УДК 532.546

В.И. Астафьев, А.Е. Касаткин[1]

ЗАДАЧА О ПРОДВИЖЕНИИ ВОДОНЕФТЯНОГО КОНТАКТА ПРИ ПОРШНЕВОМ ВЫТЕСНЕНИИ НЕФТИ ВОДОЙ В ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ[2]

Прогнозирование движения водонефтяного контакта имеет большое значение в теории заводнения: знание о характере совместного течения нефти и вытесняющей ее воды в недрах пласта позволяет оптимизировать систему его разработки. Простейшим представлением о совместной фильтрации является модель "разноцветных" жидкостей, полагающая нефть и воду физически неразличимыми. В настоящей работе рассматривается более сложная теория "поршневого" вытеснения, учитывающая различия в вязкостях жидкостей. Нефтеносный пласт полагается однородным и бесконечным, фиксированной толщины, покрытым двоякопериодической решеткой с добывающими и нагнетательными скважинами в ячейках.

Ключевые слова: заводнение, поршневое вытеснение нефти водой, водонефтяной контакт, фронт заводнения, задача трассировки, сингулярный интеграл, дзета-функция Вейерштрасса, коэффициент охвата по площади, время прорыва воды.

Введение

Заводнение — одна из старейших технологий в нефтяном промысле, доказавшая свою эффективность за десятилетия применения на месторождениях различных стран-нефтедобытчиков. Известно, что к концу XX – началу XXI в. рассматриваемый метод извлечения нефти обеспечивал 90 % "черного золота", добытого в РФ [1], и 50 % в США [2; 3].

Основная цель заводнения, как и любого метода повышения нефтеотдачи, заключается в извлечении большего объема нефти по сравнению с результатами "первичной добычи" — режима, при котором ископаемое топливо добывается за счет внутренней энергии пласта [3]. Для этого в горную породу через специально пробуренные (или ранее отключенные добывающие) скважины закачивается т.н. вытесняющий агент (как правило, вода): в результате обеспечивается восстановление упавшего пластового давления, благодаря чему повышаются показатели нефтедобычи.

Астафьев Владимир Иванович (vladimir.astafev@mail.ru), кафедра разработки и эксплуатации нефтяных и газовых месторождений, Самарский государственный технический университет, 443100, Российская Федерация, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Касаткин Андрей Евгеньевич (darantion_yar@mail.ru), кафедра безопасности информационных систем, Самарский государственный университет, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

[2]Работа выполнена в рамках базовой части госзадания СамГТУ, финансируемого Минобрнауки России, и поддержана грантом РФФИ 14-01-97041-р_поволжье_а.

Одним из важнейших вопросов в прогнозировании хода заводнения является мониторинг водонефтяного контакта (ВНК): подобные задачи аналитически разрешимы лишь в простейших случаях и являются одними из наиболее сложных. Вопрос о продвижении ВНК имеет более чем полувековую историю и за время своего существования "обзавелся" множеством решений для различных моделей фильтрации и допущений, связанных с параметрами процесса: одним из распространенных представлений о совместном течении жидкостей является поршневое вытеснение [4]. Согласно этой модели физические свойства нефти и воды полагаются различными: при этом граница раздела жидкостей представляется бесконечно тонкой и совпадающей с ВНК и фронтом заводнения. Задача о продвижении ВНК при различных физических свойствах (вязкостях) нефти и воды была впервые поставлена в середине XX в. Маскетом [5] и с тех пор неоднократно вызывала интерес у многих исследователей. Так, среди возможных путей решения можно назвать метод недеформируемых трубок тока, описанный в общем виде И.А. Чарным [6]. Иной подход, основанный на теории потенциалов, был предложен В.Л. Даниловым: в своей работе [7] исследователь свел исходную задачу мониторинга ВНК во времени к нелинейному интегродифференциальному уравнению. Также автор предложил численный метод для решения полученной задачи Коши. Метод Данилова далее был распространен Фазлыевым и на случай площадного заводнения: в своей работе [8] автор построил и численно решил интегродифференциальное уравнение для пятиточечной схемы расположения скважин. Помимо описанных выше подходов, следует также отметить идею В.И. Пилатовского [9], изначально реализованную для двухжидкостной фильтрации в тонком наклонном пласте: решая задачу о продвижении границы раздела двух жидкостей к прямолинейной цепочке скважин, автор использовал сингулярный интеграл с ядром Гильберта и технику интегродифференциальных уравнений.

В настоящем исследовании также была поставлена и решена задача о продвжиении ВНК во времени при поршневом вытеснении нефти водой: при этом для моделирования нефтеносного резервуара и разбуренных на его поверхности скважин использовалось представление из работы [10]. Таким образом, текущее исследование расширяет результаты, полученные ранее в [10], в рамках модели "разноцветных" жидкостей. Впервые введенное Герольдом [11], это представление исключает физические различия между водой и нефтью, а также область смешанных жидкостей на границе раздела. Благодаря этому функция скорости фильтрации сохраняет непрерывность на ВНК: при этом возможно построение линий тока, вдоль которых продвигаются отслеживаемые частицы жидкости (трассеры), образующие водонефтяной контакт. В случае же поршневого вытеснения скорость фильтрации терпит разрыв касательной комопненты на границе раздела "вода-нефть": в результате вопрос о мониторинге водонефтяного контакта в модели поршневого вытеснения сводится к задаче с неизвестной границей, где продвижение каждой отслеживаемой частицы зависит от положения всех трассеров на предыдущем шаге.

1. Задача о продвижении ВНК. Математическая модель

Согласно описаниям из работы [10], моделируемый пласт покрывается двоякопериодической решеткой с добывающими и нагнетательными скважинами в ячейках: последние формируются на основе повторяющихся элементов выбранной схемы заводнения, как показано на рис.1. На изображении слева представлены повторяющиеся наборы (выделены пунктиром) из четырех нагнетательных (белые треугольники) и одной добывающей (черные круги) скважин. На изображении справа представлена выделенная ячейка соответствующей схеме двоякопериодической решетки: граница ячейки выделена сплошной линией.

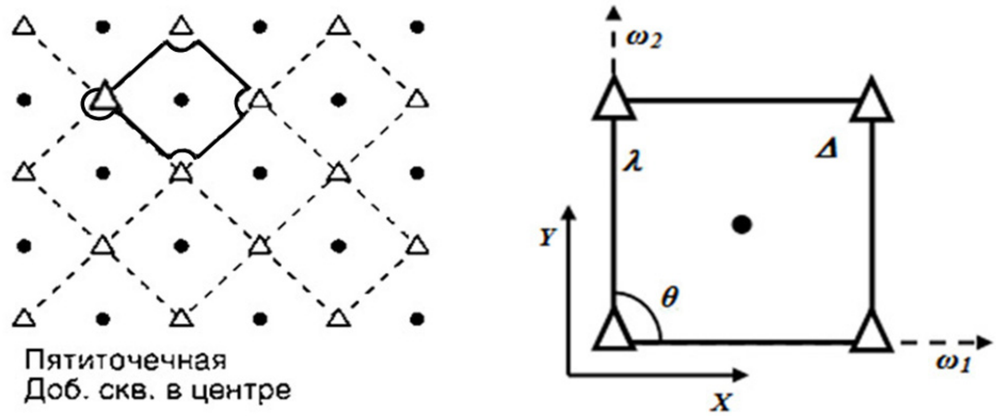


Рис. 1. Пример построения двоякопериодической решетки для пятиточечной схемы заводнения: границы повторяющихся элементов на изображении слева выделены пунктиром. Справа представлена ячейка двоякопериодической решетки, а также параметры, определяющие ее геометрию: границы ячейки выделены сплошной линией на обоих изображениях

Двоякопериодическая решетка описывается рядом числовых характеристик, представленных на рис. 1 (справа) и определяющих размеры и форму ее ячеек. Узлы $\omega = m\omega_1 + n\omega_2/m, n \in Z$ решетки определяются параметрами ω_1 и $\omega_2 = \lambda e^{i\theta}$. θ обозначает угол между ω_2 и осью OX, а Δ соответствует площади ячейки, имеющей в общем случае вид параллелограмма [12–14].

Ниже приведены условия, выполняющиеся на границе раздела "вода-нефть" при "поршневом" вытеснении.

$$V_t^{oil}\mu_{oil} = V_t^{water}\mu_{water}; V_n^{oil} = V_n^{water}; p^{oil} = p^{water}. \tag{1}$$

Здесь μ_{water}, V_t^{water}, V_n^{water} и p^{water} обозначают вязкость, касательную и нормальную компоненты скорости, а также давление со стороны воды (water): индекс (oil) указывает на анлогичные характеристики со стороны нефти. Рассмотрим положение точки Z на границе раздела вода-нефть в некоторый момент времени t: связанные с ней вектора касательной и нормали представлены на рис. 2 (слева). Здесь фронт заводнения (кривая L, выделенная черным) разделяет области, занятые водой (WATER), нагнетаемой через скважину (INJECTION WELL), и нефтью (OIL).

Далее рассмотрим в деталях вид функции скорости $\overline{V}(z) = V_x - iV_y$ как для нефти, так и для воды в некоторой выбранной точке $Z(x, y)$. Переходя в систему координат (t, n), получим:

$$\overline{V}(z) = V_t(\cos\alpha - i\sin\alpha) + iV_n(\cos\alpha - i\sin\alpha) = (V_t(z) + iV_n(z))e^{-i\alpha}. \tag{2}$$

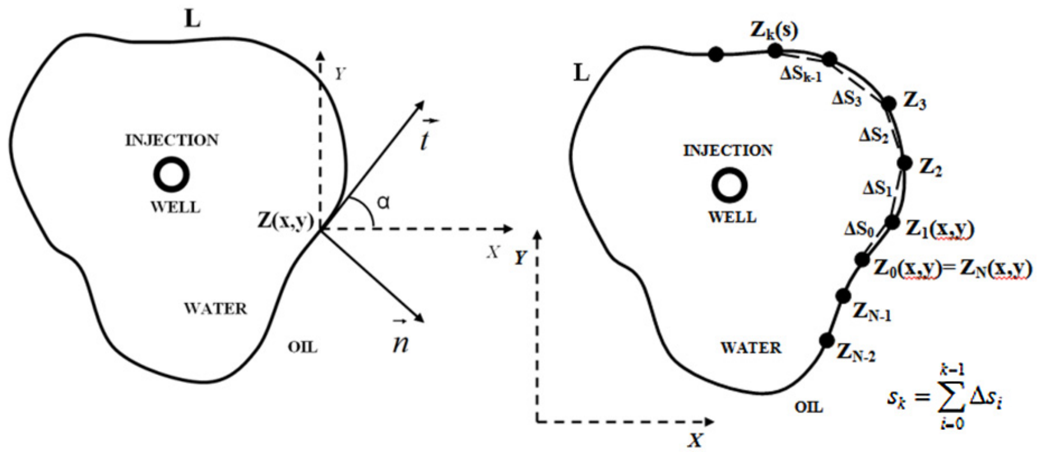


Рис. 2. Слева: взаимное расположение систем векторов (X, Y) и (t, n), связанных с точкой $Z(x, y)$, на границе раздела "вода-нефть" (ВНК). Справа: схема параметризации контура ВНК

Будем искать $\overline{V}(z)$ в виде:

$$\overline{V}(z) = \Phi(z) + \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{L} \zeta(\tau - z)\gamma(\tau)d\tau. \tag{3}$$

Здесь $\Phi(z)$ представляет собой функцию скорости, построенную в работе [10] для двоякопериодической схемы заводнения в рамках модели "разноцветных" жидкостей:

$$\Phi(z) = -\sum_{u=1}^{n1} \frac{Q_u^{(prod)}}{2\pi h}(\zeta(z - z_u) + a\,(z - z_u) - \beta(\overline{z - z_u}))+$$
$$+\sum_{w=1}^{n2} \frac{Q_w^{(inject)}}{2\pi h}(\zeta(z - z_w) + a\,(z - z_w) - \beta(\overline{z - z_w})).$$

Здесь n_1 и n_2 — число добывающих (мощности Q_u) и нагнетательных (мощности Q_w) скважин соответственно, размещенных в точках z_u и z_w (u и w – индексы сумм) ячейки. $\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum\limits_{n,m=-\infty}^{\infty} (\frac{1}{z-\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2})$ — дзета-функция Вейерштрасса; $\beta = \frac{\pi}{\Delta}$ и $\alpha = \beta - \frac{2}{\omega_1}\zeta(\frac{\omega_1}{2})$ — числовые параметры, обеспечивающие двоякую периодичность $\zeta(z)$; Δ - площадь ячейки;h – толщина пласта, ω — узел двоякопериодической решетки ($\omega = m\omega_1 + n\omega_2/m, n \in Z$).

Второе слагаемое в правой части формулы (3) представляет собой сингулярный интеграл с ядром типа Коши, заключенным в дзета-функцию Вейерштрасса $\zeta(\tau - z)$ для удовлетворения условию двоякой периодичности. Подобное представление было использовано Койтером [15] в его работе, посвященной задачам теории упругости.

Воспользуемся введенным представлением (3) для определения функций скорости для нефти $\overline{V}^{oil}(z)$ и воды $\overline{V}^{water}(z)$ на ВНК (L). Важно отметить требование гладкости для границы раздела "вода-нефть": указанное условие является необходимым для существования предлагаемого решения. Задавая естественную параметризацию для контура L, основанную на параметре длины дуги s (см. рис. 2 (справа)), и далее применяя формулы Сохоцкого — Племеля, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \overline{V}^{water}(z(s)) = \Phi(z(s)) + \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_L \zeta(\tau - z(s))\gamma(\tau)d\tau + \frac{\gamma(z(s))}{2}; \\ \overline{V}^{oil}(z(s)) = \Phi(z(s)) + \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_L \zeta(\tau - z(s))\gamma(\tau)d\tau - \frac{\gamma(z(s))}{2}. \end{cases} \tag{4}$$

Здесь $z = z(s)$, а переменная интегрирования τ связана с точками контура L и имеет тот же смысл, что и z вне интегральной части.

Используя систему (4), а также условия (1), получим вид функции $\gamma(z) = \overline{V}^{water}(z) - \overline{V}^{oil}(z)$:

$$\gamma(z) = V_t^{water}(z)[1 - \frac{\mu^{water}}{\mu^{oil}}]e^{-i\alpha}. \tag{5}$$

Благодаря совпадению ВНК с границей раздела "вода-нефть" и фронтом вытеснения, достаточно отслеживать эволюцию водонефтяного контакта лишь "с одной стороны": далее все рассуждения будут сфокусированы на функции $\overline{V}^{water}(z)$.

Обозначим отношение вязкостей как $\kappa = \frac{\mu^{water}}{\mu^{oil}}$, а касательную и нормальную компоненты, соответственно, как $T(s) = V_t^{water}(z(s))$ и $N(s) = V_n^{water}(z(s))$. Далее выпишем вид функции $\overline{V}^{water}(z(s))$ из (4) с учетом новых обозначений. Переходя к $T(s)$ и $N(s)$ с помощью (2) и заменяя контурный интеграл на определенный, а также принимая во внимание (5), получим:

$$\frac{1+\kappa}{2}T(s) + iN(s) = [\Phi(z(s)) + \frac{1-\kappa}{2\pi i}\int_0^S \zeta(z(\sigma) - z(s))T(\sigma)d\sigma]\frac{dz}{ds}. \tag{6}$$

Здесь переменная σ имеет тот же смысл, что и параметр длины дуги s, а предел интегрирования S вычисляется по формуле: $S = \sum\limits_{i=0}^{N-1} \Delta s_i$. При этом справедливо: $z = z(s)$.

Уравнение (6) позволяет определить скорость течения воды в некоторой выбранной точке $z = z(s)$ на границе раздела "вода-нефть". Однако для решения задачи о мониторинге ВНК необходимо описать трассировку нагнетаемой воды, что будет сделано далее.

2. Задача о продвижении ВНК. Построение решения

Решение задачи трассировки подразумевает отслеживание перемещения наблюдаемых частиц жидкости во времени: для этих целей в работе [10] была представлена соответствующая система уравнений. Аналогичная ей задача Коши может быть использована и в рамках настоящего исследования:

$$\left.\begin{array}{l} m\frac{\partial \overline{z}}{\partial t} = \overline{V}(z); \\ z_{t=0} = z_0 + r_w e^{i\theta}. \end{array}\right\} \tag{7}$$

Здесь m – пористость пласта, z_0 – центр призабойной зоны радиуса r_w нагнетательной скважины. $\overline{V}(z)$ обозначает скорость перемещения частицы z и является известной функцией в правой части уравнения: соответствующее ему начальное условие указывает на положение отслеживаемого трассера z в момент старта заводнения. Изначально все наблюдаемые частицы размещаются вокруг ствола нагнетательной скважины: угол θ указывает на точное местоположение трассера относительно центра z_0 колонны, а величина $\Delta\theta$ определяет их (трассеров) суммарное число.

Как было сказано ранее, $\overline{V}(z)$ теряет непрерывность на ВНК ввиду особенностей поршневого вытеснения (различие вязкостей). В связи с этим необходимо определить функцию скорости на границе раздела вода-нефть: в рамках настоящего исследования $\overline{V}(z)$ представляет собой полусумму значений скоростей нефти $\overline{V}^{oil}(z)$ и воды $\overline{V}^{water}(z)$. С учетом условий (1) выражение для $\overline{V}(z)$ примет следующий вид:

$$\overline{V}(z) = \frac{1}{2}\left(\overline{V}^{oil}(z) + \overline{V}^{water}(z)\right) = \left(\frac{(1+\kappa)}{2}T(s) + iN(s)\right)e^{-i\alpha}.$$

Переписывая систему уравнений (7), получаем:

$$\left.\begin{array}{l} m\frac{\partial \overline{z}}{\partial t} = \left[\frac{(1+\kappa)}{2}T^{water}(s) + iN^{water}(s)\right]e^{-i\alpha}; \\ z_{t=0} = z_0 + r_w e^{i\theta}. \end{array}\right\} \tag{8}$$

Далее сосредоточим внимание на уравнении (6), необходимом для определения компонент функции $\overline{V}(z)$. В отличиче от первого слагаемого, $\Phi(z(s))$, заданного аналитически, сингулярный интеграл (СИ) в правой части (6) вычисляется приближенно. Обратимся к разбиению ВНК, предложенному на рис. 2 (справа): фронт заводнения (контур l) образован дискретным множеством точек — позиций трассеров z_k. Каждой из z_k соответствует значение s_k, имеющее смысл параметра длины дуги: формула для вычисления s_k представлена на рис. 2 (справа).

Используя предлагаемое разбиение, перепишем СИ в следующем виде:

$$\int_0^S \zeta(z(\sigma) - z(s_k))T(\sigma)d\sigma = \sum_{i=k}^{N+k-1} \int\limits_{s_i}^{s_{i+1}} \zeta(z(\sigma) - z(s_k))T(\sigma)d\sigma. \tag{9}$$

Согласно определению, сингулярный интеграл с ядром типа Коши включает в себя особенность вида $\frac{1}{z-z_k}$, которой обладают только два интеграла из указанной суммы. Выделяя их в отдельное слагаемое, получим сингулярную и регулярную составляющие СИ, входящего в правую часть (6):

$$\begin{array}{l} \sum\limits_{i=k}^{N+k-1} \int\limits_{s_i}^{s_{i+1}} \zeta(z(\sigma) - z(s_k))T(\sigma)d\sigma = \int\limits_{s_{k-1}}^{s_{k+1}} \zeta(z(\sigma) - z(s_k))T(\sigma)d\sigma + \\ + \sum\limits_{i=k+1}^{N+k-2} \int\limits_{s_i}^{s_{i+1}} \zeta(z(\sigma) - z(s_k))T(\sigma)d\sigma. \end{array} \tag{10}$$

Первое слагаемое суммы (10) является сингулярным, исходя из значений пределов интегрирования и определения дзета-функции Вейерштрасса, входящей в интегральное ядро:

$$\zeta(z(\sigma) - z(s)) = \frac{1}{z(\sigma) - z(s)} + \sum_{n,m=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{z(\sigma) - z(s) - \omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z(\sigma) - z(s)}{\omega^2}\right),$$

где $\omega = m\omega_1 + n\omega_2/m, n \in \mathrm{Z}$ — узел двоякопериодической решетки, на которой определена ζ.

Для устранения особенности первое слагаемое суммы (10) определялось в смысле главного значения Коши. В результате была получена следующая формула:

$$\int\limits_{s_{k-1}}^{s_{k+1}} \zeta(z(\sigma)-z(s_k))T(\sigma)d\sigma = \tfrac{1}{z'_k}\left[T_k \ln\left(\tfrac{\Delta s_k}{\Delta s_{k-1}}\right) + T_{k+1} - T_{k-1}\right] +$$
$$+\tfrac{1}{2}\left[\zeta_*(z_{k-1}-z_k)T_{k-1}\Delta s_{k-1} + \zeta_*(z_{k+1}-z_k)T_{k+1}\Delta s_k\right].$$

Второе слагаемое (10), являющееся регулярным, определялось путем построения квадратурных сумм по формуле трапеций:

$$\sum_{i=k+1}^{N+k-2} \int\limits_{s_i}^{s_{i+1}} \zeta(z(\sigma)-z(s_k))T(\sigma)d\sigma = \frac{1}{2}\sum_{i=k+1}^{N+k-2}[\zeta(z_i-z_k)T_i + \zeta(z_{i+1}-z_k)T_{i+1}]\Delta s_i.$$

Отсюда приходим к итоговому выражению для определения СИ (9):

$$\begin{aligned}&\textstyle\int_0^S \zeta(z(\sigma)-z(s_k))T(\sigma)d\sigma = \frac{1}{z'_k}\left[T_k \ln\left(\frac{\Delta s_k}{\Delta s_{k-1}}\right) + T_{k+1} - T_{k-1}\right] +\\ &+\tfrac{1}{2}\left[\zeta_*(z_{k-1}-z_k)T_{k-1}\Delta s_{k-1} + \zeta_*(z_{k+1}-z_k)T_{k+1}\Delta s_k\right] +\\ &+\tfrac{1}{2}\sum_{i=k+1}^{N+k-2}[\zeta(z_i-z_k)T_i + \zeta(z_{i+1}-z_k)T_{i+1}]\Delta s_i.\end{aligned} \tag{11}$$

Далее вернемся к задаче Коши (8), обеспечивающей мониторинг ВНК во времени. Согласно выражению для $\overline{V}(z)$ для определения скорости на фронте заводнения необходимо вычислить касательную и нормальную компоненты. Значения $T(s)$ и $N(s)$ можно получить из (6), разделив вещественную и мнимую части:

$$\begin{cases} \frac{1+\kappa}{2}T(s_k) = \mathrm{Re}\left\{[\Phi(z(s_k)) + \frac{1-\kappa}{2\pi i}\int_0^S \zeta(z(\sigma)-z(s_k))T(\sigma)d\sigma]\frac{dz_k}{ds}\right\}; \\ N(s_k) = \mathrm{Im}\left\{[\Phi(z(s_k)) + \frac{1-\kappa}{2\pi i}\int_0^S \zeta(z(\sigma)-z(s_k))T(\sigma)d\sigma]\frac{dz_k}{ds}\right\}. \end{cases} \tag{12}$$

Записав систему (12) для всех точек z_k водонефтяного контакта, получим две системы матричных уравнений:

$$(T_{matrix})\,\overrightarrow{T} = \overrightarrow{T_r};\, \overrightarrow{N} - (N_{matrix})\,\overrightarrow{T} = \overrightarrow{N_r}. \tag{13}$$

Здесь T_{matrix} и N_{matrix} — матрицы коэффициентов для вектора касательных компонент скорости $\overrightarrow{T}$: для их определения следует использовать систему (12) и выражение (11). После перегруппировки слагаемых по значениям вектора $\overrightarrow{T}$ формула для вычисления СИ примет вид:

$$\begin{aligned}&\textstyle\int_0^S \zeta(z(\sigma)-z(s_k))T(\sigma)d\sigma = \frac{1}{2z'_k}[2T_k \ln\left(\frac{\Delta s_k}{\Delta s_{k-1}}\right) + T_{k+1} - T_{k-1} +\\ &+\sum_{i=k+1}^{N+k-1}\zeta(z_i-z_k)T_i(\Delta s_i + \Delta s_{i-1})z'_k].\end{aligned}$$

В свою очередь, векторы $\overrightarrow{T}_r$ и $\overrightarrow{N_r}$ обозначают известную правую часть в уравнениях (13) и определяются по формуле:

$$\overline{T}_r = \mathrm{Re}\left\{\begin{pmatrix}\Phi(z(s_0))\frac{dz_0}{ds}\\ \ldots \\ \Phi(z(s_{N-1}))\frac{dz_{N-1}}{ds}\end{pmatrix}\right\}; \overline{N}_r = \mathrm{Im}\left\{\begin{pmatrix}\Phi(z(s_0))\frac{dz_0}{ds}\\ \ldots \\ \Phi(z(s_{N-1}))\frac{dz_{N-1}}{ds}\end{pmatrix}\right\}.$$

Определяя последовательно векторы $\overrightarrow{T}$ и $\overrightarrow{N}$ из уравнений (13), можно получить значения функции $\overline{V}(z)$ из системы (8) в выбранный момент времени. Для решения основной задачи Коши использовались методы Рунге-Кутты, модифицированные с учетом комплексной природы z. В качестве переменной интегрирования использовалось т. н. "безразмерное время" τ, связанное с исходной временной переменной t следующим образом:

$$\tau = Q_w t / 2\pi m h |\omega_1^2|$$

Здесь m и h — пористость и толщина нефтеносного пласта соответственно, ω_1 — один из двух периодов двоякопериодической решетки, а Q_w — величина дебита нагнетательных скважин из формулы для $\Phi(z)$ (см. раздел 2). Как можно видеть из выражения для $\Phi(z)$, в настоящем исследовании мощности добывающих (нагнетательных) скважин полагаются равными между собой. В связи с этим удобно ввести отношение Q_u/Q_w и далее вынести за общую скобку значение Q_w, использованное в "безразмерном времени" τ.

3. Результаты расчетов

Итогом решения задачи стал программный комплекс, позволяющий как отслеживать эволюцию ВНК во времени, так и количественно оценивать эффективность той или иной схемы заводнения. Результаты работы программы представлены изображениями заводненной области, отражающими распространение нагнетаемой воды со временем, а также числовыми параметрами — временем начала обводнения добывающих скважин и коэффициентом охвата по площади (K_{sweep}). Значения первой характеристики определяются с помощью ранее указанной переменной интегрирования τ: мониторинг ВНК прекращается после прорыва воды в добывающие скважины, поскольку с этого момента граница раздела "вода-нефть" теряет гладкость, которая является необходимым условием существования решения. Алгоритм определения коэффициента охвата по площади также основан на гладкости водонефтяного контакта: аппроксимируя заводненную область выпуклыми четырехугольниками и вычисляя их площадь по правилам векторного произведения, можно оценить размер участка, охваченного разработкой. Значение K_{sweep} можно получить по следующей формуле: $K_{sweep} = \frac{S_{w.a.}}{S_{r.a.}}$. Здесь $S_{w.a.}$ — площадь заводненной области, а $S_{r.a.}$ — площадь исследуемого элемента схемы заводнения: величина $S_{r.a.}$ определяется из геометрии схемы расстановки скважин.

В рамках настоящего исследования был проведен численный эксперимент, целями которого стали как сравнительный анализ различных схем заводнения, так и оценка влияния, оказываемого различием в вязкостях фильтрующихся жидкостей на эффективность вытеснения нефти водой. В процессе исследования проводились как визуальное сравнение картин заводненной области, так и оценка числовых параметров. Для сравнительного анализа использовались пятиточечная, лобовая рядная, семиточечная и девятиточечная схемы заводнения. Суммарные дебиты добычи (prod) и закачки (inject) были приняты равными: $\sum\limits_{u=1}^{n1} Q_u^{(prod)} = \sum\limits_{w=1}^{n2} Q_w^{(inject)}$. Для мониторинга ВНК было задействовано 180 трассеров: их траектории определялись путем решения основной системы (8), для чего применялась расчетная схема Эйлера.

Известно [1; 16], что отношение вязкостей (κ) оказывает негативное влияние на нефтеотдачу: с уменьшением параметра κ, при сохранении прочих условий разработки, наблюдается уменьшение объемов извлекаемых нефтяных запасов из-за растущей нестабильности вытеснения нефти водой. Кроме того, при определенных значениях κ возможно проявление эффекта, называемого "вязким пальцеобразованием" [17; 18]: значительная разница вязкостей нефти и воды ведет к нарушению устойчивости фронта вытеснения, в результате чего нагнетаемая вода "пронзает" нефтяную область острыми мысами (пальцами), оставляя за собой неосвоенные нефтяные запасы. Подобный эффект был также обнаружен в ходе описываемого численного эксперимента: при определенных значениях параметра κ наблюдалось нарушение гладкости границы раздела "вода-нефть" с последующим образованием "вязких пальцев". Указанный эффект изображен на рис. 3 на примере четвертинки пятиточечной схемы заводнения: для большей наглядности рисунок дополнен картиной из работы [18] (Figure 6.a в цитируемой работе) для аналогичной геометрии расстановки скважин. Изображение слева было получено в рамках вышеописанного численного эксперимента для значения $\kappa = 1/5$. Картина справа соответствует значению числа Пекле 1200 и моменту времени $t = 0,1$ в обозначениях автора. Острые выступающие мысы изображают языки обводнения и демонстрируют нарушение гладкости фронта вытеснения в обоих случаях.

В то же время необходимо заметить, что изучение эффекта "вязкого пальцеобразования" не является предметом настоящего исследования: указанная проблема требует большего внимания к проблеме неустойчивости фронта вытеснения и может быть рассмотрена в будущем.

Ниже представлены результаты мониторинга ВНК при различных значениях вязкостей воды и нефти для семиточечной схемы расстановки скважин: важно отметить, что характер изменений в движении фронта вытеснения оказался схожим для всех четырех исследованных схем (пятиточечной, лобовой рядной, семиточечной, девятиточечной). На рис. 4 представлены картины заводненной области (траектории трассеров выделены белым) в момент прорыва воды τ и при различном отношении вязкостей воды и нефти: здесь изображены окрестности одной из добывающих скважин (выделена белым кругом) при семиточечной схеме их размещения.

Таблица 1 содержит значения времени начала обводнения τ, подсчитанного для всех четырех схем заводнения при различных значениях вязкостей нефти и воды: результаты определения коэффициента охвата по площади отражены в табл. 2. Аббревиатура VF (viscous fingers) указывает на появление "вязких пальцев" для выбранной схемы заводнения при заданном отношении вязкостей: из-за нарушения гладкости границы раздела "вода-нефть" подсчет коэффициента охвата по площади для данного значения κ невозможен. Для большей наглядности столбцы табл. 2 дополнены значениями, взятыми из монографии Ф. Крэйга [16] для случая коэффициента подвижности M, равного единице. Следует отметить, что указанный параметр определяется в настоящей работе как величина, обратная отношению вязкостей воды и нефти: $M = 1/\kappa$.

Визуальный анализ картин заводненной области показал качественное совпадение результатов настоящего исследования с данными других авторов, полученными как при численном моделировании [19], так и в рамках физического эксперимента [5]. Также результаты опытов подтверждают выводы, сделанные ранее другими авторами, об отрицательном влиянии высокой разницы в вязкостях воды и нефти на показатели нефтеотдачи: с уменьшением параметра κ наблюдается сокращение "безводного" периода добычи, а также уменьшение площади, охватываемой заводнением, что негативно сказывается на величине коэффициента охвата по площади и, следовательно, на объеме извлекаемых запасов нефти.

Таблица 1

Значения времени τ при различном отношении вязкостей воды и нефти

Схема заводнения	Значения τ при различном отношении вязкостей κ			
	$\kappa = 1$	$\kappa = 1/2$	$\kappa = 1/3$	$\kappa = 1/4$
Пятиточечная	0,2304	0,2034	0,1920	VF
Лобовая рядная	0,1820	0,1500	VF	VF
Семиточечная	0,1539	0,1416	0,1356	0,1317
Девятиточечная	0,1108	0,1008	0,0960	0,0928

Таблица 2

Значения K_{sweep} при различном отношении вязкостей воды и нефти

Схема заводнения	Значения K_{sweep} при различном отношении вязкостей κ				
	Ф.Крэйг	$\kappa = 1$	$\kappa = 1/2$	$\kappa = 1/3$	$\kappa = 1/4$
Пятиточечная	70 %	72,5 %	63,5 %	60 %	VF
Лобовая рядная	58 %	57,2 %	47 %	VF	VF
Семиточечная	73 %	75,2 %	68,5 %	65,3 %	63,3 %
Девятиточечная	55 %	52,7 %	48 %	45,5 %	44 %

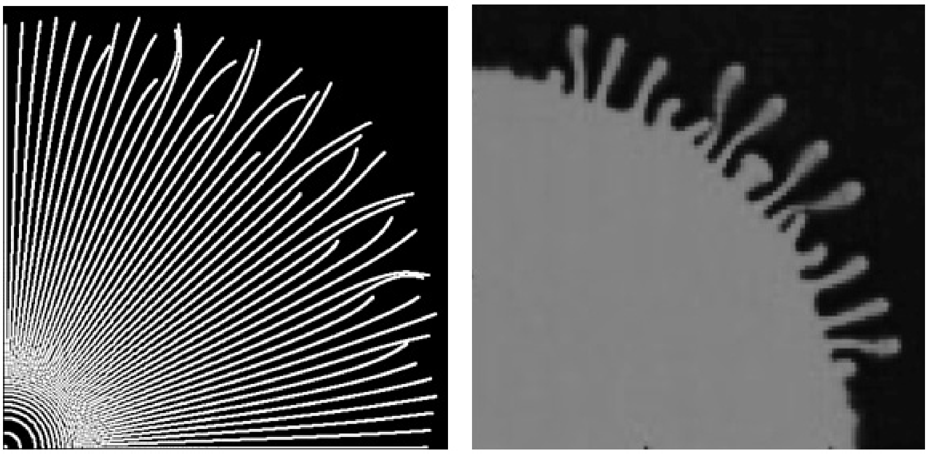
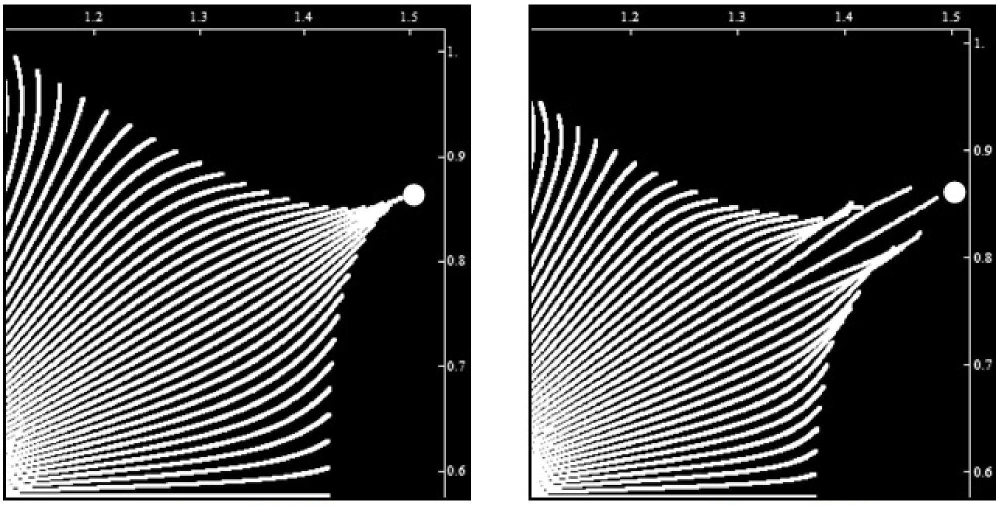


Рис. 3. Пример "вязких пальцев" для четверти элемента пятиточечной схемы заводнения: изображение слева соответствует результатам, полученным в рамках настоящего исследования; изображение справа взято из [18]

Заключение

Настоящее исследование является продолжением работы, описанной в [10], и обобщает ранее полученные результаты на случай учета физических различий между водой и нефтью: при этом все прочие составляющие модели переносятся в новое исследование без изменений. Результатом проделанной работы стал программный комплекс, функции которого во многом аналогичны его предшественнику [10]: основанная на решении задачи о мониторинге ВНК, программа предоставляет как графические данные (картины заводненной области), так и значения числовых критериев (время прорыва воды, коэффициент охвата по площади) для



κ= 1 τ= 0,1539 κ= 1/4 τ= 0,1317

Рис. 4. Картины заводненной области для фрагмента семиточечной схемы заводнения при различных отношениях вязкостей κ. Время начала обводнения указано в значениях τ

исследуемой схемы расстановки скважин. Разработанный программный комплекс представляет собой инструмент для сравнительного анализа различных схем заводнения при неизменных геофизических параметрах пласта: данные сравнения могут применяться при проектировании разработки реальных месторождений в качестве рекомендаций к выбору схемы расстановки скважин из числа возможных вариантов, определяемого анализом геофизических особенностей нефтеносного участка. При этом учет физических различий совместно фильтрующихся фаз (нефти и воды) заметно приближает моделируемый процесс к реалиям нефтедобычи.

Литература

[1] Желтов Ю.П. Разработка нефтяных месторождений: учебник для вузов. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Недра, 1998. 465 с.

[2] Уолкотт Д. Разработка и управление месторождениями при заводнении. М.: ЮКОС-Schlumberger, 2001. 144 с.

[3] Уиллхайт Г. Пол. Заводнение пластов. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2009. 788 с.

[4] Басниев К.С., Кочина И.Н., Максимов В.М. Подземная гидромеханика: учебник для вузов. М.: Недра, 1993. 416 с.

[5] Маскет М. Течение однородных жидкостей в пористой среде. М.; Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2004. 628 с.

[6] Чарный И.А. Подземная гидрогазодинамика. М.: Гостоптехиздат, 1963. 396 с.

[7] Данилов В.Л. Интегродифференциальное уравнение движения границы раздела двух жидкостей в пористой среде // Изв. КФ АН СССР. Сер.: Физ-мат. и тех. науки. 1957. Вып. 2. С. 99–133.

[8] Фазлыев Р.Т., Гайнетдинов А.Т. К исследованию процесса площадного заводнения нефтяных месторождений. В кн.: Численные методы решения задач фильтрации несжимаемой жидкости. Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1975. С. 289–296.

[9] Пилатовский В.П. Об одной системе функциональных уравнений плоского фильтрационного потока // Труды ВНИИ. 1963. Вып. 40. С. 138–156.

[10] Касаткин А.Е. Сравнительный анализ схем расстановки скважин при заводнении // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2013. № 9/2(110). С. 197–208.

[11] Герольд С.П. Аналитические основы добычи нефти, газа и воды из скважин. М.; Л.: Нефтеиздат, 1932.

[12] Астафьев В.И., Ротерс П.В. Моделирование двоякопериодических систем добывающих скважин // Вестник СамГУ. 2010. № 4(78). С. 5–11.

[13] Астафьев В.И., Ротерс П.В. Моделирование двоякопериодических систем добывающих скважин. 2. Коэффициент продуктивности // Вестник СамГУ. 2011. № 8(89). С. 118–127.

[14] Астафьев В.И., Ротерс П.В. Моделирование и оптимизация разработки месторождений многоскважинными двоякопериодическими кластерами // Вестник СамГУ. 2013. № 9/2(110). С. 170–183.

[15] Koiter W.T. Some general theorems on doubly-periodic and quasi-periodic functions // Proc. Konikl. Nederl. Akademie Wetenschappen, Amsterdam. 1959. Vol. 62. № 2. P. 120–128.

[16] Крэйг Ф.Ф. Разработка нефтяных месторождений при заводнении. М.: Недра, 1974. 192 с.

[17] Polymer Floods: A Case Study of Nonlinear Wave Analysis and of Instability Control in Tertiary Oil Recovery / P. Dapira [et al.] // SIAM Journal on Applied Mathematics. 1988. Vol. 48. № 2. P. 353–373.

[18] Chen C., Meiburg E. Miscible porous media displacement in the quarter five-spot configuration. Part 1. The homogeneous case // J. Fluid Mech. 1998. Vol. 371. P. 233–268.

[19] Моделирование разработки нефтяных месторождений на параллельных вычислительных системах / М.А. Корнилина [и др.] // Математическое моделирование: математические модели и вычислительный эксперимент. 1995. Т. 7. № 2. С. 35–48.

References

[1] Zheltov Yu.P. Development of oil fields: schoolbook for Institutions of Higher Education. 2-nd ed., revised and enlarged. M., Nedra, 1998, 465 p. [in Russian].

[2] Wolcott D. Development and management by minefields at waterflooding. Nefteyugansk, Yukos-Schlumberger, 2001, 144 p. [in Russian].

[3] Whillhite G.Paul. Waterflooding. M.-Izhevsk, Institut komp'iuternykh issledovanii, 2009, 788 p. [in Russian].

[4] Basniev K.S., Kochina I.N., Maksimov V.M. Subsurface hydromechanics: schoolbook for Institutions of Higher Education. M., Nedra, 1993, 416 p. [in Russian].

[5] Muskat M. The flow of homogeneous fluids through porous media. M.-Izhevsk, NITs "Reguliarnaia i khaoticheskaia dinamika", 2004, 628 p. [in Russian].

[6] Charny I.A. Underground fluid dynamics. M., Gostoptekhizdat, 2006, 436 p. [in Russian].

[7] Danilov V.L. Integrodifferential equation of movement of boundary line of two fluids in porous medium. *Izv. KF AN SSSR. Ser.: fiz-mat. i tekh. nauk* [*Proceedings of KF AS of SSSR. Ser.: physico-mathematical and technical sciences*], 1957, Issue 2, pp. 99–133 [in Russian].

[8] Fazlyev R.T. On the sudy of the process of pattern waterflooding of oil fields in *Numerical computation of filtering problems of incompressible fluid.* Novosibirsk, izd. SO AN SSSR, 1975, pp. 289–296 p. [in Russian].

[9] Pilatovski V.P. About one functional equations system for flat filtration stream. *Trudy VNII* [*Proceedings of All-Russian Scientific-Research Institute*], 1963, Vol. 40, pp. 138–156 [in Russian].

[10] Kasatkin A.E. Comparative analysis of wells arrangement schemes at waterflooding. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta: estestvennonauchnaya seriya* [*Vestnik of Samara State University: Natural Science Series*], 2013, no. 9/2 (110), pp. 197–208. [in Russian].

[11] Gerold S.P. Analytical foundations of oil, gas and water development from wells. M.-L., Nefteizdat, 1932 [in Russian].

[12] Astafiev V.I., Roters P.V. Simulation of doubly-periodic systems of producer wells. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta* [*Vestnik of Samara State University*], 2010, no. 4(78), pp. 5–11 [in Russian].

[13] Astafiev V.I., Roters P.V. Simulation of doubly-periodic systems of producer wells. 2. Productivity index. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta* [*Vestnik of Samara State University*], 2011, no. 8(89), pp. 118–127 [in Russian].

[14] Astafiev V.I., Roters P.V. Modeling and optimization of mining with multiwell doubly periodic clusters. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta* [Vestnik of Samara State University], 2013, no. 9/2(110), pp. 170–183 [in Russian].

[15] Koiter W.T. Some general theorems on doubly-periodic and quasi-periodic functions, *Proc. Konikl. Nederl. Akademie Wetenschappen*, Amsterdam, 1959, Vol. 62, no. 2, pp. 120–128.

[16] Craig F.F. Oil-field development at waterflooding. M., Nedra, 1974, 192 p. [in Russian].

[17] Dapira P., Glimm J., Lindquist B., McBryan O. Polymer Floods: A Case Study of Nonlinear Wave Analysis and of Instability Control in Tertiary Oil Recovery. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 1988, Vol. 48, no. 2, pp. 353–373.

[18] Chen C., Meiburg E. Miscible porous media displacement in the quarter five-spot configuration. Part 1. The homogeneous case. *J. Fluid Mech*, 1998, Vol. 371, p. 233–268.

[19] Kornilina M.A., Samarskaia E.A., Chetverushkin B.N., Churbanova N.G., Yakobovsky M.V. Simulation of oil fields development on the parallel computer systems. *Mathematicheskoe modelirovanie* [*Mathematical modeling*], 1995, Vol. 7, no. 2, pp. 35–48 [in Russian].

V.I. Astafiev, A.E. Kasatkin[3]

WATERFLOODING FRONT MOVING TASK IN DUAL PERIODICAL AREA: PISTON-LIKE DISPLACEMENT CASE

Water-oil contact moving task has a high significance in a waterflooding theory: it's possible to improve oil recovering characteristics due to prediction of flow features for both liquids – oil and water displaced it. There is the simplest mathematical pattern for conjoint oil-water flow presenting: it is called "versicolor" liquids model and it suggests making oil and water physically identical to simplify solving process for water-oil contact moving task. However, another pattern was used in research described in this paper: it is called pistonlike displacement model and it supposes that oil and water physical characteristics, for example, viscosities, may be different. As for the oil-keeping reservoir pattern used in this research it was presented as homogeneous and infinity, with fixed thickness: furthermore its surface was covered by dual periodical lattice included production and injection wells in its cells.

Key words: waterflooding, piston-like displacement of oil by water, oil-water boundary, flood front, tracing task, singular integral equation, Weierstrass dzetta-function, areal sweep efficiency, waterbreak time.

Статья поступила в редакцию 18/I/2014.

The article received 18/I/2014.

[3]*Astafiev Vladimir Ivanovich* (vladimir.astafev@mail.ru), Department of Development and Using of Oil and Gas Fields, Samara State Technical University, Samara, 443100, Russian Federation.

Kasatkin Andrey Evgenievich (darantion_yar@mail.ru), Department of Information Systems Security, Samara State University, Samara, 443011, Russian Federation.