dt =$$

$$= \int\limits_0^\tau \int\limits_0^l a(u_{xt}^m)^2 dxdt + \int\limits_0^l a u_x^m u_{xt}^m(x,\tau)dx + \int\limits_0^\tau [K_1(u_t^m(0,t))^2 + K_2(u_{tt}^m(l,t))^2]dt +$$

$$+ \int\limits_0^\tau [g_1'(t) u_t^m(0,t) + g_2'(t) u_t^m(l,t)]dt - K_1 u^m(0,\tau) u_t^m(0,\tau) - K_2 u^m(l,\tau) u_t^m(l,\tau) -$$

$$-g_1(\tau)u_t^m(0,\tau) - g_2(\tau)u_t^m(l,\tau) + \int\limits_0^\tau\int\limits_0^l Fu_{tt}^m dxdt.$$

Оценим правую часть этого равенства, используя неравенства Коши и Коши с ε, заметив также, что в силу условий теоремы 1 существует число a_1 такое, что $\max\limits_{[0,l]} \leqslant a_1$. В результате приходим к неравенству

$$\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l [\sigma(u_{tt}^m)^2 + b(u_{xtt}^m)^2]dxdt + M_1\int\limits_0^\tau (u_{tt}^m(0,t))^2dt + M_2\int\limits_0^\tau (u_{tt}^m(l,t))^2dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2}\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l (u_{tt}^m)^2dxdt + \int\limits_0^\tau\int\limits_0^l a(u_{xt}^m)^2dxdt + \frac{a_1}{2}\int\limits_0^l [(u_x^m(x,\tau))^2 + (u_{xt}^m(x,\tau))^2]dx+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^\tau [(u_t^m(0,t))^2 + (u_t^m(l,t))^2]dt + \frac{K_1}{2}(u^m(0,\tau))^2 + \frac{K_2}{2}(u^m(l,\tau))^2+$$

$$+\frac{K_1+1}{2}(u_t^m(0,\tau))^2 + \frac{K_2+1}{2}(u_t^m(l,\tau))^2 + \frac{1}{2}[g_1^2(\tau) + g_2^2(\tau)]+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^\tau [g_1'^2 + g_2'^2]dt + \frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l F^2dxdt. \tag{2.16}$$

Выберем ε так, чтобы $\sigma_0 - \frac{\varepsilon}{2} > 0$, положив, например, $\varepsilon = \sigma_0$, и перенесем первое слагаемое правой части неравенства (2.16) в левую его часть. Тогда в силу условий теоремы 1 и первой априорной оценки получим *вторую априорную оценку*

$$||u_{tt}^m||^2_{L_2(Q_T)} + ||u_{xtt}^m||^2_{L_2(Q_T)} \leqslant P_2 \tag{2.17}$$

и неравенство

$$M_1\int\limits_0^\tau (u_{tt}^m(0,t))^2dt + M_2\int\limits_0^\tau (u_{tt}^m(l,t))^2dt \leqslant R_2. \tag{2.18}$$

Первая и вторая априорные оценки вместе с неравенствами (2.15) и (2.18) приводят к оценке в пространстве $W(Q_T):$

$$||u^m||_{W(Q)} \leqslant P. \tag{2.19}$$

Так как пространство $W(Q_T)$ гильбертово, то полученная оценка позволяет утверждать, что из построенной последовательности приближенных решений $\{u^m(x,t)\}$ можно выделить слабо сходящуюся в норме $W(Q_T)$ подпоследовательность, за которой сохраним прежнее обозначение.

На завершающем этапе доказательства покажем, что предел выделенной подпоследовательности и есть искомое обобщенное решение. Умножим (2.6) на $d_j \in C^2(0,T)$, просуммируем от $j=1$ до $j=m$, а затем проинтегрируем по t от 0 до T. Получим равенство

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^l [\sigma u_{tt}^m\eta + au_x^m\eta_x + bu_{xtt}^m\eta_x]dxdt + \int\limits_0^T \eta(0,t)[K_1u^m(0,t) + M_1u_{tt}^m(0,t)]dt+$$

$$+\int\limits_0^T \eta(l,t)[K_2 u^m(l,t) + M_2 u^m_{tt}(l,t)]dt =$$

$$= \int\limits_0^T\int\limits_0^l F\eta dxdt - \int\limits_0^T \eta(0,t)g_1(t)dt - \int\limits_0^T \eta(l,t)g_2(t)dt, \qquad (2.20)$$

где $\eta(x,t) = \sum\limits_{j=1}^m d_j(t)w_j(x)$. Доказанные сходимости позволяют перейти к пределу при $m \to \infty$ в равенстве (2.20). Мы получим тождество вида (2.4), но пока справедливое только для функций $\eta(x,t) = \sum\limits_{j=1}^m d_j(t)w_j(x)$. Однако множество всех функций такого вида всюду плотно в пространстве $W(Q_T)$, поэтому мы вправе утверждать, что $u(x,t)$, слабый предел выделенной из $\{u^m(x,t)\}$ подпоследовательности, удовлетворяет тождеству (2.4) для любой $v \in V(Q_T)$, т. е. является искомым обобщенным решением задачи (2.1)–(2.3).

Теорема 1 доказана.

С помощью теоремы 1 уже нетрудно доказать разрешимость поставленной задачи (1.1)–(1.3).

Определение 2. Обобщенным решением задачи (1.1)–(1.3) будем называть функцию $\tilde{u} \in W(Q_T)$, удовлетворяющую начальным данным $\tilde{u}(x,0) = \varphi(x)$, $\tilde{u}_t(x,0) = \psi(x)$ и для любой функции $v \in V(Q_T)$ тождеству

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^l (\sigma(x)\tilde{u}_{tt}v + a(x)\tilde{u}_x v_x + b\tilde{u}_{xtt}v_x)\,dxdt + \int\limits_0^T v(0,t)[K_1\tilde{u}(0,t) + M_1\tilde{u}_{tt}]dt+$$

$$+\int\limits_0^T v(l,t)[K_2\tilde{u}(l,t) + M_2\tilde{u}_{tt}(l,t)]dt = \int\limits_0^T\int\limits_0^l fvdxdt. \qquad (2.21)$$

Теорема 2. Если $A(x)$, $\rho(x)$, $E(x)$, $\nu(x)$, $I_p(x)$ непрерывны в $[0,l]$, $f, f_t \in L_2(Q_T)$, $\varphi, \psi \in W_2^2(0,l)$, то существует единственное решение $\tilde{u} \in W(Q_T)$ задачи (1.1)—(1.3).

Доказательство. Подставим в тождество (2.4) $u(x,t) = \tilde{u}(x,t) - w(x,t)$. Несложные преобразования приведут нас к тождеству (2.21), а выполнение начальных условий (1.3) очевидно из представления $\tilde{u}(x,t) = u(x,t) + \varphi(x) + t\psi(x)$. Принадлежность $\tilde{u} \in W(Q_T)$ следует из условий, наложенных на функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$. Следовательно, $\tilde{u}$ является обобщенным решением задачи (1.1)–(1.3).

Разрешимость задачи (1.1)–(1.3) полностью доказана.

Литература

[1] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 2004. 798 с.

[2] Strett J.W. Theory of sound. N.Y.: Dover, 1945.

[3] Rao J.S. Advanced Theory of Vibration. N.Y.: Wiley, 1992.

[4] Федотов И.А., Полянин А.Д., Шаталов М.Ю. Теория свободных и вынужденных колебаний твердого стержня, основанная на модели Рэлея // ДАН. 2007. Т. 417. № 1.

[5] Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.

References

[1] Tikhonov A.N., Samarsky A.A. Equations of mathematical physics. M., 2004.

[2] Strett J.W. Theory of sound. New York: Dover, 1945.

[3] Rao J.S. Advanced Theory of Vibration. N.Y.: Wiley, 1992.

[4] Fedotov I.A.,Polyanin A.D., Shatalov M.Yu. Theory of free and forced vibration of solid rod based on Rayleigh model // DAN. 2007. V. 417. № 1. P. 56–61.

[5] Ladyzhenskaya O.A. Boundary value problems of mathematical physics. M., 1973.

Поступила в редакцию 5/*XII*/2013;
в окончательном варианте — 5/*XII*/2013.

TASK ON LONGITUDINAL VIBRATIONS OF A ROD WITH DYNAMIC BOUNDARY CONDITIONS

 A.B. Beylin[3] L.S. Pulkina[4]

In this paper, one-dimensional longitudinal vibration of a solid rod fixed at the ends by means of local masses and springs is studied. As a mathematical model we use Rayleigh rod. The existence and uniqueness of a generalized solution are proved.

Key words: Rayleigh rod, dynamic boundary conditions, generalized solution.

Paper received 5/*XII*/2013.
Paper accepted 5/*XII*/2013.

[3]Beylin Alexander Borisovich (`abeilin@mail.ru`), the Dept. of Automatized machine and tool systems, Samara State Technical University, Samara, 443100, Russian Federation.

[4]Pulkina Lyudmila Stepanovna (`louise@samdiff.ru`), the Dept. of Equations of Mathematical Physics, Samara State University, Samara, 443011, Russian Federation.