УДК 519.57, 519.6:517

О КОНСТАНТАХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ КОМБИНАЦИЙ НЕКОТОРЫХ ПОДСИСТЕМ КОГЕРЕНТНЫХ СОСТОЯНИЙ

© 2014 М.В. Журавлев,[1] И.Я. Новиков, С.Н. Ушаков[2]

Константы неопределенности для когерентных состояний принимают минимально возможное значение. Но в задачах интерполяции и ортогонализации требуется от исходной системы функций переходить к линейным комбинациям. Изучается локализованность линейных комбинаций подсистем когерентных состояний, заданных на прямоугольной решетке. Получены формулы для констант неопределенности этих комбинаций в общем случае и при дополнительных предположениях на коэффициенты. Получена формула для константы неопределенности для линейной комбинации равномерных сдвигов функции Гаусса. Для частного случая узловой функции, построенной с помощью равномерных сдвигов функции Гаусса, приведены результаты численных расчетов.

Ключевые слова: константа неопределенности, когерентые состояния, преобразование Фурье, равномерные сдвиги одной функции, функция Гаусса, узловая функция, фреймы.

Введение

Системы функций вида

$$\exp\left(-\frac{(x-k\omega_1)^2}{2}\right)e^{i\,m\omega_2 x},\ k,m\in\mathbb{Z},$$

нашли свое применение в квантовой механике с первых же лет возникновения этой дисциплины (см. доказательство квантовой эргодической теоремы в монографии И. Неймана [1]). Интерес к данным функциям, получившим после работ Р. Глаубера [2] название "когерентные состояния", обусловлен тем, что для них константа неопределенности минимальна.

При решении задач интерполяции, ортогонализации, генерации волновых пакетов с помощью когерентных состояний возникает проблема оценки степени локализованности линейных комбинаций таких функций. Основным параметром системы

[1]Журавлев Михаил Васильевич (soracul@bk.ru), ОАО "Водоканал", 105005, Российская Федерация, г. Москва, Плетешковский пер., 2.

[2]Новиков Игорь Яковлевич (igor.nvkv@gmail.com), Ушаков Сергей Николаевич (ushakowww@ya.ru), кафедра функционального анализа и операторных уравнений Воронежского государственного университета, 394006, Российская Федерация, г. Воронеж, Университетская пл., 1.

когерентных состояний является величина $\omega_1 \cdot \omega_2$. При условии $\omega_1 \cdot \omega_2 \leqslant 2\pi$ данная система оказывается полной в $L_2(\mathbb{R})$ [3, гл. 3; 4; 5, гл. 1]. В случае строгого неравенства получаются переполненные системы (фреймы) [3, гл. 3; 6, гл. 1].

В данной работе рассматриваются линейные комбинации для неполных подсистем когерентных состояний. В общем случае формулы для констант неопределенности получаются достаточно громоздкими и малопригодными для численной реализации. При дополнительных предположениях на коэффициенты линейной комбинации и параметры системы формулы существенно упрощаются. Но даже и в этих случаях вычисление константы неопределенности оказывается нетривиальной задачей, что показывается на примере системы равномерных сдвигов функции Гаусса.

1. Обозначения, определения, формулы

Введем обозначения для когерентных состояний

$$f_{k,m}(\omega_1, \omega_2, x) = \exp\left(-\frac{(x-k\omega_1)^2}{2}\right) e^{i\, m\omega_2 x} \tag{1.1}$$

и для системы равномерных сдвигов функции Гаусса

$$f_k(\sigma, x) = \exp\left(-\frac{(x-k)^2}{2\,\sigma^2}\right). \tag{1.2}$$

В работе изучаются их линейные комбинации

$$F\,(\omega_1, \omega_2, x) = \sum_{k,m} c_{k,m} f_{k,m}(\omega_1, \omega_2, x), \tag{1.3}$$

$$G\,(\sigma, x) = \sum_{k} c_k f_k\,(\sigma, x)\,. \tag{1.4}$$

Все индексы в суммах здесь и в дальнейшем меняются от $-\infty$ до $+\infty$. Нас будет интересовать случай, когда $G\,(\sigma, x)$ — узловая функция, то есть для нее выполнена система равенств

$$G\,(\sigma, m) = \delta_{0m},\ m \in \mathbb{Z}, \tag{1.5}$$

где δ_{0m} – символ Кронекера.

Предполагается абсолютная сходимость рядов (1.3)–(1.4), чтобы можно было произвольным образом менять порядок суммирования и группировать слагаемые при перемножении рядов. Для этого достаточно, например, выполнения условий

$$c_{km} = O\big((k^2+m^2)^{-1-\varepsilon}\big)\,,\ c_k = O\big(k^{-1-\varepsilon}\big)\,,\ \varepsilon > 0.$$

Скалярное произведение функций $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и норма $\|\cdot\|$ в пространстве комплекснозначных функций $L_2(\mathbb{R})$ определяются обычным образом

$$\langle f, g\rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\overline{g(x)}\,dx, \qquad \|f\| = \left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,dx\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Пусть $f(x),\ xf(x) \in L_2(\mathbb{R})$, причем $\|f\| \neq 0$. Тогда радиус Δ_f функции f задается формулой

$$\Delta_f := \frac{1}{\|f\|}\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2|f(x)|^2\,dx - \frac{1}{\|f\|^2}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} x|f(x)|^2\,dx\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{\|f\|}\left\{\langle x^2 f(x), f(x)\rangle \ - \frac{1}{\|f\|^2}\langle x f(x), f(x)\rangle^2\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Аналогично определяется радиус $\Delta_{\widehat{f}}$ для преобразования Фурье $\widehat{f}$:

$$\Delta_{\widehat{f}} := \frac{1}{\|\widehat{f}\|}\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\xi^2|\widehat{f}(\xi)|^2\,d\xi - \frac{1}{\|\widehat{f}\|^2}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\xi|\widehat{f}(\xi)|^2\,d\xi\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}},$$

где преобразование Фурье имеет следующий вид:

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{-ix\xi}dx.$$

Произведение $u_f = \Delta_f \cdot \Delta_{\widehat{f}}$ называется константой неопределенности [6, с. 49; 7, с. 103].

При вычислении константы неопределенности возникают интегралы, значения которых выпишем заранее, воспользовавшись [8, с. 367]:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta^2(x-r)^2}\,e^{i\,\alpha x}\,dx = e^{i\,\alpha r}\,\frac{\sqrt{\pi}}{\beta}\,e^{-\frac{\alpha^2}{4\beta^2}}, \tag{1.6}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\beta^2(x-r)^2}\,e^{i\,\alpha x}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\beta}\,e^{i\,\alpha r}\,e^{-\frac{\alpha^2}{4\beta^2}}\left(r + \frac{i\alpha}{2\beta^2}\right), \tag{1.7}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\beta^2(x-r)^2}\,e^{i\,\alpha x}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4\beta^5}\,e^{i\,\alpha r}\,e^{-\frac{\alpha^2}{4\beta^2}}\left(2\beta^2 - \left(\alpha - 2ir\beta^2\right)^2\right), \tag{1.8}$$

где параметры $\alpha, \beta, r \in \mathbb{R},\ \beta > 0$.

2. Константа неопределенности в общем случае

Формула для константы неопределенности функции $F(\omega_1, \omega_2, x)$ получается слишком громоздкой, поэтому мы в виде лемм просто выпишем все ее составные части.

Лемма 1. Справедливы формулы

$$\|F(\omega_1,\omega_2,x)\|^2 = \sqrt{\pi}\sum_{k,m,k',m'} c_{k,m}\bar{c}_{k',m'}\exp\left(-\frac{(k-k')^2\,\omega_1^2}{4}\right)\times$$

$$\times\exp\left(-\frac{(m-m')^2\,\omega_2^2}{4}\right)\exp\left(\frac{i\,(k+k')(m-m')\omega_1\omega_2}{2}\right), \tag{2.1}$$

$$\langle xF(\omega_1,\omega_2,x)\,,F(\omega_1,\omega_2,x)\rangle = \sqrt{\pi}\sum_{k,m,k',m'} c_{k,m}\bar{c}_{k',m'}\times$$

$$\times\exp\left(-\frac{(k-k')^2\,\omega_1^2}{4}\right)\exp\left(-\frac{(m-m')^2\,\omega_2^2}{4}\right)\times$$

$$\times \exp\left(\frac{i\,(k+k')(m-m')\omega_1\omega_2}{2}\right)\left(\frac{k+k'}{2}\omega_1+i\frac{m-m'}{2}\omega_2\right), \qquad (2.2)$$

$$\langle x^2F\,(\omega_1,\omega_2,x)\,,F\,(\omega_1,\omega_2,x)\rangle=\frac{\sqrt{\pi}}{4}\sum_{k,m,k',m'}c_{k,m}\overline{c}_{k',m'}\times$$

$$\times \exp\left(-\frac{(k-k')^2\,\omega_1^2}{4}\right)\exp\left(\frac{i\,(k+k')(m-m')\omega_1\omega_2}{2}\right)\times$$

$$\times \exp\left(-\frac{(m-m')^2\,\omega_2^2}{4}\right)\left(2-((m-m')\,\omega_2-i\,(k+k')\,\omega_1)^2\right). \qquad (2.3)$$

Доказательство. Квадрат модуля функции имеет вид

$$|F\,(\omega_1,\omega_2,x)|^2=\sum_{k,m,k',m'}c_{k,m}\overline{c}_{k',m'}f_{k,m}(\omega_1,\omega_2,x)\overline{f}_{k',m'}(\omega_1,\omega_2,x). \qquad (2.4)$$

Преобразуем произведение функций в сумме

$$f_{k,m}(\omega_1,\omega_2,x)\cdot\overline{f}_{k'm'}(\omega_1,\omega_2,x)=$$

$$=\exp\left(-\frac{(x-k\omega_1)^2}{2}\right)e^{i\,m\omega_2x}\exp\left(-\frac{(x-k'\omega_1)^2}{2}\right)e^{-i\,m'\omega_2x}=$$

$$=\exp\left(-x^2+k\omega_1+k'\omega_1-\frac{k^2\omega_1^2+k'^2\omega_1^2}{2}\right)e^{i\,(m-m')\omega_2x}=$$

$$=\exp\left(-\left(x-\frac{k+k'}{2}\omega_1\right)^2+\frac{(k+k')^2\,\omega_1^2}{4}-\frac{k^2\omega_1^2+k'^2\omega_1^2}{2}\right)e^{i\,(m-m')\omega_2},$$

что приводит в итоге к соотношению

$$f_{k,m}(\omega_1,\omega_2,x)\cdot\overline{f}_{k'm'}(\omega_1,\omega_2,x)=$$

$$=\exp\left(-\left(x-\frac{k+k'}{2}\omega_1\right)^2-\frac{(k-k')^2\,\omega_1^2}{4}\right)e^{i\,(m-m')\omega_2x}. \qquad (2.5)$$

В формулах (1.6)–(1.8) положим $r=\frac{k+k'}{2}\omega_1$, $\beta=1$, $\alpha=(m-m')\omega_2$. Тогда, используя (2.5), получим

$$\langle f_{k,m}(\omega_1,\omega_2,x),\overline{f}_{k'm'}(\omega_1,\omega_2,x)\rangle=\sqrt{\pi}\exp\left(-\frac{(k-k')^2\,\omega_1^2}{4}\right)\times$$

$$\times \exp\left(-\frac{(m-m')^2\,\omega_2^2}{4}\right)\exp\left(\frac{i\,(k+k')(m-m')\omega_1\omega_2}{2}\right), \qquad (2.6)$$

$$\langle xf_{k,m}(\omega_1,\omega_2,x),\overline{f}_{k'm'}(\omega_1,\omega_2,x)\rangle=$$

$$=\sqrt{\pi}\exp\left(-\frac{(k-k')^2\,\omega_1^2}{4}\right)\exp\left(-\frac{(m-m')^2\,\omega_2^2}{4}\right)\times$$

$$\times \exp\left(\frac{i\,(k+k')(m-m')\omega_1\omega_2}{2}\right)\left(\frac{k+k'}{2}\omega_1+i\frac{m-m'}{2}\omega_2\right), \qquad (2.7)$$

$$\langle x^2f_{k,m}(\omega_1,\omega_2,x),\overline{f}_{k'm'}(\omega_1,\omega_2,x)\rangle=$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{4} \exp\left(-\frac{\left(k-k'\right)^2 \omega_1^2}{4}\right) \exp\left(-\frac{\left(m-m'\right)^2 \omega_2^2}{4}\right) \times$$

$$\times \exp\left(\frac{i\,(k+k')(m-m')\omega_1\omega_2}{2}\right)\left(2-\left(\left(m-m'\right)\omega_2 - i\left(k+k'\right)\omega_1\right)^2\right). \qquad (2.8)$$

Из формул (2.4), (2.6)–(2.8) следуют равенства (2.1)–(2.3). Лемма доказана.

Лемма 2. Справедливы формулы

$$\left\|\widehat{F}\left(\omega_1,\omega_2,\xi\right)\right\|^2 = \sqrt{\pi} \sum_{k,m,k',m'} c_{-m,k}\overline{c}_{-m',k'}\, e^{i\,(m'k'-mk)\omega_1\omega_2} \cdot \exp\left(-\frac{\left(k-k'\right)^2 \omega_2^2}{4}\right) \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{\left(m-m'\right)^2 \omega_1^2}{4}\right) \exp\left(\frac{i\,(k+k')(m-m')\omega_1\omega_2}{2}\right), \qquad (2.9)$$

$$\langle \xi \widehat{F}\left(\omega_1,\omega_2,\xi\right), \widehat{F}\left(\omega_1,\omega_2,\xi\right)\rangle = \sqrt{\pi} \sum_{k,m,k',m'} c_{-m,k}\overline{c}_{-m',k'}\, e^{i\,(m'k'-mk)\omega_1\omega_2} \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{\left(k-k'\right)^2 \omega_2^2}{4}\right) \exp\left(-\frac{\left(m-m'\right)^2 \omega_1^2}{4}\right) \times$$

$$\times \exp\left(\frac{i\,(k+k')(m-m')\omega_1\omega_2}{2}\right)\left(\frac{k+k'}{2}\omega_2 + i\frac{m-m'}{2}\omega_1\right), \qquad (2.10)$$

$$\langle \xi^2 \widehat{F}\left(\omega_1,\omega_2,\xi\right), \widehat{F}\left(\omega_1,\omega_2,\xi\right)\rangle = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \sum_{k,m,k',m'} c_{-m,k}\overline{c}_{-m',k'}\, e^{i\,(m'k'-mk)\omega_1\omega_2} \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{\left(k-k'\right)^2 \omega_2^2}{4}\right) \exp\left(\frac{i\,(k+k')(m-m')\omega_1\omega_2}{2}\right) \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{\left(m-m'\right)^2 \omega_1^2}{4}\right)\left(2-\left(\left(m-m'\right)\omega_1 - i\left(k+k'\right)\omega_2\right)^2\right). \qquad (2.11)$$

Доказательство. Сначала с помощью формулы (1.6), положив $\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\alpha = m\omega_2 - \xi$, $r = k\omega_1$, найдем $\widehat{f}_{k,m}$:

$$\widehat{f}_{k,m}(\omega_1,\omega_2,\xi) = \exp\left(-\frac{\left(\xi - m\omega_2\right)^2}{2}\right) e^{i\,(m\omega_2-\xi)k\omega_1} =$$

$$= e^{i\,mk\omega_1\omega_2} \exp\left(-\frac{\left(\xi - m\omega_2\right)^2}{2}\right) e^{-i\,k\omega_1\xi}.$$

В итоге $\widehat{f}_{k,m}(\omega_1,\omega_2,\xi) = e^{i\,mk\omega_1\omega_2} \cdot f_{m,-k}(\omega_2,\omega_1,\xi)$,

$$\widehat{F}\left(\omega_1,\omega_2,\xi\right) = \sum_{k,m} c_{-m,k} e^{-i\,mk\omega_1\omega_2} \cdot f_{k,m}(\omega_2,\omega_1,\xi).$$

Отсюда, используя (2.6)–(2.8), получаем утверждение леммы 2.

3. Основной результат

Для получения более содержательных результатов введем дополнительные условия на $F(\omega_1, \omega_2, x)$. Нас будет интересовать случай неполной системы когерентных состояний:

$$\omega_1\omega_2 = 4\pi N, \quad N \in \mathbb{N}. \tag{3.1}$$

Относительно коэффициентов $c_{k,m}$ предположим, что

$$c_{k,m} = c_k^{\omega_1} \cdot c_m^{\omega_2}, \tag{3.2}$$

где ω_1, ω_2 — это верхние индексы, означающие зависимость констант от этих параметров. Кроме того, будем считать, что линейная комбинация $F(\omega_1, \omega_2, x)$ является четной вещественной функцией. Отсюда коэффициенты $c_{k,m}$ вещественные и выполнено

$$c_k^{\omega_1} = c_{-k}^{\omega_1}, \quad c_m^{\omega_2} = c_{-m}^{\omega_2}. \tag{3.3}$$

Данные предположения естественны, если мы строим с помощью линейной комбинации когерентных состояний узловую функцию или проводим ортогонализацию с сохранением структуры сдвигов. В случае выполнения условий (3.1)–(3.3) удается разделить частотную и пространственную составляющие линейной комбинации (1.3).

Преобразуем формулы (2.1)–(2.3)

$$\|F(\omega_1, \omega_2, x)\|^2 = \sqrt{\pi} \sum_{k,m,k',m'} c_{k,m}\overline{c}_{k',m'} \cdot \exp\left(i\,2(k+k')(m-m')\pi N\right) \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{(k-k')^2\,\omega_1^2}{4}\right) \exp\left(-\frac{(m-m')^2\,\omega_2^2}{4}\right) =$$

$$= \sqrt{\pi} \sum_{k,k'} c_k^{\omega_1} c_{k'}^{\omega_1} \exp\left(-\frac{(k-k')^2\,\omega_1^2}{4}\right) \sum_{m,m'} c_m^{\omega_2} c_{m'}^{\omega_2} \exp\left(-\frac{(m-m')^2\,\omega_2^2}{4}\right).$$

Сделаем замену индексов $l = k - k'$, $k = l + k'$:

$$\sum_{k,k'} c_k^{\omega_1} c_{k'}^{\omega_1} \exp\left(-\frac{(k-k')^2\,\omega_1^2}{4}\right) = \sum_l \exp\left(-\frac{l^2\omega_1^2}{4}\right) \sum_{k'} c_{l+k'}^{\omega_1} c_{k'}^{\omega_1}.$$

Введем новое обозначение

$$a_l^w = \sum_{k'} c_{l+k'}^w c_{k'}^w. \tag{3.4}$$

Тогда

$$\sum_{k,k'} c_k^{\omega_1} c_{k'}^{\omega_1} \exp\left(-\frac{(k-k')^2\,\omega_1^2}{4}\right) = \sum_l \exp\left(-\frac{l^2\omega_1^2}{4}\right) a_l^{\omega_1}.$$

Аналогично преобразуем другой ряд

$$\sum_{m,m'} c_m^{\omega_2} c_{m'}^{\omega_2} \exp\left(-\frac{(m-m')^2\,\omega_2^2}{4}\right) = \sum_l \exp\left(-\frac{l^2\omega_1^2}{4}\right) a_l^{\omega_2}.$$

Введем обозначение

$$A_w = \sum_l \exp\left(-\frac{l^2 w^2}{4}\right) a_l^w, \tag{3.5}$$

или, что то же самое,

$$A_w = \sum_{k,k'} c_k^w c_{k'}^w \exp\left(-\frac{(k-k')^2 w^2}{4}\right). \tag{3.6}$$

Утверждение 1. Для коэффициентов a_l^w верно соотношение

$$a_{-l}^w = a_l^w. \tag{3.7}$$

□ В формуле (3.4) сделаем замену индекса $n = l + k'$, получим

$$a_l^w = \sum_{k'} c_{l+k'}^w c_{k'}^w = \sum_n c_n^w c_{n-l}^w.$$

Теперь вместо n запишем k'

$$\sum_{k'} c_{k'-l}^w c_{k'}^w = a_{-l}^w.$$

■

Следствие 1. Верно соотношение

$$\sum_l l \exp\left(-\frac{l^2 w^2}{4}\right) a_l^w = 0. \tag{3.8}$$

Следствие 2. Верно соотношение

$$\sum_{k,k'} c_k^w c_{k'}^w (k-k') \exp\left(-\frac{(k-k')^2 w^2}{4}\right) = 0. \tag{3.9}$$

В итоге

$$\|F(\omega_1, \omega_2, x)\|^2 = \sqrt{\pi} \cdot A_{\omega_1} \cdot A_{\omega_2}. \tag{3.10}$$

С помощью формул (3.1), (3.6) и (3.9) получим

$$\langle xF(\omega_1,\omega_2,x), F(\omega_1,\omega_2,x)\rangle =$$

$$= \sqrt{\pi} \cdot A_{\omega_2} \cdot \sum_{k,k'} c_k^{\omega_1} c_{k'}^{\omega_1} \left(\frac{k+k'}{2}\omega_1\right) \exp\left(-\frac{(k-k')^2 \omega_1^2}{4}\right) =$$

$$= \sqrt{\pi} \cdot A_{\omega_2} \cdot \sum_{k,k'} c_k^{\omega_1} c_{k'}^{\omega_1} \left(\frac{k-k'}{2}\omega_1\right) \exp\left(-\frac{(k-k')^2 \omega_1^2}{4}\right) +$$

$$+\sqrt{\pi}\omega_1 \cdot A_{\omega_2} \cdot \sum_{k,k'} c_k^{\omega_1} c_{k'}^{\omega_1} k' \exp\left(-\frac{(k-k')^2 \omega_1^2}{4}\right) =$$

$$= \sqrt{\pi}\omega_1 \cdot A_{\omega_2} \cdot \sum_{k,k'} c_k^{\omega_1} c_{k'}^{\omega_1} k' \exp\left(-\frac{(k-k')^2 \omega_1^2}{4}\right).$$

Сделав замену $l = k - k'$, $k = l + k'$ в последнем ряде, получим

$$\sum_{k,k'} c_k^{\omega_1} c_{k'}^{\omega_1} k' \exp\left(-\frac{(k-k')^2 \omega_1^2}{4}\right) = \sum_l \exp\left(-\frac{l^2\omega_1^2}{4}\right) \sum_{k'} k' c_{l+k'}^{\omega_1} c_{k'}^{\omega_1}.$$

Введем новые обозначения

$$b_l^w = \sum_{k'} k' c_{l+k'}^w c_{k'}^w, \tag{3.11}$$

$$B_w = \sum_l \exp\left(-\frac{l^2 w^2}{4}\right) b_l^w. \tag{3.12}$$

Утверждение 2. Для коэффициентов b_l^w верны соотношения

$$b_l^w = -b_{-l}^w, \ \ b_l^w = b_{-l}^w - l a_l^w.$$

☐ В силу (3.3)

$$b_l^w = \sum_{k'} k' c_{l+k'}^w c_{k'}^w = \sum_{k'} k' c_{l+k'}^w c_{-k'}^w,$$

сделаем замену $k = -k'$. Тогда

$$b_l^w = -\sum_k k c_{l-k}^w c_k^w = -\sum_k k c_{k-l}^w c_k^w = -b_{-l}^w.$$

Теперь в формуле (3.11) сделаем замену индекса $n = l + k'$, получим

$$b_l^w = \sum_n (n-l) c_n^w c_{n-l}^w = \sum_n n c_n^w c_{n-l}^w - l \sum_n c_n^w c_{n-l}^w = b_{-l}^w - l a_{-l}^w = b_{-l}^w - l a_l^w.$$

■

Следствие 3. Верно соотношение

$$b_l^w = -\frac{l}{2} a_l^w. \tag{3.13}$$

Следствие 4. Верно соотношение

$$B_w = -\sum_l \frac{l}{2} \exp\left(-\frac{l^2 w^2}{4}\right) a_l^w. \tag{3.14}$$

Следствие 5. Верно соотношение

$$B_w = 0. \tag{3.15}$$

В итоге

$$\langle xF(\omega_1, \omega_2, x), F(\omega_1, \omega_2, x)\rangle = 0. \tag{3.16}$$

В случае формулы (2.3) сначала распишем

$$((m-m')\,\omega_2 - i\,(k+k')\,\omega_1)^2 =$$

$$= (m-m')^2\,\omega_2^2 - 2i\,(m-m')\,(k+k')\,\omega_1\omega_2 - (k+k')^2\,\omega_1^2.$$

С помощью (3.1), (3.6) получим

$$\langle x^2 F(\omega_1, \omega_2, x), F(\omega_1, \omega_2, x)\rangle =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2} A_{\omega_1} \cdot A_{\omega_2} - \frac{\sqrt{\pi}\omega_2^2}{4} A_{\omega_1} \sum_{m,m'} c_m^{\omega_2} c_{m'}^{\omega_2} (m-m')^2 \exp\left(-\frac{(m-m')^2\,\omega_1^2}{4}\right) +$$

$$+ \frac{\sqrt{\pi}\omega_1^2}{4} A_{\omega_2} \sum_{k,k'} c_k^{\omega_1} c_{k'}^{\omega_1} (k+k')^2 \exp\left(-\frac{(k-k')^2\,\omega_1^2}{4}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2} A_{\omega_1} \cdot A_{\omega_2} - \frac{\sqrt{\pi}\omega_2^2}{4} A_{\omega_1} \sum_{m,m'} c_m^{\omega_2} c_{m'}^{\omega_2} (m-m')^2 \exp\left(-\frac{(m-m')^2\,\omega_1^2}{4}\right) +$$

$$+\frac{\sqrt{\pi}\omega_1^2}{4}A_{\omega_2}\sum_{k,k'}c_k^{\omega_1}c_{k'}^{\omega_1}\left(k-k'\right)^2\exp\left(-\frac{\left(k-k'\right)^2\omega_1^2}{4}\right)+$$

$$+\sqrt{\pi}\omega_1^2A_{\omega_2}\sum_{k,k'}c_k^{\omega_1}c_{k'}^{\omega_1}kk'\exp\left(-\frac{\left(k-k'\right)^2\omega_1^2}{4}\right).$$

Сделав замену $l=k-k'$, $k=l+k'$, преобразуем получившиеся ряды

$$\sum_{k,k'}c_k^{\omega_1}c_{k'}^{\omega_1}\left(k-k'\right)^2\exp\left(-\frac{\left(k-k'\right)^2\omega_1^2}{4}\right)=$$

$$=\sum_l l^2\exp\left(-\frac{l^2\omega_1^2}{4}\right)\sum_{k'}c_{l+k'}^{\omega_1}c_{k'}^{\omega_1}=\sum_l l^2\exp\left(-\frac{l^2\omega_1^2}{4}\right)a_l^{\omega_1}.$$

Аналогично

$$\sum_{m,m'}c_m^{\omega_2}c_{m'}^{\omega_2}\left(m-m'\right)^2\exp\left(-\frac{\left(m-m'\right)^2\omega_2^2}{4}\right)=\sum_l l^2\exp\left(-\frac{l^2\omega_2^2}{4}\right)a_l^{\omega_2}.$$

И последний ряд

$$\sum_{k,k'}c_k^{\omega_1}c_{k'}^{\omega_1}kk'\exp\left(-\frac{\left(k-k'\right)^2\omega_1^2}{4}\right)=$$

$$=\sum_l\exp\left(-\frac{l^2\omega_1^2}{4}\right)\sum_{k'}(l+k')k'c_{l+k'}^{\omega_1}c_{k'}^{\omega_1}=\sum_l l\exp\left(-\frac{l^2\omega_1^2}{4}\right)b_l^{\omega_1}+$$

$$+\sum_l\exp\left(-\frac{l^2\omega_1^2}{4}\right)\sum_{k'}{k'}^2c_{l+k'}^{\omega_1}c_{k'}^{\omega_1}.$$

Введем обозначения

$$d_l^{\omega_1}=\sum_{k'}{k'}^2c_{l+k'}^{\omega_1}c_{k'}^{\omega_1},$$

$$D_{\omega_1}=\sum_l\exp\left(-\frac{l^2\omega_1^2}{4}\right)d_l^{\omega_1},$$

$$C_w=\sum_l l^2\exp\left(-\frac{l^2w^2}{4}\right)a_l^w.$$

Тогда

$$\sum_{k,k'}c_k^{\omega_1}c_{k'}^{\omega_1}\left(k-k'\right)^2\exp\left(-\frac{\left(k-k'\right)^2\omega_1^2}{4}\right)=C_{\omega_1},$$

$$\sum_{m,m'}c_m^{\omega_2}c_{m'}^{\omega_2}\left(m-m'\right)^2\exp\left(-\frac{\left(m-m'\right)^2\omega_2^2}{4}\right)=C_{\omega_2}.$$

Для вычисления последнего ряда воспользуемся (3.15)

$$\sum_{k,k'}c_k^{\omega_1}c_{k'}^{\omega_1}kk'\exp\left(-\frac{\left(k-k'\right)^2\omega_1^2}{4}\right)=-\frac{1}{2}C_{\omega_1}+D_{\omega_1}.$$

В итоге

$$\left\langle x^2F\left(\omega_1,\omega_2,x\right),F\left(\omega_1,\omega_2,x\right)\right\rangle=\frac{\sqrt{\pi}}{2}A_{\omega_1}\cdot A_{\omega_2}-$$

$$-\frac{\sqrt{\pi}\omega_2^2}{4}A_{\omega_1}\cdot C_{\omega_2}-\frac{\sqrt{\pi}\omega_1^2}{4}A_{\omega_2}\cdot C_{\omega_1}+\sqrt{\pi}\omega_1^2 A_{\omega_2}\cdot D_{\omega_1}. \tag{3.17}$$

Теперь найдем $\Delta_F^2(\omega_1,\omega_2)$, используя (2.1)–(2.3)

$$\Delta_F^2(\omega_1,\omega_2)=$$

$$=\frac{\langle x^2F(\omega_1,\omega_2,x),F(\omega_1,\omega_2,x)\rangle}{\|F(\omega_1,\omega_2,x)\|^2}-\frac{\langle xF(\omega_1,\omega_2,x),F(\omega_1,\omega_2,x)\rangle^2}{\|F(\omega_1,\omega_2,x)\|^4}=$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{\pi}}{2}A_{\omega_1}\cdot A_{\omega_2}-\frac{\sqrt{\pi}\omega_2^2}{4}A_{\omega_1}\cdot C_{\omega_2}-\frac{\sqrt{\pi}\omega_1^2}{4}A_{\omega_2}\cdot C_{\omega_1}+\sqrt{\pi}\omega_1^2A_{\omega_2}\cdot D_{\omega_1}}{\sqrt{\pi}\cdot A_{\omega_1}\cdot A_{\omega_2}}=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{\omega_2^2}{4}\frac{C_{\omega_2}}{A_{\omega_2}}-\frac{\omega_1^2}{4}\frac{C_{\omega_1}}{A_{\omega_1}}+\omega_1^2\frac{D_{\omega_1}}{A_{\omega_1}}.$$

В итоге

$$\Delta_F^2(\omega_1,\omega_2)=\frac{1}{2}-\frac{\omega_2^2}{4}\frac{C_{\omega_2}}{A_{\omega_2}}-\frac{\omega_1^2}{4}\frac{C_{\omega_1}}{A_{\omega_1}}+\omega_1^2\frac{D_{\omega_1}}{A_{\omega_1}}.$$

Теперь найдем $\Delta_{\widehat{F}}^2(\omega_1,\omega_2)$. Из формул (3.2) и (3.3) следует, что

$$c_{-m,k}=c_m^{\omega_1}c_k^{\omega_2}.$$

Отсюда, из формулы (2.11) и соотношения (3.1) получим

$$\Delta_{\widehat{F}}^2(\omega_1,\omega_2)=\frac{1}{2}-\frac{\omega_1^2}{4}\frac{C_{\omega_1}}{A_{\omega_1}}-\frac{\omega_2^2}{4}\frac{C_{\omega_2}}{A_{\omega_2}}+\omega_2^2\frac{D_{\omega_2}}{A_{\omega_2}}.$$

Теорема 1. Пусть выполнены условия (3.1)–(3.3), тогда верна формула

$$u_F^2(\omega_1,\omega_2)=\left(\frac{1}{2}-\frac{\omega_2^2}{4}\frac{C_{\omega_2}}{A_{\omega_2}}-\frac{\omega_1^2}{4}\frac{C_{\omega_1}}{A_{\omega_1}}+\omega_1^2\frac{D_{\omega_1}}{A_{\omega_1}}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{1}{2}-\frac{\omega_1^2}{4}\frac{C_{\omega_1}}{A_{\omega_1}}-\frac{\omega_2^2}{4}\frac{C_{\omega_2}}{A_{\omega_2}}+\omega_2^2\frac{D_{\omega_2}}{A_{\omega_2}}\right).$$

Следствие 6. Пусть в условиях теоремы

$$\omega_1=\omega_2=2\sqrt{\pi N},$$

тогда верна формула

$$u_F\left(2\sqrt{\pi N},2\sqrt{\pi N}\right)=\frac{1}{2}-2\pi N\frac{C_{2\sqrt{\pi N}}}{A_{2\sqrt{\pi N}}}+4\pi N\frac{D_{2\sqrt{\pi N}}}{A_{2\sqrt{\pi N}}}.$$

Следствие 7. Пусть в условиях теоремы

$$\omega_1=\omega_2=2\sqrt{\pi},$$

тогда верна формула

$$u_F\left(2\sqrt{\pi},2\sqrt{\pi}\right)=\frac{1}{2}-4\pi\frac{\sum\limits_{l=1}^{\infty}l^2e^{-l^2\pi}a_l^{2\sqrt{\pi}}-\left(d_0^{2\sqrt{\pi}}+2\sum\limits_{l=1}^{\infty}e^{-l^2\pi}d_l^{2\sqrt{\pi}}\right)}{a_0^{2\sqrt{\pi}}+2\sum\limits_{l=1}^{\infty}e^{-l^2\pi}a_l^{2\sqrt{\pi}}},$$

где

$$a_l^{2\sqrt{\pi}}=\sum_k c_{l+k}^{2\sqrt{\pi}}c_k^{2\sqrt{\pi}},\qquad d_l^{2\sqrt{\pi}}=\sum_k k^2c_{l+k}^{2\sqrt{\pi}}c_k^{2\sqrt{\pi}}.$$

4. Константа неопределенности для $G(\sigma, x)$

В этом разделе выводится формула для константы неопределенности линейной комбинации функций $f_k(\sigma, x)$, которые можно рассматривать в качестве подсистемы когерентных состояний. Кроме того, приводятся числовые значения этой величины для узловой функции, построенной из целочисленных сдвигов Гаусса.

Заметим, что

$$f_k(\sigma, x) = f_{k,0}\left(\frac{1}{\sigma}, 0, \frac{x}{\sigma}\right).$$

Тогда отсюда и из формулы (2.5) получим

$$f_k(\sigma, x)\,\overline{f}_m(\sigma, x) = \exp\left(-\frac{1}{\sigma^2}\left(t - \frac{k+m}{2}\right)^2\right)\exp\left(-\frac{(k-m)^2}{4\sigma^2}\right). \tag{4.1}$$

Квадрат модуля G имеет вид

$$|G(\sigma, x)|^2 = \sum_{k,m} c_k\overline{c}_m f_k(\sigma, x)\, f_m(\sigma, x).$$

В формулах (1.6)–(1.8) положим $r = \frac{k+m}{2}$, $\beta = \frac{1}{\sigma}$, $\alpha = 0$. Тогда, используя (4.1), получим

$$\langle f_k(\sigma, x), \overline{f}_m(\sigma, x)\rangle = \sqrt{\pi}\sigma\exp\left(-\frac{(k-m)^2}{4\sigma^2}\right),$$

$$\langle x f_k(\sigma, x), \overline{f}_m(\sigma, x)\rangle = \sqrt{\pi}\sigma\,\frac{k+m}{2}\exp\left(-\frac{(k-m)^2}{4\sigma^2}\right),$$

$$\langle x^2 f_k(\sigma, x), \overline{f}_m(\sigma, x)\rangle = \frac{\sqrt{\pi}}{4}\exp\left(-\frac{(k-m)^2}{4\sigma^2}\right)\left(2\sigma^3 + (k+m)^2\sigma\right).$$

Соответственно,

$$\|G(\sigma, x)\|^2 = \sqrt{\pi}\sigma\sum_{k,m} c_k\overline{c}_m\exp\left(-\frac{(k-m)^2}{4\sigma^2}\right), \tag{4.2}$$

$$\langle xG(\sigma, x), \overline{G}(\sigma, x)\rangle = \sqrt{\pi}\sigma\sum_{k,m} c_k\overline{c}_m\frac{k+m}{2}\exp\left(-\frac{(k-m)^2}{4\sigma^2}\right), \tag{4.3}$$

$$\langle x^2 G(\sigma, x), \overline{G}(\sigma, x)\rangle =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{4}\sum_{k,m} c_k\overline{c}_m\exp\left(-\frac{(k-m)^2}{4\sigma^2}\right)\left(2\sigma^3 + (k+m)^2\sigma\right). \tag{4.4}$$

Преобразование Фурье-функции $f_k(\sigma, x)$ вычислим с помощью формулы (1.6), положив $\beta = \frac{1}{\sqrt{2}\,\sigma}$, $\alpha = -\xi$, $r = k$:

$$\widehat{f}_k(\sigma, \xi) = \sigma\exp\left(-\frac{\xi^2\sigma^2}{2}\right)e^{-i\,k\xi},$$

$$\widehat{f}_k(\sigma, \xi)\overline{\widehat{f}}_m(\sigma, \xi) = \sigma^2\exp\left(-\xi^2\sigma^2\right)e^{i\,(m-k)\xi}.$$

Теперь найдем $\widehat{G}(\sigma, \xi)$:

$$\widehat{G}(\sigma, \xi) = \sigma\sum_{k,m} c_k\exp\left(-\frac{\xi^2\sigma^2}{2}\right)e^{-i\,k\xi}.$$

Квадрат ее модуля

$$\left|\widehat{G}(\sigma,\xi)\right|^2 = \sigma^2 \sum_{k,m} c_k \overline{c}_m \exp\left(-\xi^2\sigma^2\right) e^{i\,(m-k)\xi}. \tag{4.5}$$

В формулах (1.6)–(1.8) положим $r=0$, $\beta=\sigma$, $\alpha=m-k$. Тогда, используя (4.5), получим

$$\left\|\widehat{G}(\sigma,\xi)\right\|^2 = \sqrt{\pi}\,\sigma \sum_{k,m} c_k \overline{c}_m \exp\left(-\frac{(k-m)^2}{4\sigma^2}\right),$$

$$\langle \xi\, \widehat{G}(\sigma,\xi), \overline{\widehat{G}}\,(\sigma,\xi)\rangle = i\frac{\sqrt{\pi}}{2\sigma} \sum_{k,m} c_k \overline{c}_m\,(k-m) \exp\left(-\frac{(k-m)^2}{4\sigma^2}\right),$$

$$\langle \xi^2\, \widehat{G}(\sigma,\xi), \overline{\widehat{G}}\,(\sigma,\xi)\rangle =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{4\sigma^3} \sum_{k,m} c_k \overline{c}_m \exp\left(-\frac{(k-m)^2}{4\sigma^2}\right)\left(2\sigma^2-(k-m)^2\right).$$

Сделав замену индекса $l=k-m$ и введя новые обозначения

$$a_l = \sum_m c_{l+m}\overline{c}_m,\;\; b_l = \sum_m m c_{l+m}\overline{c}_m,\;\; d_l = \sum_m m^2 c_{l+m}\overline{c}_m, \tag{4.6}$$

получим

$$\|G\,(\sigma,x)\|^2 = \sqrt{\pi}\sigma \sum_l a_l \exp\left(-\frac{l^2}{4\sigma^2}\right), \tag{4.7}$$

$$\langle xG\,(\sigma,x)\,,\overline{G}\,(\sigma,x)\rangle = \sqrt{\pi}\sigma \sum_l \left(a_l\frac{l}{2}+b_l\right)\exp\left(-\frac{l^2}{4\sigma^2}\right), \tag{4.8}$$

$$\langle x^2 G\,(\sigma,x)\,,\overline{G}\,(\sigma,x)\rangle =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{4} \sum_l \exp\left(-\frac{l^2}{4\sigma^2}\right)\left(2\sigma^3 a_l + \left(l^2 a_l + 4lb_l + 4d_l\right)\sigma\right). \tag{4.9}$$

$$\left\|\widehat{G}(\sigma,\xi)\right\|^2 = \sqrt{\pi}\,\sigma \sum_l a_l \exp\left(-\frac{l^2}{4\sigma^2}\right), \tag{4.10}$$

$$\langle \xi\, \widehat{G}(\sigma,\xi), \overline{\widehat{G}}\,(\sigma,\xi)\rangle = i\frac{\sqrt{\pi}}{2\sigma} \sum_l a_l l \exp\left(-\frac{l^2}{4\sigma^2}\right), \tag{4.11}$$

$$\langle \xi^2\, \widehat{G}(\sigma,\xi), \overline{\widehat{G}}\,(\sigma,\xi)\rangle = \frac{\sqrt{\pi}}{4\sigma^3} \sum_l a_l \exp\left(-\frac{l^2}{4\sigma^2}\right)\left(2\sigma^2-l^2\right). \tag{4.12}$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия $c_k \in \mathbb{R}$, $c_k = c_{-k}$. Тогда

$$u_G = \left(\frac{\sigma^2}{2} - \frac{\sum\limits_l l^2 a_l \exp\left(-\frac{l^2}{4\sigma^2}\right)}{4\sum\limits_l a_l \exp\left(-\frac{l^2}{4\sigma^2}\right)} + \frac{\sum\limits_l d_l \exp\left(-\frac{l^2}{4\sigma^2}\right)}{\sum\limits_l a_l \exp\left(-\frac{l^2}{4\sigma^2}\right)}\right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{2\sigma^2} - \frac{\sum\limits_l l^2 a_l \exp\left(-\frac{l^2}{4\sigma^2}\right)}{4\sigma^4 \sum\limits_l a_l \exp\left(-\frac{l^2}{4\sigma^2}\right)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Доказательство. Из соотношений (3.8) и (3.13) следует, что (4.8) и (4.11) равны нулю. Воспользовавшись (4.7)–(4.12), получим

$$u_G^2 = \frac{\sum\limits_l \exp\left(-\frac{l^2}{4\sigma^2}\right)\left(2\sigma^2 a_l + \left(4d_l - l^2 a_l\right)\right)}{4\sum\limits_l a_l \exp\left(-\frac{l^2}{4\sigma^2}\right)} \cdot \frac{\sum\limits_l a_l \exp\left(-\frac{l^2}{4\sigma^2}\right)\left(2\sigma^2 - l^2\right)}{4\,\sigma^4 \sum\limits_l a_l \exp\left(-\frac{l^2}{4\sigma^2}\right)} =$$

$$= \left(\frac{\sigma^2}{2} - \frac{\sum\limits_l l^2 a_l \exp\left(-\frac{l^2}{4\sigma^2}\right)}{4\sum\limits_l a_l \exp\left(-\frac{l^2}{4\sigma^2}\right)} + \frac{\sum\limits_l d_l \exp\left(-\frac{l^2}{4\sigma^2}\right)}{\sum\limits_l a_l \exp\left(-\frac{l^2}{4\sigma^2}\right)}\right) \cdot \left(\frac{1}{2\sigma^2} - \frac{\sum\limits_l l^2 a_l \exp\left(-\frac{l^2}{4\sigma^2}\right)}{4\sigma^4 \sum\limits_l a_l \exp\left(-\frac{l^2}{4\sigma^2}\right)}\right).$$

Теорема 2 доказана.

В таблице приведены значения радиусов Δ_G, $\Delta_{\widehat{G}}$ и констант неопределенности при разных значениях параметра σ.

Таблица

Константа неопределенности для узловой функции

σ	Δ_G	$\Delta_{\widehat{G}}$	u_G
$0,10$	$0,070711$	$7,071068$	$0,500000$
$0,20$	$0,141421$	$3,535535$	$0,500000$
$0,30$	$0,211635$	$2,363315$	$0,500160$
$0,40$	$0,272663$	$1,870185$	$0,509930$
$0,50$	$0,322888$	$1,717851$	$0,554673$
$0,60$	$0,373692$	$1,689765$	$0,631451$
$0,70$	$0,426811$	$1,696535$	$0,724099$
$0,80$	$0,481323$	$1,711056$	$0,823571$
$0,90$	$0,536669$	$1,725660$	$0,926108$
$1,00$	$0,592555$	$1,738413$	$1,030105$
$1,10$	$0,648813$	$1,749076$	$1,134823$
$1,20$	$0,705339$	$1,757878$	$1,239899$
$1,30$	$0,762064$	$1,765138$	$1,345149$
$1,40$	$0,818943$	$1,771152$	$1,450473$
$1,50$	$0,875943$	$1,776167$	$1,555821$
$1,60$	$0,933039$	$1,780378$	$1,661162$
$1,70$	$0,990213$	$1,783942$	$1,766482$
$1,80$	$1,047452$	$1,786978$	$1,871774$
$1,90$	$1,104745$	$1,789579$	$1,977047$
$2,00$	$1,165617$	$1,791853$	$2,088614$

Для $G(\sigma, x)$ коэффициенты известны ([9], [10]) и вычисляются по формуле

$$d_{G,k}(\sigma) = \frac{1}{C(\sigma)} \exp\left(\frac{k^2}{2\sigma^2}\right) \sum_{r=|k|}^{\infty} (-1)^r \exp\left(-\frac{(r+0.5)^2}{2\sigma^2}\right),$$

где

$$C(\sigma) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} (4r+1) \exp\left(-\frac{(2r+0.5)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Аспекты численной реализации нахождения $d_{G,k}(\sigma)$ обсуждаются в [11]. Стоит отметить быстрый рост коэффициентов $d_{G,k}(\sigma)$ при увеличении σ. Это обстоятельство не позволяет получить достоверные значения u_G при $\sigma \geqslant 2.0$.

Литература

[1] Нейман И. Математические основы квантовой механики / пер. с нем.; под ред. Н.Н. Боголюбова. М.: Наука, 1964. 367 с.

[2] Глаубер Р. Оптическая когерентность и статистика фотонов: курс лекций М.: МИР, 1966. 178 с.

[3] Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001. 464 с.

[4] Переломов А.М. Замечание о полноте системы когерентных состояний // ТМФ. 1971. Т. 6. № 2. С. 213–224.

[5] Переломов А.М. Обобщенные когерентные состояния и их применения. М.: Наука, 1987. 272 с.

[6] Новиков И.Я., Протасов В.Ю., Скопина М.А. Теория всплесков. М.: Физматлит, 2005. 616 с.

[7] Чуи Ч. Введение в вейвлеты. М.: Мир, 2001. 412 с.

[8] Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды: в 3 т. Т. 1. Элементарные функции. 2-е изд., испр. М.: Физматлит, 2002. 800 с.

[9] Maz'ya V., Schmidt G. On approximate approximations using Gaussian kernels // IMA J. Num. Anal. 1996. V. 16. P. 13–29.

[10] Maz'ya V. Approximate approximations // AMS Mathematical Surveys and Monographs. 2007. V. 141. 350 p.

[11] Журавлев М.В., Минин Л.А., Ситник С.М. О вычислительных особенностях интерполяции с помощью целочисленных сдвигов гауссовых функций // Научные ведомости Белгородского государственного университета. 2009. № 13(68). Вып. 17/2. С. 89–99.

References

[1] Neumann I. Mathematical Foundations of Quantum Mechanics: Translation from German. N.N. Bogolyubov (ed.) M., Nauka, 1964, 367 p. (in Russian)

[2] Glauber R. Optical coherence and statistics of photons. Course of lectures M., MIR, 1966, 178 p. (in Russian)

[3] Daubechies I. Ten lectures on wavelets. Izhevsk: NITs "Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika", 2001, 464 p (in Russian)

[4] Perelomov A.M. On the completeness of a system of coherent states, TMF, 1971, Vol. 6, no. 2, pp. 213–224 (in Russian)

[5] Perelomov A.M. Generalized coherent states and their applications. M., Nauka, 1987, 272 p. (in Russian)

[6] Novikov I.Ya., Protasov V.Yu., Skopina M.A. Wavelet Theory. M., Phizmatlit, 2005, 616 p. (in Russian)

[7] Chui Ch. An Introduction to Wavelets. M., Mir, 2001, 412 p. (in Russian)

[8] Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I. Integrals and Series: in 3 Vol. Vol. 1. Elementary functions. 2-nd edition, corrected. M., Phizmatlit, 2002, 800 p. (in Russian)

[9] Maz'ya V., Schmidt G. On approximate approximations using Gaussian kernels // IMA J. Num. Anal. 1996. Vol. 16. P. 13–29.

[10] Maz'ya V. Approximate approximations. *AMS Mathematical Surveys and Monographs.* 2007. Vol. 141. 350 p.

[11] Zhuravlev M.V., Minin L.A., Sitnik S.M. On computing features of interpolation by means of integer shifts of Gaussian functions. *Nauchnye vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta* [Scientific Bulletin of Belgorod State University], 2009, no. 13(68), Vol. 17/2, pp. 89–99 (in Russian)

Поступила в редакцию 25/*IV*/2014;
в окончательном варианте — 25/*IV*/2014.

ON THE UNCERTAINTY CONSTANTS FOR LINEAR COMBINATION OF SOME SUBSYSTEMS OF COHERENT STATES

 M.V. Zhuravlev[3] I.Ya. Novikov, S.N. Ushakov[4]

Uncertainty constants for coherent states obtain irreduciable value. But problems of interpolation and orthogonalization requires the original system of functions to move to linear combinations. Localization of linear combinations of coherent states subsystems which have been set on a rectangular lattice are studied. Formulas for uncertainty constants of these combinations in general case and at additional assumptions on coefficients are received. Formulas for uncertainty constants of linear combinations of uniform shifts of Gauss function in general case and at additional assumptions on coefficients are received. Results of numerical calculations are given for the interpolating scaling functions constructed for uniform shifts of Gauss function.

Key words: uncertainty constant, coherent states, Fourier transformation, uniform shifts of single function, Gaussian function, node function, frames.

Paper received 25/*IV*/2014.
Paper accepted 25/*IV*/2014.

[3]Zhuravlev Mikhail Vasilievich (soracul@bk.ru), OJSC "Vodokanal", Moscow, 105005, Russian Federation

[4]Novikov Igor Yakovlevich (igor.nvkv@gmail.com), Ushakov Sergey Nikolaevich (ushakowww@ya.ru), the Dept. of Functional Analysis and Operator Equations, Voronezh State University, Voronezh, 394006, Russian Federation