

**ОСЦИЛЛЯТОРЫ ВАН ДЕР ПОЛЯ И РЭЛЕЯ
В ДИСКРЕТНОМ ВРЕМЕНИ**© 2014 В.В. Зайцев, С.В. Линдт, А.Н. Шилин¹

Предложены новые дискретные отображения классических автоколебательных систем — осцилляторов Ван дер Поля и Рэля. Отображения с сохраненными временными характеристиками отклика линейной системы на внешнее воздействие получены на основе сочетания методов параметрического синтеза и инвариантности импульсных характеристик динамических систем. Приведены примеры генерации регулярных и хаотических автоколебаний в дискретном времени. Для анализа автоколебаний в полученных дискретных системах использован метод медленно меняющихся амплитуд. Рассмотрен эффект подмены частот в спектре автоколебаний с использованием улучшенного первого приближения.

Ключевые слова: нелинейная динамика, дискретное время, автоколебательная система, дискретное отображение, высокочастотные осцилляторы, метод инвариантности импульсных характеристик, эффект подмены частот, динамический хаос.

Введение

Автоколебательные системы, функционирующие в дискретном времени (ДВАКС), интересны, по крайней мере, по двум причинам. Во-первых, они могут служить дискретными моделями реально существующих объектов (физических, химических, биологических и т. д.) и использоваться при решении задач имитационного моделирования. Во-вторых, уравнения движения ДВАКС, имеющие форму нелинейных разностных уравнений, представляют собой рекурсивные алгоритмы нелинейной фильтрации дискретных сигналов.

ДВАКС в большинстве случаев возникают в результате дискретизации времени в математических моделях аналоговых автоколебательных систем. При этом конкретная форма процесса дискретизации существенным образом влияет на характеристики дискретной системы (ДВ-системы), порождаемой аналоговым прототипом. Отметим, что для обозначения уравнений движения систем в дискретном времени часто используется также термин "дискретные отображения".

¹Зайцев Валерий Васильевич (zaitsev@samsu.ru), Линдт Светлана Владимировна (svvetlana_1@mail.ru), Шилин Александр Николаевич (shilax@yandex.ru.), кафедра радиофизики Самарского государственного университета, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

Известен ряд способов построения дискретных отображений. В качественной теории динамических систем — это сечения Пуанкаре [1]. Для гамильтоновых систем с помощью введения в гамильтониан нелинейных дельта-воздействий строятся универсальное и стандартное отображения [2]. Рассматривается также и самый прямой способ дискретизации времени — конечно-разностная аппроксимация производных в дифференциальном уравнении движения системы. Этот подход широко распространен в численном моделировании, но имеет ограниченное применение в теории дискретных сигналов и систем [3].

В теории и практике синтеза линейных дискретных фильтров находит применение метод инвариантности импульсных характеристик (МИИХ). Он привлекателен с физической точки зрения, т. к. сохраняет временные характеристики отклика линейной системы на внешнее воздействие. В работе [4] метод использован для дискретизации времени в уравнении движения осциллятора Ван дер Поля.

В настоящем сообщении МИИХ дополнен представлениями о медленности переходных процессов в автоколебательных системах томсоновского типа и получены новые варианты дискретных отображений осцилляторов Ван дер Поля и Рэля — базовых моделей теории нелинейных колебаний [5].

1. Дискретизация времени в уравнениях движения томсоновских осцилляторов

Уравнения движения осцилляторов Ван дер Поля и Рэля запишем с выделением линейного диссипативного слагаемого:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = -\frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \frac{\omega_0}{Q} pF\left(x, \frac{dx}{dt}\right), \quad (1)$$

где ω_0 и Q — собственная частота и добротность резонансного контура, p — коэффициент превышения ($p > 1$) порога генерации ($p = 1$). Функции активных нелинейностей в (1) выражаются через неполный кубический полином $g(x) = x - x^3/3$ следующим образом:

$$F\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = \frac{d}{dt}g(x) \text{ для осциллятора Ван дер Поля и}$$

$$F\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = g\left(\frac{dx}{dt}\right) \text{ для осциллятора Рэля.}$$

Имея в виду дискретизацию времени с интервалом Δ , уравнение (1) запишем относительно безразмерной временной переменной $\tau = t\Delta^{-1}$:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + 4\pi^2\Omega_0^2 x = -2\pi\frac{\Omega_0}{Q} \frac{dx}{d\tau} + 2\pi\frac{\Omega_0}{Q} pF\left(x, \frac{dx}{d\tau}\right). \quad (2)$$

Здесь Ω_0 — собственная частота ω_0 , нормированная на частоту дискретизации $\omega_d = 2\pi\Delta^{-1}$. Кроме того, в уравнении движения осциллятора Рэля проведена дополнительная нормировка осциллирующей переменной $x(\tau)$ с тем, чтобы коэффициент при нелинейности был одинаков в обоих уравнениях.

В качестве линейной системы-прототипа рассмотрим диссипативный осциллятор, описываемый уравнением (2) с параметром $p = 0$:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + 4\pi^2\Omega_0^2x = -2\pi\frac{\Omega_0}{Q}\frac{dx}{d\tau}. \quad (3)$$

В рамках МИИХ аналоговому осциллятору (3) ставится в соответствие ДВ-осциллятор

$$x[n] - 2\alpha \cos(2\pi\Omega_0)x[n-1] + \alpha^2x[n-2] = 0, \quad (4)$$

где α — параметр линейной диссипации:

$$\alpha = \exp\left(-\pi\frac{\Omega_0}{Q}\right). \quad (5)$$

Детали перехода (3) \rightarrow (4) можно найти в [3] (см. также [6]).

В разностном уравнении движения (4), в отличие от дифференциального уравнения (3), диссипативная составляющая не выделена в явной форме. Такое выделение для высокочастотных осцилляторов проведем путем разложения экспоненты (5) в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned} x[n] - 2\alpha \cos(2\pi\Omega_0)x[n-1] + \alpha^2x[n-2] &\approx \\ &\approx x[n] - 2\alpha \cos(2\pi\Omega_0)x[n-1] + x[n-2] + \\ &+ 2\pi\frac{\Omega_0}{Q}(\cos(2\pi\Omega_0))x[n-1] - x[n-2]. \end{aligned} \quad (6)$$

Теперь ДВ-осциллятор (4) определяется уравнением движения

$$x[n] - 2\alpha \cos(2\pi\Omega_0)x[n-1] + x[n-2] = -2\pi\frac{\Omega_0}{Q}(\cos(2\pi\Omega_0))x[n-1] - x[n-2]. \quad (7)$$

Из сопоставления правых частей уравнений (3) и (6) следует вывод о том, что при переходе к дискретному времени в высокочастотных осцилляторах для диссипативных частей уравнений движения можно использовать замену

$$dx/d\tau \rightarrow y[n] = \cos(2\pi\Omega_0)x[n-1] - x[n-2].$$

Этот же вывод в дальнейшем распространим и на нелинейные части осцилляторов томсоновского типа.

Полагая, что анализируемые осцилляторы в непрерывном времени являются томсоновскими автоколебательными системами, при дискретизации времени к нелинейным слагаемым уравнений движения (2) применим преобразование (7), а линейную диссипацию учтем в форме (4). В результате получим следующие разностные уравнения движения в дискретном времени осцилляторов Ван дер Поля

$$\begin{aligned} z[n] &= \cos(2\pi\Omega_0)g(x[n-1]) - g(x[n-2]), \\ x[n] - 2\alpha \cos(2\pi\Omega_0)x[n-1] + \alpha^2x[n-2] &= \gamma z[n] \end{aligned} \quad (8)$$

и Рэлея

$$\begin{aligned} z[n] &= g(\cos(2\pi\Omega_0)x[n-1] - x[n-2]), \\ x[n] - 2\alpha \cos(2\pi\Omega_0)x[n-1] + \alpha^2x[n-2] &= \gamma z[n]. \end{aligned} \quad (9)$$

В записи уравнений (8) и (9) использован параметр глубины обратной связи $\gamma = (2\pi\Omega_0/Q)r$. В этих уравнениях два первых соотношения — нелинейные безынерционные преобразования осциллирующей переменной $x[n]$, формирующие сигнал обратной связи $z[n]$. При этом порядок активных ДВ-осцилляторов Ван дер Поля и Рэля совпадает с порядком диссипативного осциллятора (4).

2. Метод медленно меняющихся амплитуд в дискретном времени

При решении прикладных задач теории нелинейных колебаний в непрерывном времени весьма широкое применение находит приближенный метод медленно меняющихся амплитуд (метод ММА) [7]. Его основное содержание составляет замена уравнений движения для осциллирующих переменных укороченными уравнениями для их амплитуд и фаз (комплексных амплитуд). Порядок дифференциальных уравнений при такой замене понижается за счет последовательного использования условий медленности изменений амплитуд и пренебрежения высшими гармониками колебаний основной частоты.

Применим методологию ММА для анализа автоколебаний в осцилляторах (8) и (9). Автоколебания $x[n]$ представим в виде

$$x[n] = \frac{1}{2}A[n]Z^n + \frac{1}{2}A^*[n]Z^n + \text{к.с.}, \quad (10)$$

где $Z = \exp(j2\pi\Omega_0)$ — комплексная амплитуда — медленная функция дискретного времени, связанная с действительными амплитудой $a[n]$ и фазой $\varphi[n]$ соотношением $A[n] = a[n] \exp(j\varphi[n])$. С учетом того, что

$$Z^n - 2\cos(2\pi\Omega_0)Z^{n-1} + Z^{n-2} = 0,$$

а также используя условие медленности изменения комплексной амплитуды $A[n]$ в форме

$$A[n-1] - A[n-2] = A[n] - A[n-1],$$

для левых частей вторых уравнений в (8) и (9) получим приближенное равенство

$$\begin{aligned} x[n] - 2\alpha \cos(2\pi\Omega_0)x[n-1] + \alpha^2 x[n-2] = \\ = j \sin(2\pi\Omega_0) \{A[n] - A[n-1] + \pi \frac{\Omega_0}{Q} A[n-1]\} Z^{n-1} + \text{к.с.} \end{aligned} \quad (11)$$

В диссипативных и нелинейных членах условие медленности выражается в постоянстве комплексной амплитуды. В таком случае

$$y[n] = \frac{j}{2} \sin(2\pi\Omega_0) A[n-1] Z^{n-1} + \text{к.с.},$$

и первое из уравнений движения ДВ-осциллятора Рэля (9) принимает вид

$$z[n] = \frac{j}{2} \sin(2\pi\Omega_0) \left(1 - \frac{1}{4} \sin^2(2\pi\Omega_0) |A[n-1]|^2 \right) A[n-1] Z^{n-1} + \text{к.с.} + \text{в.г.} \quad (12)$$

Здесь высшие гармоники (в.г.) в рамках методики ММА в дальнейших преобразованиях не участвуют.

С помощью выражения (11) преобразуем левую часть второго уравнения движения (9), а с помощью (12) — правую часть. После очевидных сокращений получим укороченное уравнение осциллятора Рэлея

$$A[n] = A[n-1] - \pi \frac{\Omega_0}{Q} A[n-1] + \frac{\gamma}{2} \left(1 - \frac{1}{4} \sin^2(2\pi\Omega_0) |A[n-1]|^2 \right) A[n-1]. \quad (13)$$

Аналогичные преобразования приводят к укороченному уравнению осциллятора Ван дер Поля

$$A[n] = A[n-1] - \pi \frac{\Omega_0}{Q} A[n-1] + \frac{\gamma}{2} \left(1 - \frac{1}{4} |A[n-1]|^2 \right) A[n-1]. \quad (14)$$

Каждое из уравнений (13) и (14) для комплексной амплитуды эквивалентно двум уравнениям для действительных амплитуды $a[n]$ и фазы $\varphi[n]$. Одно из них

$$a[n] \sin(\varphi[n] - \varphi[n-1]) = 0.$$

Следовательно, поправка на частоту $\Delta\omega = (\varphi[n] - \varphi[n-1])/2\pi = 0$, т. е. автоколебания в ДВ-осцилляторах (8) и (9) являются изохронными, как и автоколебания в их аналоговых прототипах.

Уравнения для действительных амплитуд совпадают с (13) и (14) после замены в них $A[n]$ на $a[n]$. На рис. 1 в качестве примера непрерывными линиями показаны графики зависимостей $\pm a[n]$ в ДВ-осцилляторе Рэлея с параметрами $\Omega_0 = 0,21$, $Q = 20$ и $\gamma = 0,231$ ($p = 3,5$), построенные с помощью укороченного уравнения (13) для амплитуды начального возмущения $a[0] = 0,1$. Точечный график соответствует автоколебанию, генерируемому дискретным отображением (9). При $n \rightarrow \infty$ уравнения (13) и (14) имеют стационарные решения соответственно

$$a_s = \sqrt{1 - \frac{1}{p}} \quad \text{и} \quad a_s = \frac{2}{\sin(2\pi\Omega_0)} \sqrt{1 - \frac{1}{p}}. \quad (15)$$

Хорошее соответствие результатов метода ММА анализируемому колебанию сохраняется в диапазоне $1 < p \leq 10$, свидетельством чему является приведенный на рис. 2 график зависимости (15) для ДВ-осциллятора Ван дер Поля с параметрами $\Omega_0 = 0,21$, $Q = 20$ от величины параметра превышения порога генерации. Точками на рисунке показаны значения амплитуды, рассчитанные по реализациям автоколебаний методом аналитического сигнала. Отметим, что первое из уравнений (15) справедливо и для амплитуды установившихся автоколебаний в аналоговом осцилляторе Ван дер Поля.

3. Подмена частот в спектре автоколебаний

Известно [7], что решение, полученное методом ММА, эквивалентно первому приближению асимптотических методов теории нелинейных колебаний (усреднения, Крылова–Боголюбова–Митропольского [5], многих масштабов [8]). Но, в отличие от последних, метод ММА не предполагает построения высших приближений. Тем не менее в рамках метода ММА можно построить так называемое улучшенное первое приближение.

Для рассматриваемых здесь ДВ-осцилляторов процедура построения улучшенных приближений состоит в том, что в сигнале обратной связи (12) учитывается третья гармоника (в.г.), которая, воздействуя на линейный диссипативный осциллятор, вызывает соответствующий отклик выходного сигнала на частоте $3\omega_0$.

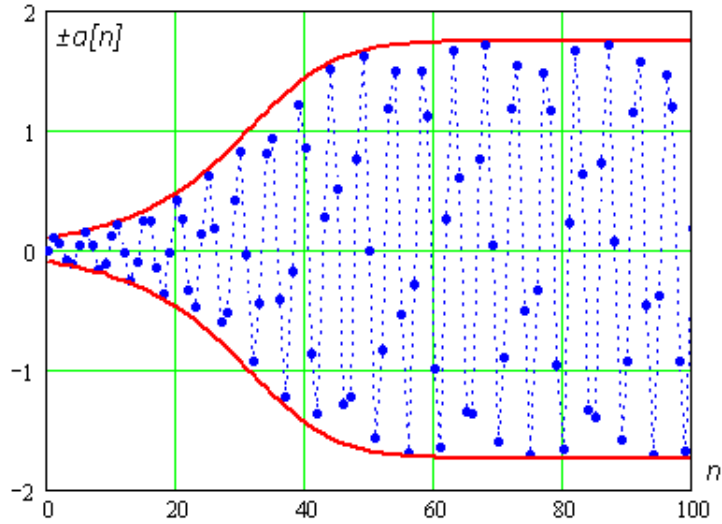


Рис. 1. Процесс установления дискретных автоколебаний в осцилляторе Рэля

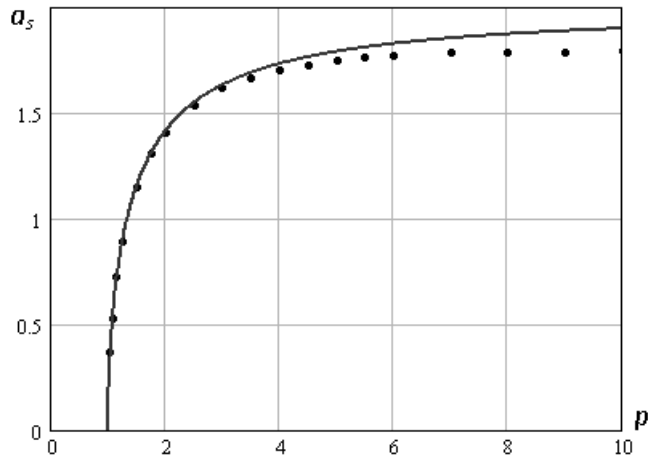


Рис. 2. Зависимость амплитуды автоколебаний от параметра превышения порога генерации

Полученное таким образом улучшенное первое приближение для установившихся автоколебаний в ДВ-осцилляторе Рэля имеет вид

$$x[n] = \frac{1}{2} a_s Z^n - j \frac{\gamma}{24} \sin^3(2\pi\Omega_0) H(3\Omega_0) a_s^3 Z^{3n} + \text{к.с.}, \quad (16)$$

где $H(3\Omega_0)$ – отсчет частотной характеристики осциллятора (4) на частоте $3\Omega_0$:

$$H(3\Omega_0) = \frac{Z^{-3}}{1 - 2\alpha \cos(2\pi\Omega_0) Z^{-3} + \alpha^2 Z^{-6}}.$$

Аналогичное приближение для осциллятора Ван дер Поля записывается как

$$x[n] = \frac{1}{2}a_s Z^n + \frac{\gamma}{24} (\cos(2\pi\Omega_0) - Z^{-3}) H(3\Omega_0) Z^{3n} + \text{к.с.} \quad (17)$$

Анализируя выражения (16) и (17), следует иметь в виду то, что частоты колебаний в дискретном времени принадлежат интервалу $0 \leq \Omega_0 < 0,5$. Поэтому третья гармоника в спектре колебаний $x[n]$ имеет частоту $3\Omega_0$ лишь, если $\Omega_0 \leq 1/6$. В противном случае ее частота $\Omega_3 = 1 - 3\Omega_0$, если $1/6 < \Omega_0 \leq 1/3$, или $\Omega_3 = 3\Omega_0 - 1$, если $1/3 < \Omega_0 \leq 1/2$ (эффект подмены частот).

На рис. 3, а в логарифмическом масштабе представлен амплитудный спектр $X(\Omega)$ автоколебаний ДВ-осциллятора Ван дер Поля с параметрами $\Omega_0 = 0,21$, $Q = 20$, $p = 2$ ($\gamma = 0,132$), вычисленный путем 1024-точечного дискретного преобразования Фурье (ДПФ) временного ряда (17). Подменная третья гармоника имеет частоту $\Omega_3 = 0,37$. Амплитудный спектр, показанный на рис. 3, б, получен ДПФ отрезка реализации автоколебаний, генерируемых дискретным отображением (8). В этом спектре, кроме линии подменной третьей гармоники, присутствует линия подменной пятой гармоники на частоте $\Omega_5 = 5\Omega_0 - 1 = 0,05$.

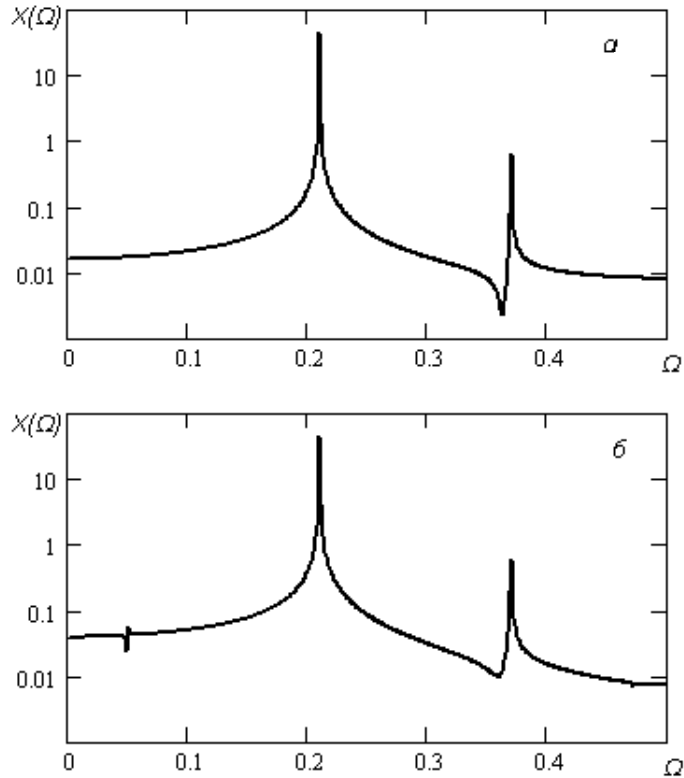


Рис. 3. Амплитудные спектры автоколебаний ДВ-осциллятора Ван дер Поля

4. Хаотизация автоколебаний

При значительном превышении порога генерации спектр автоколебаний обогащается подменными гармониками основной частоты. Примером может служить приведенный на рис. 4, *а* спектр, отвечающий автоколебаниям, генерируемым отображением (8) при $p = 10,5$ ($\gamma = 0,693$). Дальнейшее увеличение параметра p и, следовательно, дальнейшее обогащение спектра приводят к трансформации его формы из линейчатой в сплошную. Сплошной форме отвечает, например, показанный на рис. 4, *б* усредненный амплитудный спектр автоколебаний, генерируемых при $p = 20,5$ ($\gamma = 1,352$). Оценка усредненного амплитудного спектра, как квадратного корня из удвоенного спектра мощности, проведена методом Бартлетта [9] с усреднением ста двадцати восьми 1024-точечных периодограмм.

Непрерывность спектра считается [10] одним из эвристических критериев хаотичности. Часто непрерывность спектра сопровождается дробной размерностью фазового пространства. То, что это имеет место и в нашем случае, подтверждается рис. 5, на котором показан аттрактор ДВ-автоколебаний со спектром с рис. 4, *б*. Корреляционная размерность аттрактора $\nu = 1,73 \pm 0,06$.

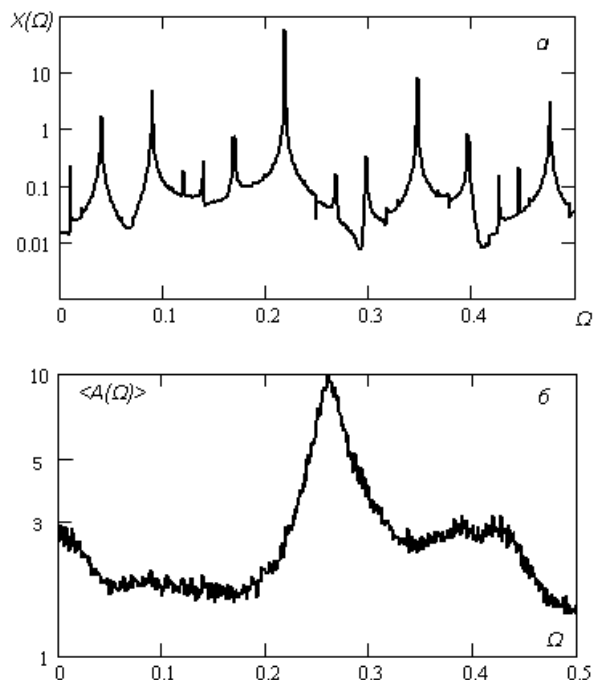


Рис. 4. Амплитудные спектры регулярных и хаотических автоколебаний

Таким образом, можно утверждать, что при высоких уровнях возбуждения ДВ-осцилляторы (8) и (9), теряя свойства томсоновских автоколебательных систем, приобретают способность генерировать хаотические автоколебания.

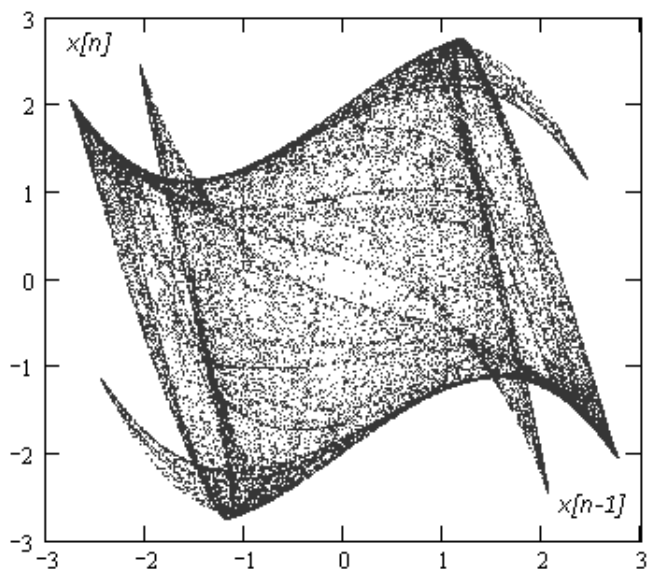


Рис. 5. Аттрактор хаотических автоколебаний

Заключение

Представленные здесь осцилляторы Ван дер Поля и Рэля с уравнениями движения в форме дискретных отображений расширяют круг объектов нелинейной динамики дискретного времени, имеющих свойства автоколебательных систем. Практические применения предложенных ДВАКС весьма разнообразны — моделирование сигналов и систем, нелинейная фильтрация дискретных (цифровых) сигналов, защита информации.

Литература

- [1] Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б. Современные проблемы нелинейной динамики. М.: Эдиториал УРСС, 2000. 336 с.
- [2] Заславский Г.М. Гамильтонов хаос и фрактальная динамика. М.; Ижевск: НИЦ РХД, Ижевский институт компьютерных исследований, 2010. 472 с.
- [3] Опенгейм А., Шафер Р. Цифровая обработка сигналов. М.: Техносфера, 2006. 856 с.
- [4] Зайцев В.В., Давыденко С.В., Зайцев О.В. Динамика автоколебаний дискретного осциллятора Ван дер Поля // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2000. Т. 3. №2. С. 64-67.
- [5] Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 504 с.
- [6] Зайцев В.В. Дискретные сигналы и системы. Самара: Изд-во СамГУ, 2010. 96 с. URL: http://ppent.samsu.ru/docs/Discrete_signals_and_systems.pdf.
- [7] Капранов М.В., Кулешов В.Н., Уткин Г.М. Теория колебаний в радиотехнике. М.: Наука, 1984. 320 с.

- [8] Найфе А. Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 536 с.
- [9] Макс Ж. Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях: в 2 т. / пер. с фр. М.: Мир, 1983. Т. 1. 312 с.
- [10] Многоликий хаос / Е.Ф. Мищенко [и др.]. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2013. 432 с.

References

- [1] Malinetskiy G.G., Potapov A.B. Modern problems of nonlinear dynamics. M., Editorial URSS, 2000, 336 p. (in Russian)
- [2] Zaslavsky G.M. Hamiltonian chaos and fractal dynamics. Moscow; Izhevsk, NITs RKhD; Izhevskii institut komp'yuternykh issledovaniy, 2010, 472 p. (in Russian)
- [3] Oppenheim A., Schaffer R. Digital signal processing. M., Tekhnosfera, 2006, 856 p. (in Russian)
- [4] Zaitsev V.V., Davydenko S.V., Zaitsev O.V. Dynamics of self-oscillations of discrete Van der Pol oscillator, *Fizika volnovykh protsessov i radiotekhnicheskie sistemy [Physics of Wave Processes and Radio Systems]*, 2000, Vol. 3, no. 2, pp. 64–67 (in Russian)
- [5] Bogolyubov N.N., Mitropol'skiy Yu.A. Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations. M., Nauka, 1974, 504 p. (in Russian)
- [6] Zaitsev V.V. Discrete signals and systems, 2010. Samara: Izd-vo SamGU, 2010. Available at: http://ppent.samsu.ru/docs/Discrete_signals_and_systems.pdf (in Russian)
- [7] Kapranov M.V., Kuleshov V.N., Utkin G.M. Theory of oscillations in the radiotechnics. M., Nauka, 1984, 320 p. (in Russian)
- [8] Nayfe A. Introduction to perturbation methods. M., Mir, 1984, 536 p. (in Russian)
- [9] Max Zh. Methods and techniques of signal processing at physical measurements: in 2 v. Transl. from French. M., Mir, 1983, Vol. 1, 312 p. (in Russian)
- [10] The Many Faces of chaos. E.F. Mishchenko [et al.]. M., FIZMATLIT, 2013, 432 p. (in Russian)

Поступила в редакцию 31/III/2014;
в окончательном варианте — 31/III/2014.

VAN DER POL AND RAYLEIGH OSCILLATORS IN DISCRETE TIME

© 2014 V.V. Zaitsev, S.V. Lindt, A.N. Shilin²

New discrete displays of classical self-oscillatory systems — Van der Paul and Rayleigh's oscillators are offered. Displays with the kept temporary characteristics of response of linear system on external influence are received on the basis of combination of methods of parametrical synthesis and invariancy of pulse characteristics of dynamic systems. Examples of generation of regular and chaotic self-oscillations in discrete time are given. For the analysis of self-oscillations in the received discrete systems the method of slowly changing amplitudes is used. The effect of substitution of frequencies in a range of self-oscillations with use of the improved first approach is considered.

Key words: nonlinear dynamics, discrete time, self-oscillatory system, discrete mapping, high-Q oscillators, method of invariance of impulse responses, effect of substitution of frequencies, dynamic chaos.

Paper received 31/III/2014.

Paper accepted 31/III/2014.

²Zaitsev Valery Vasilievich (zaitsev@samsu.ru), Lindt Svetlana Vladimirovna (svvetlana_1@mail), Shilin Alexander Nikolaevich (shilax@yandex.ru), the Dept. of Radiophysics, Samara State University, Samara, 443011, Russian Federation.