УДК 512.554

А.В. Половинкина, Т.В. Скорая[1]

УСЛОВИЯ КОНЕЧНОСТИ КОДЛИНЫ МНОГООБРАЗИЯ АЛГЕБР ЛЕЙБНИЦА

Данная работа посвящена многообразиям алгебр Лейбница над полем нулевой характеристики. В случае нулевой характеристики основного поля вся информация о многообразии содержится в пространстве полилинейных элементов его относительно свободной алгебры. Полилинейная компонента многообразия рассматривается как модуль симметрической группы и раскладывается в прямую сумму неприводимых подмодулей, сумма кратностей которых называется кодлиной многообразия. В работе исследуются тождества, выполняющиеся в многообразиях с конечной кодлиной, а также взаимосвязь таких многообразий с известными многообразиями алгебр Ли и Лейбница, обладающими указанными свойствами. Доказывается необходимое и достаточное условие конечности кодлины многообразия алгебр Лейбница.

Ключевые слова: линейная алгебра, алгебра Лейбница, алгебра Ли, многообразие алгебр, полилинейная компонента многообразия, диаграмма Юнга, числовые характеристики многообразия, кодлина многообразия.

Работа посвящена изучению новых свойств многообразий алгебр Лейбница. Характеристика основного поля Φ предполагается равной нулю. Все неопределяемые понятия можно найти в монографиях [1; 2]. В статье рассматриваются необходимые и достаточные условия конечности кодлины многообразия алгебр Лейбница.

Векторное пространство над полем Φ с одной бинарной билинейной операцией будем называть линейной алгеброй. Линейная алгебра, удовлетворяющая тождеству Лейбница $(xy)z \equiv (xz)y + x(yz)$, называется алгеброй Лейбница. Возможно, впервые это понятие было рассмотрено в работе [3] как обобщение понятия алгебры Ли. Тождество Лейбница позволяет любой элемент представить в виде линейной комбинации элементов, в которых скобки расставлены слева направо. Поэтому договоримся, что в дальнейшем будем опускать скобки в левонормированных произведениях, то есть $(((ab)c)\ldots d) = abc\ldots d$. Многообразием $\mathbf{V}$ линейных алгебр над полем Φ называется совокупность алгебр над этим полем, удовлетворяющих фиксированному набору тождественных соотношений.

Пусть $F(X, \mathbf{V})$ — относительно свободная алгебра многообразия $\mathbf{V}$ со счетным множеством свободных образующих $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Рассмотрим пространство полилинейных элементов алгебры $F(X, \mathbf{V})$ от n образующих, которое обозначим $P_n(\mathbf{V})$ и назовем полилинейной компонентой степени n многообразия $\mathbf{V}$.

Половинкина Анастасия Владимировна (shvesovaav@rambler.ru), ФНПЦ ОАО НПО "Марс", 432022, Российская Федерация, г. Ульяновск, ул. Солнечная, 20.

Скорая Татьяна Владимировна (skorayatv@yandex.ru), кафедра алгебро-геометрических вычислений, Ульяновский государственный университет, 432017, Российская Федерация, г. Ульяновск, ул. Льва Толстого, 42.

А.И. Мальцев [4] доказал, что в случае поля нулевой характеристики всякое тождество эквивалентно системе полилинейных тождеств. Поэтому вся информация о многообразии алгебр над полем нулевой характеристики содержится в его полилинейных компонентах. На пространстве $P_n(\mathbf{V})$ естественным образом вводится действие перестановок, что позволяет рассматривать его как ΦS_n-модуль, где S_n – симметрическая группа. Так как поле Φ имеет нулевую характеристику, то пространство $P_n(\mathbf{V})$ раскладывается в прямую сумму неприводимых подмодулей. Обозначим через χ_λ характер неприводимого представления группы S_n, соответствующего разбиению λ числа n. Тогда характер $P_n(\mathbf{V})$ выражается формулой

$$\chi(P_n(\mathbf{V})) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda(\mathbf{V})\chi_\lambda, \qquad (1)$$

где $m_\lambda(\mathbf{V})$ – кратности неприводимых характеров в указанной сумме.

Важной числовой характеристикой многообразия $\mathbf{V}$ линейных алгебр является кодлина $l_n(\mathbf{V})$, которая определяется как число слагаемых в разложении характера в сумму неприводимых подмодулей:

$$l_n(\mathbf{V}) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda(\mathbf{V}).$$

Будем говорить, что кодлина многообразия $\mathbf{V}$ конечна, если существует такая константа C, не зависящая от n, что для любого n выполнено неравенство $l_n(\mathbf{V}) \leqslant C$. Многообразие, кодлина которого не является конечной, но у любого собственного подмногообразия кодлина конечна, будем, как принято, называть многообразием с почти конечной кодлиной.

Для удобства записи оператор умножения справа, например, на элемент z обозначим через Z, считая, что $xz = xZ$. Это обозначение позволяет элемент $x\underbrace{y...y}_{n}$ записывать в виде xY^n.

Следуя работам [5; 6], будем обозначать многообразие всех алгебр Лейбница, определенных тождеством $(x_1x_2)(x_3x_4)\ldots(x_{2s+1}x_{2s+2}) \equiv 0$, через $\widetilde{\mathbf{N}_s\mathbf{A}}$. Через $\mathbf{U}_2$ обозначим многообразие алгебр Ли, определенное в работе [7] и определяемое всеми тождествами вида $f_\lambda \equiv 0$, где элемент f_λ соответствует разбиению $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_k)$ числа n, удовлетворяющего условию $n - \lambda_1 > 2$. Как доказано в упомянутой работе, многообразие алгебр Ли $\mathbf{U}_2$ имеет почти конечную длину. Так как любая алгебра Ли является алгеброй Лейбница, то многообразие $\mathbf{U}_2$ является многообразием алгебр Лейбница с почти конечной кодлиной.

Еще одно многообразие $\widetilde{\mathbf{U}}_2$ алгебр Лейбница с почти конечной кодлиной было описано в работе [6]. Оно определяется элементами, которые соответствуют разбиениям $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k)$ числа n с условием, что $n - \lambda_1 \geqslant 2$, а также тождествами

$$x_1(x_2x_3)(x_4x_5) \equiv 0, \quad xx(xy)y - xy(xy)x \equiv 0,$$

$$\sum_{p \in S_3} (-1)^p x x_{p(1)} x_{p(2)} x_{p(3)} \equiv 0,$$

где $(-1)^p$ — четность перестановки p.

В работе [5] было найдено необходимое условие конечности кодлины многообразия. В частности, было доказано, что многообразие с конечной кодлиной является для некоторого s подмногообразием многообразия $\widetilde{\mathbf{N}_s\mathbf{A}}$. А в работе [8] было найдено достаточное условие конечности кодлины многообразия алгебр Лейбница. Приведем формулировку доказанной в этой работе теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{V}$ *– подмногообразие многообразия* $\widetilde{\mathbf{N}_s\mathbf{A}}$*, в котором для некоторых натуральных* k, m*,* $k \leqslant m$*, и* $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \Phi$ *выполнено тождество*

$$xY^k zY^{m-k} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i xY^{k-i} zY^{m-k+i}. \tag{2}$$

Тогда многообразие $\mathbf{V}$ *имеет конечную кодлину.*

Основным результатом данной работы является доказательство того, что приведенное в теореме 1 условие является не только достаточным, но и необходимым.

Теорема 2. *Кодлина многообразия* $\mathbf{V}$ *конечна тогда и только тогда, когда верно включение* $\mathbf{V} \subset \widetilde{\mathbf{N}_c\mathbf{A}}$*, и в многообразии* $\mathbf{V}$ *для некоторого* n*,* α_i *выполняется тождество*

$$\sum_{i=0}^{n-2} \alpha_i xY^i zY^{n-2-i} \equiv 0, \tag{3}$$

в котором хотя бы один коэффициент α_i *отличен от нуля.*

Доказательство. Понятно, что тождества (2) и (3) получаются друг из друга путем простых преобразований. Поэтому достаточность сформулированного условия доказана в теореме 1. Пусть теперь $\mathbf{V}$ — многообразие с конечной кодлиной. Согласно работе [5], если многообразие $\mathbf{V}$ имеет конечную кодлину, то оно является подмногообразием многообразия алгебр Лейбница с нильпотентным коммутантом степени нильпотентности не выше s, то есть $\mathbf{V} \subset \widetilde{\mathbf{N}_s\mathbf{A}}$. Таким образом, для завершения доказательства теоремы надо доказать выполнимость в многообразии тождества (3), то есть доказать, что существует такая степень n, что в относительно свободной алгебре следующие элементы $x_3x_2X_1^{n-2}$, $x_3x_1x_2X_1^{n-3}, \ldots,$ $x_3X_1^{n-2}x_2$ являются линейно зависимыми. Напомним, что любое соотношение в относительно свободной алгебре является тождеством многообразия.

Обозначим через $F_3(\mathbf{V})$ относительно свободную алгебру ранга 3 многообразия $\mathbf{V}$. Согласно работе [9], однородная компонента степени n относительно свободной алгебры $F_3(\mathbf{V})$ является модулем полной линейной группы $GL_3(\Phi)$. Эта компонента раскладывается в прямую сумму неприводимых модулей, причем кратности вхождения изоморфных неприводимых модулей, соответствующих разбиению $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ на не более, чем три части, равны кратностям $m_\lambda(\mathbf{V})$ в сумме (1) (см. [9, теорема 2.7]).

Рассмотрим полиоднородную компоненту $P_{n-2,1,1}(\mathbf{V})$ относительно свободной алгебры $F_3(\mathbf{V})$ степени $deg_{x_1} = n-2, deg_{x_2} = deg_{x_3} = 1$. Для доказательства линейной зависимости рассматриваемых элементов достаточно ограничить константой, не зависящей от n, размерность пространства $P_{n-2,1,1}(\mathbf{V})$. Понятно, что "вклад" в эту размерность будут давать лишь модули полной линейной группы, соответствующие разбиениям следующего вида: $\lambda^{(1)} = (n) \vdash n$, $\lambda^{(2)} = (n-1,1) \vdash n$, $\lambda^{(3)} = (n-2,2) \vdash n$ и $\lambda^{(4)} = (n-2,1,1) \vdash n$. Пусть W_i — неприводимый модуль, соответствующий разбиению $\lambda^{(i)}$. Тогда размерность пространства $W_i \cap P_{n-2,1,1}(\mathbf{V})$ равна числу полустандартных таблиц, в которую подставлены $n-2$ единицы, одна двойка и одна тройка. Напомним, что таблица Юнга называется полустандартной, если числа, расставленные в ее клетках, возрастают по столбцам и не убывают по строкам.

Понятно, что разбиению $\lambda^{(1)} = (n)$ соответствует одна полустандартная таблица. Разбиению $\lambda_2 = (n-1, 1)$ соответствуют две различные полустандартные таблицы:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & \quad\ldots\quad & 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & \quad\ldots\quad & 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

Разбиениям $\lambda^{(3)} = (n-2, 2)$ и $\lambda^{(4)} = (n-2, 1, 1)$ соответствует по одной полустандартной таблице:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 1 & \quad\ldots\quad & 1 \\ \hline 2 & 3 \\ \cline{1-2}\end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & \quad\ldots\quad & 1 & 1 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1} 3 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

Пусть кодлины рассматриваемого многообразия ограничены некоторым числом C, то есть для любого n выполнено неравенство $l_n(\mathbf{V}) \leqslant C$. Так как любой элемент является линейной комбинацией левонормированных произведений, то модуль W_1 входит с кратностью один, и "вклад" в размерность пространства $P_{n-2,1,1}(\mathbf{V})$ будет также равен единице. Для разбиения $\lambda_2 = (n-1, 1)$ "вклад" каждого неприводимого модуля W_2 будет равен двум, а с учетом кратности, которая не превосходит кодлину, получим не более $2C$. В случае двух оставшихся разбиений получаем "вклады" не более C для каждого. Таким образом, мы получаем:

$$dim P_{n-2,1,1}(\mathbf{V}) \leqslant 4C + 1.$$

Если взять степень $n = 4C + 3$, то число рассматриваемых элементов $x_3 x_2 X_1^{n-2}$, $x_3 x_1 x_2 X_1^{n-3}, \ldots, x_3 X_1^{n-2} x_2$ равно $n-1 = 4C+2 > dim P_{n-2,1,1}(\mathbf{V})$. Поскольку число этих элементов превышает размерность пространства, то они являются линейно зависимыми, и теорема 2 полностью доказана.

Теорема 3. *Если для многообразия* $\mathbf{V}$ *алгебр Лейбница при некотором натуральном* s *верно условие* $\boldsymbol{U}_2, \widetilde{\boldsymbol{U}}_2 \not\subset \boldsymbol{V} \subset \widetilde{\mathbf{N}_s\boldsymbol{A}}$ *и в нем выполняется тождество*

$$yY^{m-1} \equiv 0, \tag{4}$$

то кодлина многообразия $\mathbf{V}$ *конечна.*

Доказательство. Подставим в тождество (4) $y = y + x$ и рассмотрим слагаемые, в которых $deg_x = 1$. В новых элементах введем замену $x = x^2$, получим тождество следующего вида:

$$x^2 Y^{m-1} \equiv 0, \tag{5}$$

следствие которого линеаризацией по x имеет вид

$$x_1 x_2 Y^{m-1} \equiv -x_2 x_1 Y^{m-1}. \tag{6}$$

Пусть L — относительно свободная алгебра многообразия $\mathbf{V}$. Рассмотрим ассоциативный многочлен $f = Y^{m-1}$. Тогда, следуя Хиггинсу (см. [10]), можно определить множество I_f всех элементов x алгебры L таких, что для любого элемента y алгебры L выполняется равенство $xY^{m-1} = 0$. Тогда множество I_f, согласно работе [10], является правым идеалом алгебры L. Иными словами, для любых $x \in I_f$ и $z \in L$ произведение xz будет принадлежать I_f, то есть для любого элемента y алгебры L выполняется равенство $(xz)Y^{m-1} = 0$. Но тогда согласно тождеству (6) получаем, что и элемент $(zx)Y^{m-1}$ равен нулю для любого $y \in L$. Поэтому произведение zx также принадлежит множеству I_f согласно его определению. Следовательно, I_f является двусторонним идеалом. Поэтому мы можем рассмотреть фактор-алгебру L/I_f. Поскольку в алгебре L выполняется тождество (5), то для любого элемента x из L в результате умножения элемента x^2 на многочлен f мы получим нулевой элемент. Другими словами, x^2 принадлежит идеалу I_f, то есть в фактор-алгебре L/I_f выполняется тождество $x^2 \equiv 0$. Таким образом, мы получаем, что L/I_f является алгеброй Ли, и многообразие $var(L/I_f)$, порожденное алгеброй L/I_f, имеет конечную кодлину. Тогда, согласно работе [7], в фактор-алгебре L/I_f выполняется тождество

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i x Y^i Z Y^{k-i} \equiv 0.$$

В этом случае по определению идеала I_f в алгебре L будет выполнено тождество

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i x Y^i Z Y^{k-i} Y^m \equiv 0,$$

то есть выполняется условие теоремы 2, которое эквивалентно условию конечности кодлины многообразия.

Теорема 3 доказана.

В конце работы выскажем гипотезу, которую пока доказать или опровергнуть не удалось.

Гипотеза. *В классе алгебр Лейбница условие*

$$\boldsymbol{U}_2, \widetilde{\boldsymbol{U}}_2 \not\subset \boldsymbol{V} \subset \widetilde{\boldsymbol{N}_s \boldsymbol{A}}$$

эквивалентно конечности кодлины многообразия $\boldsymbol{V}$.

В заключение авторы выражают благодарность С.П. Мищенко за постановку задачи, полезные советы и внимание к работе.

Литература

[1] Giambruno A., Zaicev M.V. Polynomail identities and Asymptotic Methods // American Mathematical Society. Providence, RI: Mathematical Surveys and Monographs, 2005. Vol. 122. P. 352.

[2] Бахтурин Ю.А. Тождества в алгебрах Ли. М.: Наука, 1985.

[3] Блох А.М. Об одном обощении понятия алгебр Ли // Доклады Академии наук СССР. 1965. Т. 18. № 3. С. 471–473.

[4] Мальцев А.И. Об алгебрах с тождественными определяющими соотношениями// Матем. сб. 1950 Т. 26. № 1. С. 19–33.

[5] Швецова А.В. Необходимое условие конечности кодлины многообразия алгебр Лейбница // Вестник МГАДА. 2013. № 2(22). С. 197–202.

[6] Рацеев С.М. Рост некоторых многообразий алгебр Лейбница // Вестник Самарского государственного университета. 2006. № 6(46). С. 70–77.

[7] Ханина И.Р. Необходимое условие конечности кодлины многообразий алгебр Ли в случае поля нулевой характеристики // Фунд. и прикл. математика. 2000. № 2. С. 607–616.

[8] Скорая Т.В., Швецова А.В. Новые свойства многообразий алгебр Лейбница // Известия Саратовского государственного университета. Сер.: Математика, механика, информатика. 2013. № 4(2). С. 124–129.

[9] Berele A. Homogeneous polynomial identities // Israel journal of mathematics. 1982. Vol. 42. № 3. P. 285–272.

[10] Higgins P.J. Lie rings satisfying the Engel condition // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1954. № 1. P. 8–15.

References

[1] Giambruno A., Zaitsev M.V. Polynomail identities and Asymptotic Methods. *American Mathematical Society, Providence, RI: Mathematical Surveys and Monographs*, 2005, Vol. 122, P. 352.

[2] Bahturin Yu.A. Identities in Lie algebras. M., Nauka, 1985 [in Russian].

[3] Blokh A.M. On one generalization of the concept of Lie algebras. *Doklady akademii nauk SSSR* [*Reports of Academy of Sciences of the USSR*], 1965, Vol. 18, № 3, pp. 471–473 [in Russian].

[4] Maltsev A.I. On algebras defined by identities. *Matem. sb.* [*Mathematical Collected Book*], 1950, Vol. 26, № 1, pp. 19–33 [in Russian].

[5] Shvetsova A.V. The necessary condition of finiteness of colength of variety of Leibnitz algebras. *Vestnik MGADA* [Vestnik of MSABA], 2013, № 2(22), pp. 197–202 [in Russian].

[6] Ratseev S.M. The growth of varieties of Leibnitz algebras. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta* [*Vestnik of Samara State University*], 2006, № 6(46), pp. 70–77 [in Russian].

[7] Khanina I.R. The necessary condition of finiteness of colength of variety of Lie algebras in case of zero characteristic. *Fund. i prikl. matematika* [*Fundamental and Applied Mathematics*], 2000, № 2, pp. 607–616 [in Russian].

[8] Skoraya T.V., Shvetsova A.V. New properties of varieties of Leibnitz algebras. *Izvestiia Saratovskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriia matematika, mekhanika, informatika* [*Proceedings of Saratov State University. Series: Mathematics, mechanics, informatics*], 2013, № 4(2), pp. 124–129 [in Russian].

[9] Berele A. Homogeneous polynomial identities. *Israel journal of mathematics*, 1982, Vol. 42, № 3, pp. 285–272.

[10] Higgins P.J. Lie rings satisfying the Engel condition. *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 1954, № 1, pp. 8–15.

A.V. Polovinkina, T.V. Skoraya[2]

CONDITION OF FINITENESS OF COLENGTH OF VARIETY OF LEIBNITZ ALGEBRAS

This paper is devoted to the varieties of Leibnitz algebras over a field of zero characteristic. All information about the variety in case of zero characteristic of the base field is contained in the space of multilinear elements of its relatively free algebra. Multilinear component of variety is considered as a module of symmetric group and splits into a direct sum of irreducible submodules, the sum of multiplicities of which is called colength of variety. This paper investigates the identities that are performed in varieties with finite colength and also the relationship of this varieties with known varieties of Lie and Leibnitz algebras with this property. We prove necessary and sufficient condition for a finiteness of colength of variety of Leibnitz algebras.

Key words: linear algebra, Leibnitz algebra, Lie algebra, variety of algebras, multilinear part of variety, Yung diagrams, numerical characteristics of variety, colength of variety.

Статья поступила в редакцию 25/*IX*/2014.

The article received 25/*IX*/2014.

[2] *Polovinkina Anastasia Vladimirovna* (shvesovaav@rambler.ru), FRPC OJSC RPA "Mars", Ulyanovsk, 432022, Russian Federation.

Skoraya Tatyana Vladimirovna (skorayatv@yandex.ru), Department of Algebro-Geometrical Calculations, Ulyanovsk State University, Ulyanovsk, 432017, Russian Federation.