УДК 512.572

ОБ АССОЦИАТИВНЫХ АЛГЕБРАХ СЛАБОГО РОСТА

© 2014 С.М. Рацеев[1]

В статье показано, что если многообразие ассоциативных алгебр имеет слабый рост последовательности $\{c_n(\mathbf{V})\}_{n\geqslant 1}$ и характеристика основного поля не равна двум, то для некоторого s в нем выполнено тождество $[x_1,x_2][x_3,x_4]\dots[x_{2s-1},x_{2s}]=0$. Как следствие, любое многообразие ассоциативных алгебр со слабым ростом последовательности коразмерностей имеет целую экспоненту. Также следствием этого является отсутствие многообразий ассоциативных алгебр, рост которых был бы промежуточным между полиномиальным и экспоненциальным, если характеристика основного поля не равна двум.

Ключевые слова: ассоциативная алгебра, алгебра Ли, многообразие алгебр, рост многообразия.

Пусть $A(X)$ — свободная ассоциативная алгебра над полем K, где $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ — счетное множество свободных образующих, R — некоторая ассоциативная PI-алгебра, $Id(R)$ — идеал тождеств алгебры R. Пусть $\mathbf{V} = var(R)$ — многообразие алгебр, порожденное алгеброй R, $K(X,\mathbf{V}) = A(X)/Id(R)$ — относительно свободная алгебра многообразия $\mathbf{V}$ над полем K. Обозначим через P_n подпространство в $A(X)$, состоящее из всех полилинейных элементов степени n от переменных $x_1,\dots,x_n$, $P_n(\mathbf{V}) = P_n/(P_n \cap Id(R))$, $c_n(\mathbf{V}) = dim\ P_n(\mathbf{V})$.

Так как любое нетривиальное многообразие $\mathbf{V}$ ассоциативных алгебр имеет экспоненциальный рост, то введем в рассмотрение нижнюю и верхнюю экспоненты:

$$\underline{Exp}(\mathbf{V}) = \varliminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(\mathbf{V})}, \qquad \overline{Exp}(\mathbf{V}) = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(\mathbf{V})}.$$

Если $\underline{Exp}(\mathbf{V}) = \overline{Exp}(\mathbf{V})$, то обозначим $Exp(\mathbf{V}) = \underline{Exp}(\mathbf{V})$.

Хорошо известно, что S_n-модуль $P_n(\mathbf{V})$ является вполне приводимым, и разложение его характера в целочисленную комбинацию неприводимых характеров имеет следующий вид:

$$\chi_n(\mathbf{V}) = \chi(P_n(\mathbf{V})) = \sum_{\lambda\vdash n} m_\lambda(\mathbf{V})\chi_\lambda. \tag{1}$$

Под обозначением $[a,b,c]$ будем понимать левонормированную расстановку коммутаторов $[[a,b],c]$.

Обозначим через $\mathbf{U}_s$ многообразие ассоциативных алгебр, определенное тождеством

$$[x_1,x_2][x_3,x_4]\dots[x_{2s-1},x_{2s}]=0.$$

[1]Рацеев Сергей Михайлович (`RatseevSM@mail.ru`), кафедра информационной безопасности и теории управления Ульяновского государственного университета, 432017, Российская Федерация, г. Ульяновск, ул. Льва Толстого, 42.

В работах [1; 2], в частности, показано, что для любого многообразия ассоциативных алгебр $\mathbf{V}$ над произвольным полем $Exp(\mathbf{V} \cap \mathbf{U}_s)$ существует и является целым числом.

Теорема 1 [1]. Пусть $\mathbf{V}$ — подмногообразие в $\mathbf{U}_s$ над произвольным полем. Тогда существуют такие константы N, α, β и такое целое число d, $0 \leqslant d \leqslant s$, что для любого $n \geqslant N$ будет выполнено следующее двойное неравенство:

$$n^\alpha d^n \leqslant c_n(\mathbf{V}) \leqslant n^\beta d^n.$$

Рассмотрим вопрос о значениях экспоненты d из теоремы 1 для произвольного подмногообразия в $\mathbf{U}_s$. Для упрощения записей, элементы, содержащие кососимметрический набор, будем записывать без знака суммирования, помечая переменные этого набора чертой, волной или двумя чертами сверху. Например, $z\widetilde{x}\widetilde{y} = zxy - zyx$.

Теорема 2 [1]. Пусть $\mathbf{V}$ — многообразие ассоциативных алгебр над полем нулевой характеристики и d — некоторое неотрицательное целое число. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) $Exp(\mathbf{V} \cap \mathbf{U}_{d+1}) \leqslant d$;

2) для любого целого $s > d$ выполнено неравенство $Exp(\mathbf{V} \cap \mathbf{U}_s) \leqslant d$;

3) существует такое неотрицательное целое p, что в многообразии $\mathbf{V} \cap \mathbf{U}_{d+1}$ выполнено полилинейное тождество

$$\begin{gathered}\bar{x}_{11}\widetilde{x}_{12}, \ldots \bar{\bar{x}}_{1p}[y_1, y_2, \bar{x}_{21}, \widetilde{x}_{22}, \ldots, \bar{\bar{x}}_{2p}] \ldots \\ \ldots [y_{2d-1}, y_{2d}, \bar{x}_{(d+1)1}, \widetilde{x}_{(d+1)2}, \ldots, \bar{\bar{x}}_{(d+1)p}] = 0;\end{gathered} \tag{2}$$

4) для любого целого $s > d$ существует такое неотрицательное целое $p = p(s)$, что в многообразии $\mathbf{V} \cap \mathbf{U}_s$ выполнено полилинейное тождество (2);

5) существует такая константа C, что в сумме (1) $m_\lambda(\mathbf{V} \cap \mathbf{U}_{d+1}) = 0$ в случае, если выполнено условие $n - (\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_d) > C$;

6) для любого целого $s > d$ существует такая константа $C = C(s)$, что в сумме (1) $m_\lambda(\mathbf{V} \cap \mathbf{U}_s) = 0$ в случае, если выполнено условие $n - (\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_d) > C$.

Заметим, что аналоги теорем 1 и 2 имеют место и в алгебрах Ли (Лейбница) [3–5], а также в алгебрах Пуассона (Лейбница — Пуассона) [6–8], при этом алгебры Лейбница — Пуассона были введены в работе [9].

В случае алгебр Ли известен такой результат С.П. Мищенко [10]: если характеристика основного поля не равна двум и для некоторого многообразия алгебр Ли $\mathbf{V}$ существует такое n, что выполнено неравенство $c_n(\mathbf{V}) < 2^{[\frac{n-1}{2}]}$, где квадратные скобки означают целую часть числа, то коммутант многообразия $\mathbf{V}$ будет нильпотентным. Покажем, что данный результат имеет место и в случае ассоциативных алгебр.

Предложение. Если характеристика основного поля K не равна двум, то в случае ассоциативных алгебр тождество $AxyzB = 0$ является следствием тождества $Ax^2B = 0$, где A, B — некоторые, в частности пустые, ассоциативные слова, не имеющие в своем составе переменную x.

Доказательство. Линеаризация тождества $Ax^2B = 0$ по переменной x дает тождество $A(xy + yx)B = 0$. Поэтому тождества

$$A(xyz + zxy)B = 0, \quad A(yzx + xyz)B = 0, \quad A(zxy + yzx)B = 0$$

являются следствиями тождества $Ax^2B = 0$. Матрица данной системы относительно неизвестных $AxyzB$, $AyzxB$, $AzxyB$ имеет определитель, равный двум. Поэтому данная система имеет единственное решение

$$AxyzB = AyzxB = AzxyB = 0.$$

$\square$

Теорема 3. Пусть $\mathbf{V}$ — некоторое многообразие ассоциативных алгебр и характеристика основного поля не равна двум. Если для некоторого n выполнено неравенство

$$c_n(\mathbf{V}) < 2^{[\frac{n}{2}]},$$

то существует такое целое число s, что $\mathbf{V}$ является подмногообразием в $\mathbf{U}_s$.

Доказательство. Обозначим через $H_m^{(k)}$, где $m \leqslant k$, абелеву подгруппу симметрической группы S_{2k}, порожденную транспозициями $\delta_i = (2i-1, 2i)$, $i = 1, \ldots, m$. Понятно, что $|H_m^{(k)}| = 2^m$.

Пусть для некоторого n выполнено условие теоремы. Обозначим $m = \left[\frac{n}{2}\right]$ и рассмотрим элементы пространства $P_n(\mathbf{V})$ следующего вида:

$$\omega x_{\sigma(2m)} \ldots x_{\sigma(1)}, \quad \sigma \in H_m^{(m)},$$

где ω — либо пустое слово, либо $\omega = x_n$ (в зависимости от четности числа n). Так как $c_n(\mathbf{V}) < 2^{[\frac{n}{2}]}$, то данные элементы линейно зависимы в $P_n(\mathbf{V})$, поэтому в многообразии $\mathbf{V}$ выполнено нетривиальное тождество вида

$$\sum_{\sigma \in H_m^{(m)}} \alpha_\sigma \omega x_{\sigma(2m)} \ldots x_{\sigma(1)} = 0, \tag{3}$$

где не все α_σ равны нулю. Если для всех $\sigma \in H_m^{(m)}$ выполнено равенство $\alpha_\sigma = -\alpha_{\sigma\delta_m}$, то тождество (3) можно записать в таком виде

$$\sum_{\sigma \in H_{m-1}^{(m)}} \beta_\sigma \omega [x_{\sigma(2m)}, x_{\sigma(2m-1)}] x_{\sigma(2m-2)} \ldots x_{\sigma(1)} = 0,$$

где не все β_σ равны нулю. Если же для некоторого $\sigma \in H_m^{(m)}$ выполнено неравенство $\alpha_\sigma \neq -\alpha_{\sigma\delta_m}$, тогда следствием тождества (3) является такое нетривиальное тождество

$$\sum_{\sigma \in H_{m-1}^{(m)}} \beta_\sigma \omega y_1^2 x_{\sigma(2m-2)} \ldots x_{\sigma(1)} = 0.$$

Данный процесс продолжим для δ_i, $i = m-1, \ldots, 1$. В итоге получим тождество вида

$$\omega \ldots y_{i_1}^2 \ldots [x_{j_1}, x_{j_2}] \ldots y_{i_2}^2 \ldots [x_{j_3}, x_{j_4}] \ldots = 0,$$

полилинейное относительно переменных, находящихся в коммутаторах, и каждая переменная y_{i_s} (если таковые имеются) имеет степень два. Теперь осталось применить предложение. $\square$

Из теорем 1 и 3 вытекает следующее

Следствие. (i) Пусть $\mathbf{V}$ — подмногообразие в $\mathbf{U}_s$ над произвольным полем, такое, что $c_{n_i}(\mathbf{V}) < {n_i}^\beta (2-\varepsilon)^{n_i}$ для некоторых констант β, $0 < \varepsilon < 1$ и некоторой подпоследовательности n_i, $i = 1, 2, \ldots$ Тогда рост многообразия $\mathbf{V}$ является полиномиальным.

(*ii*) Если характеристика основного поля не равна двум, то не существует многообразий ассоциативных алгебр, рост которых был бы промежуточным между полиномиальным и экспоненциальным.

Литература

[1] Рацеев С.М. Тождества в многообразиях, порожденных алгебрами верхнетреугольных матриц // Сиб. матем. журн. 2011. № 2 (54). С. 416–429.

[2] Petrogradsky V.M. Exponents of subvarieties of upper triangular matrices over arbitrary fields are integral // Serdika Math. 2000. № 2 (26). P. 1001–1010.

[3] Рацеев С.М. Рост многообразий алгебр Лейбница с нильпотентным коммутантом //Матем. заметки. 2007. № 1 (82). С. 108–117.

[4] Рацеев С.М. Рост некоторых многообразий алгебр Лейбница // Вестник СамГУ. Естественнонаучн. сер. 2006. № 6/1 (46). С. 70–77.

[5] Рацеев С.М. Оценки роста многообразий алгебр Лейбница с нильпотентным коммутантом // Вестник СамГУ. Естественнонаучн. сер. 2010. № 4 (78). С. 65–72.

[6] Рацеев С.М. Рост в алгебрах Пуассона // Алгебра и логика. 2011. № 1 (50). С. 68–88.

[7] Ratseev S.M. Growth of some varieties of Leibniz-Poisson algebras // Serdica Math. J. 2011. V. 37. № 4 (37). P. 331–340.

[8] Рацеев С.М., Череватенко О.И. Экспоненты некоторых многообразий алгебр Лейбница-Пуассона // Вестник СамГУ. Естественнонаучн. сер. 2013. № 3 (104). С. 42–52.

[9] Рацеев С.М. Коммутативные алгебры Лейбница-Пуассона полиномиального роста // Вестник СамГУ. Естественнонаучн. сер. 2012. № 3/1 (94). С. 54–65.

[10] Мищенко С.П. Многообразия алгебр Ли со слабым ростом последовательности коразмерностей // Вестник Московского университета. 1982. Сер. 1. Матем., механ. № 5. С. 63–66.

References

[1] Ratseev S.M. Identities in the varieties generated by algebras of upper triangular matrices. *Sib. matem. zhurn* [*Siberian Mathematical Journal*], 2011, no. 2(54), pp. 416–429 (in Russian)

[2] Petrogradsky V.M. Exponents of subvarieties of upper triangular matrices over arbitrary fields are integral. *Serdika Math*, 2000, no. 2(26), pp. 1001–1010.

[3] Ratseev S.M. Growth of varieties of Leibniz algebras with nilpotent commutator. *Matematicheskie zametki* [*Mathematical Notes*], 2007, no. 1–2(82), pp. 108–117 (in Russian)

[4] Ratseev S.M. Growth of some varieties of Leibniz algebras. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta. Estestvenno-nauchnaya seriia* [*Vestnik of Samara State University. Natural Science Series*], 2006, no. 6/1 (46), pp. 70–77 (in Russian)

[5] Ratseev S.M. Estimate of growth of Leibniz algebras with nilpotent commutator. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta. Estestvenno-Nauchnaya Seriia* [*Vestnik of Samara State University. Natural Science Series*], 2010, no. 4 (78), pp. 65–72 (in Russian)

[6] Ratseev S.M. Growth in Poisson algebras. *Algebra i logika* [*Algebra and Logic*, 2011, no. 1(50), pp. 68–88 (in Russian)

[7] Ratseev S.M. Growth of some varieties of Leibniz-Poisson algebras. *Serdica Math. J.*, 2011, Vol. 37, no. 4, pp. 331–340.

[8] Ratseev S.M., Cherevatenko O.I. Exponents of some varieties of Leibniz-Poisson algebras. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta. Estestvenno-Nauchnaya Seriia.* [*Vestnik of Samara State University. Natural Science Series*], 2013, no. 3(104), pp. 42–52 (in Russian)

[9] Ratseev S.M. Commutative Leibniz-Poisson algebras of polynomial growth. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta. Natural Science Series*, [*Vestnik of Samara State University*], 2012, no. 3/1(94), pp. 54–65 (in Russian)

[10] Mishchenko S.P. Varieties of Lie algebras with weak growth of sequence of codimensions. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriia 1. Matematika, mekhanika* [*Vestnik of Moscow Universiteta. Series 1. Mathematics, mechanics*], 1982, no. 5, pp. 63-66 (in Russian)

Поступила в редакцию $3/II/2014$;
в окончательном варианте — $3/II/2014$.

ON VARIETIES OF ASSOCIATIVE ALGEBRAS WITH WEAK GROWTH

© 2014 S.M. Ratseev[2]

We prove that any variety of associative algebras with weak growth of the sequence $\{c_n(\mathbf{V})\}_{n\geqslant 1}$ satisfies the identity $[x_1, x_2][x_3, x_4]\dots[x_{2s-1}, x_{2s}] = 0$ for some s. As a consequence, the exponent of an arbitrary associative variety with weak growth exists and is an integer and if the characteristic of the ground field is distinct from 2 then there exists no varieties of associative algebras whose growth is intermediate between polynomial and exponential.

Key words: associative algebra, Lie algebra, variety of algebras, growth of a variety.

Paper received $3/II/2014$.
Paper accepted $3/II/2014$.

[2]Ratseev Sergey Mikhailovich (RatseevSM@mail.ru), the Dept. of Information Security and Theory of Management, Ulyanovsk State University, Ulyanovsk, 432017, Russian Federation