УДК 62.534(031)

СТАБИЛИЗАЦИЯ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ С ГАРАНТИРОВАННОЙ ОЦЕНКОЙ КАЧЕСТВА УПРАВЛЕНИЯ

© 2014 Е.В. Куркина[1]

Решена задача о стабилизации нулевого решения неавтономной гамильтоновой системы с гарантированной оценкой качества управления, возникающая из задачи об оптимальной стабилизации путем ослабления требования к ценовому функционалу: вместо его минимизации необходимо лишь, чтобы он не превосходил заранее заданной оценки. Решение получено синтезом активного программного управления, приложенного к системе, и стабилизирующего управление по принципу обратной связи. Задача решена аналитически на основе прямого метода Ляпунова теории устойчивости с использованием функции Ляпунова со знакопостоянными производными. В качестве примеров решены задачи о синтезе и стабилизации программных движений однородного стержня переменной длины и математического маятника переменной длины во вращающейся плоскости.

Ключевые слова: гамильтонова система, стабилизация, гарантированная оценка, качество, управление, стержень, маятник, переменная длина.

Введение

Задачи об управляемых движениях механических систем являются актуальными и привлекают внимание многих исследователей. Проблема построения и исследования свойств и условий устойчивости таких движений рассматривалась в работах многих ученых, например [1–5]. Как правило, обеспечение асимптотической устойчивости решения задачи сводится к исследованию нулевого решения неавтономной системы [6] и проводится на основе прямого метода Ляпунова [7]. Метод предельных систем [8] и его модификация [9] позволяют за счет использования функций Ляпунова со знакопостоянными производными существенно расширить класс применяемых функций для построения искомых управлений в замкнутой аналитической форме в классе непрерывных функций. Этот метод хорошо зарекомендовал себя при решении задач о построении заданных движений механических систем, и с его помощью только в Самарском государственном аэрокосмическом университете группой авторов был решен целый ряд задач о построении асимптотически устойчивых программных движений: твердого тела на подвижной платформе [10], двойного маятника переменной длины с подвижной точкой подвеса [11], руки робота-манипулятора [12], свободного гиростата с переменными

[1]Куркина Екатерина Владимировна (ekaterina.kurkina@mail.ru), технологический отдел-1, ОАО "Гипровостокнефть", 443041, Российская Федерация, г. Самара, ул. Красноармейская, 93.

моментами инерции, зависящими от времени [13], сферических движений спутника на круговой орбите [14], стационарных движений однороторного гиростата с полостью, заполненной вязкой жидкостью [15].

При этом во многих задачах важным помимо стабилизации движений оказывается оценка качества переходного процесса, задаваемая некоторым функционалом качества, требующим оптимизации [16]. Задачи об оптимальной стабилизации нашли широкий круг исследователей, например [17; 18]. В работе [19] была приведена постановка и получены достаточные условия задачи о стабилизации нулевого решения неавтономных систем с гарантированной оценкой качества управления, возникающая из задачи об оптимальной стабилизации путем ослабления требования к ценовому функционалу: вместо его минимизации необходимо лишь, чтобы он не превосходил заранее заданной оценки. Аналогичная задача по части переменных была исследована и решена в работе [20].

В данной статье ставится и решается задача об определении управления, стабилизирующего движения механической гамильтоновой системы, исследованная в работе [21], с дополнительным условием о нахождении гарантированной оценки качества управления. Решение задачи сводится к исследованию нулевого решения неавтономной системы и проводится на основе прямого метода Ляпунова [7]. Метод предельных систем [8] и его модификация [9] позволяют при использовании функций Ляпунова со знакопостоянными производными строить искомое управление в замкнутой аналитической форме в классе непрерывных функций.

1. Постановка задачи

Рассматривается управляемая механическая система, движение которой описывается уравнениями Гамильтона

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H(t,q,p)}{\partial p}, \\ \dot{p} = -\frac{\partial H(t,q,p)}{\partial q} + u, \end{cases} \tag{1.1}$$

где $q = (q_1, ..., q_n)^T$ — n-вектор обобщенных координат в действительном линейном пространстве R^n с нормой $\|q\|$, $p = (p_1, ..., p_n)^T$ — n-вектор обобщенных импульсов, $p \in R^n$ с нормой $\|p\|$ и $H(t,q,p)$ — гамильтониан системы, $u(t,q,p) \in U$ – силы управляющих воздействий. Символ ^{T} обозначает транспонирование.

Предполагается, что при $u \equiv 0$ система (1.1) имеет тривиальное решение $q = = p = 0$.

Пусть оценкой качества управления этой системой служит значение интеграла

$$I = \int_{t_0}^{\infty} W(t, x[t], u[t])\, dt \tag{1.2}$$

для переходного процесса при управлении $u[t]$ на соответствующей траектории $x[t]$ системы (1.1). Подынтегральная функция $W(t,x,u)$, определяющая оценку качества (1.2) процесса $x[t]$, представляет собой в общем случае некоторую непрерывную неотрицательную функцию, определенную в области движения.

Приведем три постановки различных задач о стабилизации системы (1.1).

Задача о стабилизации. Решение задачи о стабилизации заключается в нахождении таких управляющих воздействий $u = u^0(t,q,p)$ среди всех $u(t,q,p) \in U$, которые обеспечивают асимптотическую устойчивость невозмущенного движения $q = p = 0$ системы (1.1).

Задача об оптимальной стабилизации получается из предыдущей задачи при условии минимума критерия качества (1.2) и заключается в нахождении таких управляющих воздействий $u = u^0(t, q, p)$ среди всех $u(t, q, p) \in U$, которые обеспечивают асимптотическую устойчивость невозмущенного движения $q = p = 0$ системы (1.1), при этом для любого другого управления $u = u^*(t, q, p) \in U$, обеспечивающего асимптотическую устойчивость решения $q = p = 0$, справедливо неравенство:

$$I^0 = \int_{t_0}^{\infty} W\left(t, q^0[t], p^0[t], u^0[t]\right) dt \leqslant \int_{t_0}^{\infty} W\left(t, q^*[t], p^*[t], u^*[t]\right) dt = I^*$$

при $t_0 \geqslant 0$, $q^0(t_0) = q^*(t_0) = q_0$, $p^0(t_0) = p^*(t_0) = p_0$.

Задачи о стабилизации и оптимальной стабилизации были поставлены Н.Н. Красовским в работе [16].

Как известно, задача об оптимальной стабилизации движения управляемой системы на бесконечном интервале времени сводится к отысканию оптимальной функции Ляпунова и оптимальных управляющих воздействий, удовлетворяющих уравнению в частных производных Беллмана, которое необходимо решить с учетом дополнительного неравенства. В результате получается довольно трудная задача. В работе исследуется измененная постановка задачи о стабилизации движения — о стабилизации с гарантированной оценкой качества управления. Она возникает из задачи об оптимальной стабилизации при ослаблении требования к ценовому функционалу: не требуется его минимизация, необходимо лишь, чтобы он не превосходил некоторой оценки [19].

Определение. Управляющее воздействие $u = u^0(t, q, p)$ называется стабилизирующим с гарантированной оценкой качества управления $P(t, q, p)$, если оно обеспечивает асимптотическую устойчивость невозмущенного движения $q = p = 0$ системы (1.1), при этом на каждом управляемом движении $q^0[t]$, $p^0[t]$, $q^0(t_0) = q_0$, $p^0(t_0) = p_0$ справедливо неравенство:

$$I = \int_{t_0}^{\infty} W\left(t, q^0[t], p^0[t], u^0[t]\right) dt \leqslant P(t_0, q_0, p_0). \tag{1.3}$$

Согласно этому определению поставим **задачу о стабилизации с гарантированной оценкой качества управления** гамильтоновых систем: найти среди всех $u(t, q, p) \in U$ управляющее воздействие $u = u^0(t, q, p)$, обеспечивающее асимптотическую устойчивость невозмущенного движения $q = p = 0$ системы (1.1), при котором на каждом управляемом движении справедливо неравенство (1.3).

Приведенная выше постановка задачи за счет ослабления требования минимизации функционала (1.2) позволяет упростить задачу [16] и существенно расширить класс решаемых задач по сравнению с задачей об оптимальной стабилизации.

В решении поставленной задачи основными и конструктивными остаются функция Ляпунова $V = V(t, x)$ и функция Беллмана

$$B[V, t, x, u] = \frac{\partial V}{\partial t} + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T X(t, x, u) + W(t, x, u), \tag{1.4}$$

где $x = (q, p)^T$.

Так как исследуем задачу о стабилизации нулевого решения системы (1.1), то переменные q и p можно считать отклонеными от тривиального решения $q = p = 0$, а уравнения (1.1) — уравнениями возмущенного движения. Это позволит применить к задаче о стабилизации с гарантированной оценкой качества управления гамильтоновых систем методы и результаты, разработанные для исследования устойчивости и стабилизации нулевого положения равновесия неавтономных систем [19]. В дальнейшем будем рассматривать классические натуальные системы, для которых гамильтониан имеет вид:

$$H = \frac{1}{2} p^T A p + U(t, q), \tag{1.5}$$

где $A = A(t, q)$ — симметричная матрица коэффициентов, задающая положительно определенную квадратичную форму переменных p. С учетом гамильтониана (1.5) уравнения возмущенного движения (1.1) запишутся в виде

$$\begin{cases} \dot{q} = Ap, \\ \dot{p} = -\frac{1}{2} p^T \frac{\partial A}{\partial q} p - \frac{\partial U}{\partial q} + u. \end{cases} \tag{1.6}$$

2. Построение стабилизирующего управления

Пусть C – положительно определенная, симметричная, неисчезающая, ограниченная матрица:

$$c_0 E \leqslant C \leqslant c_1 E \quad (0 < c_0 < c_1 - const),$$

где E — единичная матрица.

Рассмотрим положительно определенную по p и q, допускающую бесконечно малый высший предел, функцию Ляпунова [21]

$$V(t, q, p) = \frac{1}{2} p^T A p + \frac{1}{2} q^T C q. \tag{2.1}$$

Полная производная функции Ляпунова (2.1) по времени в силу системы (1.6) будет иметь вид

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)^T \dot{p} + \left(\frac{\partial V}{\partial q}\right)^T \dot{q} + \frac{\partial V}{\partial t} = \\ &= \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)^T \left[-\frac{1}{2} p^T \frac{\partial A}{\partial q} p - \frac{\partial U}{\partial q} + u\right] + \left(\frac{\partial V}{\partial q}\right)^T (Ap) + \frac{\partial V}{\partial t}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Выберем стабилизирующее управление в виде

$$u^0 = \frac{\partial U}{\partial q} - Cq - A^{-1} D p, \tag{2.3}$$

где $D = D(t)$ — симметричная, положительно определенная матрица размерности $n \times n$. Добавив силы (2.3) в систему (1.6), имеем уравнения управляемых движений:

$$\begin{cases} \dot{q} = Ap, \\ \dot{p} = -\frac{1}{2} p^T \frac{\partial A}{\partial q} p - Cq - A^{-1} D p. \end{cases} \tag{2.4}$$

При этом полная производная (2.2) от функции Ляпунова в силу системы (2.4) имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{V} = {} & p^T A^T \left[-\frac{1}{2} p^T \frac{\partial A}{\partial q} p - \frac{\partial U}{\partial q} + \left\{\frac{\partial U}{\partial q} - Cq - A^{-1} D p\right\}\right] + \\ & + \left(\left[\frac{1}{2} p^T \frac{\partial A}{\partial q} p\right]^T + q^T C^T\right) Ap + \frac{1}{2} p^T \frac{\partial A}{\partial t} p + \frac{1}{2} q^T \frac{\partial C}{\partial t} q = \\ & = p^T A^T \left[-\frac{1}{2} p^T \frac{\partial A}{\partial q} p\right] + \left[\frac{1}{2} p^T \frac{\partial A}{\partial q} p\right]^T Ap + \\ & + p^T A^T (-Cq) - p^T A^T A^{-1} D p + q^T C^T A p + \frac{1}{2} p^T \frac{\partial A}{\partial t} p + \frac{1}{2} q^T \frac{\partial C}{\partial t} q. \end{aligned}$$

Отбрасывая слагаемые третьего порядка по переменным p, получим
$$\dot{V} \approx -p^T \left(D - \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial t} \right) p + \frac{1}{2} q^T \frac{\partial C}{\partial t} q. \tag{2.5}$$

3. Основные результаты

В качестве основных результатов о стабилизаци с гарантированной оценкой качества управления нулевого решения $p = q = 0$ гамильтоновых систем приведем следующие утверждения.

Утверждение 1. Пусть

1) A и C не зависят от t, т. е. выполнены условия $\frac{\partial A}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial C}{\partial t} = 0$.

2) $B \left[V, t, p, q, u^0 (t, p, q) \right] \leqslant 0.$ (3.1)

Тогда управление (2.3) является стабилизирующим для движения $p = q = 0$ системы (1.6) с гарантированной оценкой качества
$$P(t_0, q_0, p_0) = V(t_0, q_0, p_0) = \frac{1}{2} p_0^T A(q_0) p_0 + \frac{1}{2} q_0^T C q_0. \tag{3.2}$$

Доказательство. Выбрав управление в виде (2.3), для функции $V(t, q, p)$ вида (2.1) согласно условиям утверждения $\frac{\partial A}{\partial t} = 0$ и $\frac{\partial C}{\partial t} = 0$ и формуле (2.5) имеем:
$$\dot{V} \approx -p^T D p. \tag{3.3}$$

Так как функция V положительно определенная по переменным q, p, а ее производная $\dot{V}$ согласно (3.3) отрицательно определенная только по p, то по теореме об асимптотической устойчивости нулевого решения неавтономной системы [9] имеем асимптотическую устойчивость решения $p = q = 0$. Так как матрицы A и C ограниченные и согласно асимптотической устойчивости нулевого решения при движении системы при $t \to \infty$ выполняется $p \to 0$ и $q \to 0$, то для функции Ляпунова V имеем оценку
$V(t, q(t), p(t)) = \frac{1}{2} p^T A p + \frac{1}{2} q^T C q \to 0$, при $t \to \infty$.
Согласно определению (1.4)
$$B = \dot{V} + W. \tag{3.4}$$
По условию (3.1) утверждения 1 имеем $\dot{V} + W \leqslant 0$, или $W \leqslant -\dot{V}$. Интегрируя это соотношение на отрезке $[t_0, t]$, имеем
$$\int_{t_0}^{t} W dt \leqslant V(t_0, q_0, p_0) - V(t, q, p). \tag{3.5}$$
Переходя в (3.5) к пределу при $t \to \infty$, получим
$$\int_{t_0}^{\infty} W dt \leqslant V(t_0, q_0, p_0) = P(t_0, q_0, p_0).$$
Утверждение доказано.

Утверждение 2. Пусть выполнены условия
$$1) \frac{\partial A}{\partial t} = 0, \frac{\partial C}{\partial t} < 0,$$
$$2) B \left(V, t, p, q, u^0 (t, p, q) \right) \leqslant 0.$$
Тогда управление (2.3) является стабилизирующим для движения $p = q = 0$ системы (1.6) с гарантированной оценкой качества (3.2).

Замечание. Доказательство утверждения 2 аналогично доказательству утверждения 1. Отличие состоит в том, что производная от функции (2.1) согласно оценке (2.5) и условиям $\frac{\partial C}{\partial t} < 0$ является отрицательно определенной по всем переменным p и q, и факт асимптотической устойчивости нулевого решения $p = q = 0$ устанавливается на основании теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости.

Утверждение 3. Пусть выполнены условия

$$1)\ \frac{\partial A}{\partial t} \neq 0, \frac{\partial C}{\partial t} = 0,$$

$$2)\ D > \frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial t}, \tag{3.6}$$

$$3)\ B\left(V, t, p, q, u^0\left(t, p, q\right)\right) \leqslant 0.$$

Тогда управление (2.3) является стабилизирующим для движения $p = q = 0$ системы (1.6) с гарантированной оценкой качества (3.2).

Утверждение 4. Пусть выполнены условия

$$1)\frac{\partial A}{\partial t} \neq 0, \frac{\partial C}{\partial t} < 0,$$

2) для матрицы D выполняется условие (3.6)

$$3)B\left(V, t, p, q, u^0\left(t, p, q\right)\right) \leqslant 0.$$

Тогда управление (2.3) является стабилизирующим для движения $p = q = 0$ системы (1.6) с гарантированной оценкой качества (3.2).

Замечание. Доказательства утверждений 3 и 4 аналогичны доказательствам утверждений 1 и 2 соответственно, так как при выполнении условия (3.6) производная функции (2.1) в силу оценки (2.5) будет отрицательно определенной только по p для утверждения 3 и отрицательно определенной по всем переменным p и q для утверждения 4.

4. Стабилизация движений однородного стержня переменной длины

Рассмотрим однородный тяжелый стержень переменной длины массой $m = 1$, движущийся без трения в плоскости Oxy, которая вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг неподвижной вертикальной оси Oy (рис. 1).

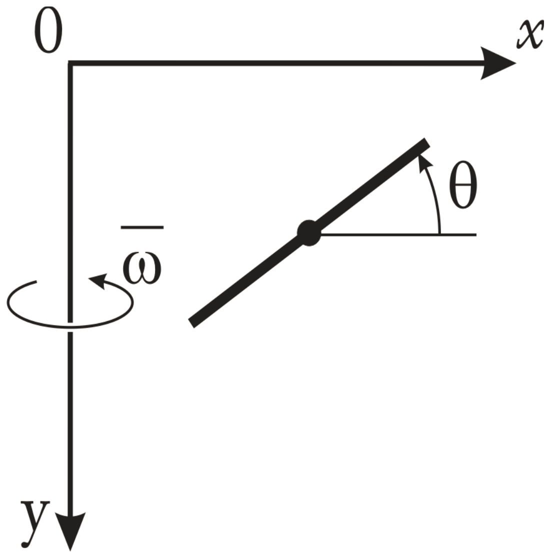

Рис. 1. Стержень во вращающейся плоскости

Пусть ε, η — координаты центра масс стержня, θ — угол отклонения стержня от горизонтали. Пусть длина стержня изменяется по закону $k = k\,(t) = a + b\cos t$, $a = const > b = const > 0$. Система имеет три степени свободы.

Гамильтониан системы примет вид:

$$H\,(\varepsilon,\eta,\theta) = \frac{1}{2}\left(\dot{\varepsilon}^2 + \dot{\eta}^2 + k^2\,(t)\,\dot{\theta}^2 + \omega^2 k^2\,(t)\cos^2\theta + \omega^2\varepsilon^2\right) - g\eta.$$

Выберем программное движение. Пусть стержень движется в плоскости так, что его центр масс двигается по окружности радиуса $R = 1$ с центром в точке $O\,(2,2)$, и при этом стержень вращается в плоскости Oxy вокруг центра масс с постоянной угловой скоростью $\omega_0 = const$:

$$\begin{cases} \varepsilon^* = \cos t + 2, \\ \eta^* = \sin t + 2, \\ \theta^* = \omega_0 t. \end{cases}$$

Составив уравнения управляемых движений стержня и введя отклонения, получим уравнения возмущенного движения:

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = p_1, \\ \dot{q}_2 = p_2, \\ \dot{q}_3 = p_3/k^2, \\ \dot{p}_1 = \omega^2 q_1, \\ \dot{p}_2 = 0, \\ \dot{p}_3 = -\omega^2 k^2 \sin q_3 \cos\left(q_3 + 2\omega_0 t\right). \end{cases}$$

Пусть оценка качества переходного процесса задана функционалом (1.2) с подынтегральной функцией $W\,(t,q,p) = d_1 p_1^2 + d_2 p_2^2$, удовлетворяющей условию 3 утверждения 3. Поставим задачу о стабилизации нулевого решения $p = q = 0$ системы уравнений возмущенного движения, соответствующего предложенному движению стержня, с гарантированной оценкой качества управления.

Возьмем функцию Ляпунова

$$V = \frac{1}{2}\left(p_1^2 + p_2^2 + \frac{1}{k^2\,(t)}p_3^2 + A_1 q_1^2 + A_2\,q_2^2 + A_3 q_3^2\right).$$

Выбрав управление в виде (2.3)

$$\begin{cases} u_1 = -\omega^2 q_1 - c_1 q_1 - d_1 p_1, \\ u_2 = -c_2 q_2 - d_2 p_2, \\ u_3 = \omega^2 k^2 \sin q_3 \cos\left(q_3 + 2\omega_2 t\right) - c_3 q_3 - k^2 d_3 p_3, \end{cases}$$

получим уравнения движения стабилизированной системы:

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = p_1, \\ \dot{q}_2 = p_2, \\ \dot{q}_3 = p_3/k^2, \\ \dot{p}_1 = -c_1 q_1 - d_1 p_1, \\ \dot{p}_2 = -c_2 q_2 - d_2 p_2, \\ \dot{p}_3 = -c_3 q_3 - k^2 d_3 p_3. \end{cases}$$

На основе утверждения 3 имеем асимптотическую устойчивость решения $q = p = 0$ с гарантированной оценкой качества управления

$$P\left(t_0, q_0, p_0\right) = V\left(t_0, q_0, p_0\right) = \\ = \tfrac{1}{2}\left(p_{10}^2 + p_{20}^2 + \tfrac{1}{k^2(t_0)} p_{30}^2 + A_1 q_{10}^2 + A_2\, q_{20}^2 + A_3 q_{30}^2\right).$$

5. Стабилизация движений математического маятника переменной длины

Рассмотрим движение плоского маятника переменной длины на вращающемся основании. Пусть плоскость Oxy с подвижной системой координат вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг неподвижной вертикальной оси Oy. В точке B $(OB = \xi_0)$ подвижной оси Ox прикреплен математический маятник переменной длины $l = l\,(t)$, совершающий относительные движения в плоскости Oxy (рис. 2).

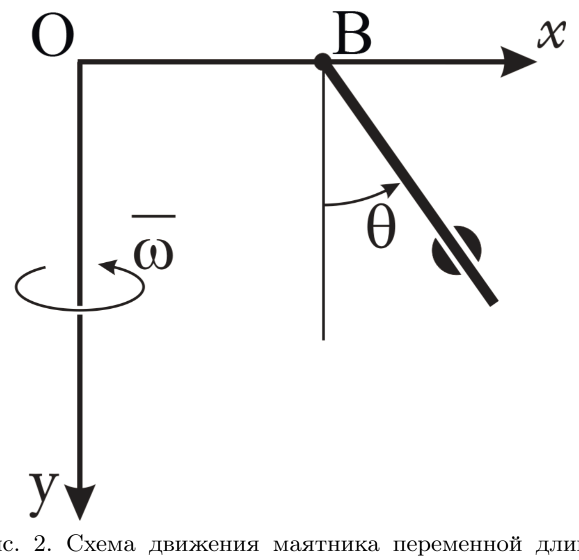

Рис. 2. Схема движения маятника переменной длины

Гамильтониан системы примет вид

$$H\left(l, \theta\right) = m\dot{l}^2 + ml^2\dot{\theta}^2 - \frac{m}{2}\left[\dot{l}^2 + \dot{\theta}^2 l^2 + \omega^2\left(\varepsilon_0 + l\sin\theta\right)^2\right] - mgl\cos\theta.$$

Пусть движение маятника осуществляется по закону

$$\begin{cases} l^* = l_0 + a\sin t, \\ \theta^* = \omega_0 t. \end{cases} \tag{5.1}$$

Составив уравнения управляемых движений маятника и введя отклонения, получим уравнения возмущенного движения для решения (5.1) в виде:

$$\begin{cases} \dot q_1 = \frac{p_1}{m}, \\ \dot q_2 = \frac{p_2 + m\omega_0 (l_0 + a\sin t)^2}{m(q_1 + l_0 + a\sin t)^2} - \omega_0, \\ \dot p_1 = \frac{\left(p_2 + m\omega_0 (l_0 + a\sin t)^2\right)^2}{m(q_2 + l_0 + a\sin t)^3} + \frac{\omega^2}{m}\left((q_1 + l_0 + a\sin t)\sin^2(q_2 + \omega_0 t) + \right. \\ \quad \left. + \varepsilon_0 \left(\sin q_2 + \omega_0 t\right)\right) + mg\cos(q_2 + \omega_0 t) + m\omega_0^2 (l_0 + a\sin t) - \\ \quad - \frac{\omega^2}{m}\left(\varepsilon_0 \sin\omega_0 t + (l_0 + a\sin t)\sin^2\omega_0 t\right) - mg\cos\omega_0 t, \\ \dot p_2 = \frac{\omega^2 \varepsilon_0 (q_1 + l_0 + a\sin t)}{m}\cos(q_2 + \omega_0 t) + \frac{\omega^2}{2m}(q_1 + l_0 + a\sin t)^2 \sin 2(q_2 + \omega_0 t) - \\ \quad - mg(q_1 + l_0 + a\sin t)\sin(q_2 + \omega_0 t) - \frac{\omega^2}{2m}\left(2\varepsilon_0 (l_0 + a\sin t)\cos\omega_0 t + \right. \\ \quad \left. + (l_0 + a\sin t)^2 \sin 2\omega_0 t\right) + mg(l_0 + a\sin t)\sin\omega_0 t. \end{cases}$$

Пусть оценка качества переходного процесса задана функционалом (1.2) с подынтегральной функцией $W(t, q, p) = d_1 p_1^2 + d_2 p_2^2$, удовлетворяющей условию 2 утверждения 1.

Поставим и решим задачу о стабилизации нулевого решения $q = p = 0$ системы уравнений возмущенного движения, соответствующего предложенному движению математического маятника, с гарантированной оценкой качества управления.

Возьмем функцию Ляпунова

$$V = \frac{1}{2}\left(\frac{p_1^2}{m} + \frac{p_2^2}{m(q_1 + l^*)^2} + c_1 q_1^2 + c_2 q_2^2\right).$$

Выберем управление в виде (2.3):

$$\begin{array}{l} u_1 = -\frac{\omega^2}{m}(\xi_0 \sin(\theta^* + q_2) + (l^* + q_1)\sin^2(\theta^* + q_2)) - mg\cos(\theta^* + q_2) - \\ \quad - c_1 q_1 - m d_1 p_1, \\ u_2 = -\frac{\omega^2}{2m}(2\xi_0 (l^* + q_1)\cos(\theta^* + q_2) + (l^* + q_1)^2 \sin 2(\theta^* + q_2)) + \\ \quad + mg(l^* + q_1)\sin(\theta^* + q_2) - c_2 q_2 - m(l + q_1)^2 d_2 p_2. \end{array} \tag{5.2}$$

Управляемая система примет вид:

$$\begin{cases} \dot q_1 = \frac{p_1}{m}, \\ \dot q_2 = \frac{p_2}{m(q_1 + l_0 + a\sin t)^2}, \\ \dot p_1 = \frac{p_2 + 2p_2 m\omega_0 (l_0 + a\sin t)^2}{m(q_2 + l_0 + a\sin t)^3} - c_1 q_1 - m d_1 p_1, \\ \dot p_2 = -c_2 q_2 - m(q_1 + l_0 + a\sin t)^2 d_2 p_2. \end{cases}$$

Итак, управление (2.3) решает задачу о стабилизации с гарантированной оценкой качества

$$P(t_0, q_0, p_0) = V(t_0, q_0, p_0) = \frac{1}{2m}p_{10}^2 + \frac{1}{2mq_{10}^2}p_{20}^2 + \frac{c_1}{2}q_{10}^2 + \frac{c_2}{2}q_{20}^2.$$

Заключение

В работе поставлена и решена задача об определении управления, стабилизирующего движения механической системы, описываемые уравнениями Гамильтона, с дополнительным условием о нахождении гарантированной оценки качества управления. Решение задачи сведено к исследованию нулевого решения неавтономной системы и проведено на основе прямого метода Ляпунова с применением метода предельных систем, позволившего при использовании функций Ляпунова со знакопостоянными производными построить искомое управление в замкнутой аналитической форме в классе непрерывных функций. Сформулированы и доказаны четыре утверждения, решающих поставленную задачу. На основе полученных результатов решены два иллюстративных примера. Результаты работы развивают и обобщают соответствующие результаты работ [6; 19; 21].

Литература

[1] Летов А.М. Динамика полета и управление. М.: Наука, 1969. 360 с.

[2] Построение систем программного движения / А.С. Галиуллин [и др.]. М.: Наука, 1971. 352 с.

[3] Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р. Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высш.шк., 1989. 447 с.

[4] Зубов В.И. Проблема устойчивости процессов управления. 2-е изд. СПб.: НИИ химии СПбГУ, 2001. 353 с.

[5] Черноусько Ф.Л., Ананьевский И.М., Решмин С.А. Методы управления нелинейными механическими системами. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. 328 с.

[6] Bezglasnyi S.P. The stabilization of program motions of controlled nonlinear mechanical systems // Korean J. Comput. and Appl. Math., 2004. V. 14. № 1–2. P. 251–266.

[7] Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.

[8] Artstein Z. Topological dynamics of an ordinary equations // J. Differ. Equat. 1977. V. 23. P. 216–223.

[9] Андреев А.С. Об устойчивости и неустойчивости нулевого решения неавтономной системы // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 2. С. 225–232.

[10] Безгласный С.П., Мысина О.А. Стабилизация программных движений твердого тела на подвижной платформе // Известия Саратовского университета. Новая серия. Сер.: Математика. Механика. Информатика. 2008. Т. 8. № 4. С. 44–52.

[11] Безгласный С.П., Жаренков С.В. Построение программных движений двойного маятника переменной длины с подвижной точкой подвеса // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. 2012. Т. 14. № 6. С. 33–37.

[12] Безгласный С.П., Батина Е.С., Воробьев А.С. Синтез асимптотически устойчивых движений руки робота-манипулятора // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13. Вып. 4. Ч. 1. С. 36–42.

[13] Безгласный С.П., Худякова М.А. Синтез асимптотически устойчивых движений гиростата переменной структуры // Труды МАИ. 2013. № 66. С. 2–16.

[14] Безгласный С.П., Худякова М.А. Построение и стабилизация программных относительных движений спутника // Полет. Общероссийский научно-технический журнал. 2012. № 12. С. 17–21.

[15] Алексеев А.В., Безгласный С.П., Красников В.С. Стабилизация стационарных движений однороторного гиростата с полостью, заполненной жидкостью большой вязкости // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета им. академика С.П. Королева (Национального исследовательского университета). 2012. № 5(36). Ч. 1. С. 13–18.

[16] Красовский Н.Н. Проблемы стабилизации управляемых движений. Дополнение к книге И.Г. Малкина "Теория устойчивости движения". М.: Наука, 1965, 533 с.

[17] Румянцев В.В. Об оптимальной стабилизации управляемых систем // ПММ. 1970. № 3. С. 440–456.

[18] Александров В.В., Болтянский В.Г., Лемак С.С. Оптимизация динамики управляемых систем. М.: МГУ, 2000, 303 с.

[19] Андреев А.С., Безгласный С.П. О стабилизации управляемых систем с гарантированной оценкой качества управления // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 1. С. 44–51.

[20] Безгласный С.П. О стабилизации по части переменных с оценкой качества управления // Вестник Самарского государственного университета. 2008. № 65. С. 209–224.

[21] Безгласный С.П., Куркина Е.В. Построение и стабилизация программных движений неавтономных гамильтоновых систем // Известия Саратовского университета. Новая серия. Сер.: Математика. Механика. Информатика. 2011. Т. 11. № 3(2). С. 74–80.

References

[1] Letov A.M. Flight dynamics and management. M., Nauka, 1969, 360 p. (in Russian)

[2] Construction of the systems of program motion. A.S. Galiullin [et al.]. M., Nauka, 1971, 352 p. (in Russian)

[3] Afanasyev V.N., Kolmanovskiy V.N., Nosov V.R. Mathematical theory of construction of the system of management. M., Vysshaia shkola, 1989, 447 p. (in Russian)

[4] Zubov V.I. The problem of sustainability of management processes. 2nd ed. SPb, NII khimii SPbGU, 2001, 353 p. (in Russian)

[5] Chernousko F.L., Ananyevsky I.M., Reshmin S.A. Methods of management by nonlinear mechanical systems. M., FIZMATLIT, 2006, 328 p. (in Russian)

[6] Bezglasnyi S.P. The stabilization of program motions of controlled nonlinear mechanical systems. *Korean J. Comput. and Appl. Math.*, 2004. Vol. 14. no. 1–2. pp. 251–266.

[7] Malkin I.G. The theory of stability of motion. M., Nauka, 1966, 530 p.

[8] Artstein Z. Topological dynamics of an ordinary equations. Differential Equations, 1977, Vol. 23, pp. 216–223.

[9] Andreev A.S. About stability and instability of zero solution of non-autonomous system. *PMM* [*Applied Mathematics and Mechanics*], 1984, Vol. 48, no. 2, pp. 225–232. (in Russian)

[10] Bezglasnyi S.P., Mysina O.A. Stabilization of program motions of a rigid body on a moving platform. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriia. Seriia: Matematika. Mekhanika. Informatika* [*Proceedings of Saratov University. New series. Series: Mathematics. Mechanics. Computer Science*], 2008, Vol. 8, no. 4, pp. 44–52. (in Russian)

[11] Bezglasnyi S.P., Zharenkov S.V. Construction of program motions of double pendulum of variable length with a moving point of suspension. *Izvestiia Samarskogo nauchnogo tsentra Rossiiskoi akademii nauk* [*Proceedings of Samara Scientific Center, Russian Academy of Sciences*], 2012, Vol. 14, no. 6–1, pp. 33–37. (in Russian)

[12] Bezglasnyi S.P., Batina E.S., Vorobyov A.S. Synthesis of asymptotically stable motions of robot arm manipulator. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriia. Seriia: Matematika. Mekhanika. Informatika* [*Proceedings of Saratov University. New series. Series: Mathematics. Mechanics. Computer Science*], 2013, Vol. 13, no. 4–1, pp. 36–42. (in Russian)

[13] Bezglasnyi S.P., Khudyakova M.A. Synthesis of asymptotically stable motions variable structure gyrostat. *Trudy MAI* [*Proceedings of MAI*], 2013, no. 66, pp. 2–16. (in Russian)

[14] Bezglasnyi S.P., Khudiakova M.A Construction and stabilization program of relative motions of the satellite. *Polet. Obshcherossiyskiy nauchno-tekhnicheskiy zhurnal* [*Flight. All-Russian scientific and technical journal*], 2012, no. 12, pp. 17–21. (in Russian)

[15] Alekseev A.V., Bezglasnyi S.P, Krasnikov V.S. Stabilization of steady motions of single-rotor gyrostat with a cavity filled with liquid of high viscosity. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo aerokosmicheskogo universiteta im. akademika S.P. Koroleva (natsional'nogo issledovatel'skogo universiteta)* [*Bulletin of Samara State Aerospace University (National Research University)*], 2012, no. 5–1(36), pp. 13–18. (in Russian)

[16] Krasovskii N.N. Problems of stabilization of controlled motions. Addition to the book by I.G. Malkin "Theory of stability of motion". M., Nauka, 1965, 533 p. (in Russian)

[17] Rumyantsev V.V. On optimal stabilization of controlled systems. *PMM* [*Applied Mathematics and Mechanics*], 1970, no. 3, pp. 440–456. (in Russian)

[18] Aleksandrov V.V. Boltyanskii V.G., Lemak S.S. Optimization of dynamics of control systems. M., MGU, 2000, 303 p. (in Russian)

[19] Andreev A.S., Bezglasnyi S.P. On stabilization of control systems with guaranteed assessment of quality of management. *PMM.* [*Applied Mathematics and Mechanics*], 1997, Vol. 61, no. 1, pp. 44–51. (in Russian)

[20] Bezglasnyi S.P. On stabilization of some of variables assessing the quality of management. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta* [*Vestnik of Samara State University*], 2008, no. 65, pp. 209–224. (in Russian)

[21] Bezglasnyi S.P. Construction and stabilization of program motions of non-autonomous Hamiltonian systems. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriia. Seriia: Matematika. Mekhanika. Informatika* [*Proceedings of Saratov University. New series. Series: Mathematics. Mechanics. Computer Science*], 2011, Vol. 11, no. 3–2, pp. 74–80 (in Russian).

Поступила в редакцию 7/V/2014;
в окончательном варианте — 7/V/2014.

STABILIZATION OF HAMILTONIAN SYSTEMS WITH A GUARANTEED ESTIMATE OF QUALITY OF MANAGEMENT

© 2014 E.V. Kurkina[2]

Stabilization problem with guaranteed estimate of quality of management of zero solution of nonautonomous Hamiltonian system was solved. It arises from the problem of optimal stabilization by reducing functional requirements for a estimate: instead of minimizing it is only necessary that it excelled to a pre-assessment. The solution is obtained by means of synthesis of active program control, acting to the system, and stabilizing control of feedback. The problem is solved analytically by the direct method of Lyapunov's stability theory with Lyapunov's function with constant sign derivatives. As examples, problems of synthesis and stabilization of program motions of homogeneous rod of variable length and variable-length pendulum in a rotating plane are solved.

Key words: Hamiltonian system, stabilization, guaranteed estimate, quality, management, rod, pendulum, variable length.

Paper received 7/ V/2014.
Paper accepted 7/ V/2014.

[2]Kurkina Ekaterina Vladimirovna (`ekaterina.kurkina@mail.ru`), Technology Department-1, OJSC "Giprovostokneft", Samara, 443041, Russian Federation.