УДК 517.972

В.Л. Пасиков[1]

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНАЯ ИГРА СБЛИЖЕНИЯ-УКЛОНЕНИЯ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ, II

Для конфликтно управляемой дифференциальной системы с запаздыванием продолжено изучение динамической игры сближения-уклонения относительно функционального целевого множества теперь в части уклонения и решения проблемы существования альтернативы в рассматриваемом случае. В работе не предполагается относительно правой части управляемой системы выполнения условия седловой точки. Ранее аналогичные задачи ставились и решались для конечномерного пространства в научной школе академика Н.Н. Красовского. Для случая бесконечномерного пространства непрерывных функций подобные задачи были рассмотрены автором. В предлагаемой работе при доказательстве теорем о сближении и уклонении используется норма гильбертова пространства.

Ключевые слова: дифференциальная игра, последействие, норма, позиционная процедура, гильбертово пространство.

1. Задача уклонения от целевого множества

Рассмотрим решение задачи об уклонении от замкнутого множества $M \subset H_\tau$, в котором применяется контрпозиционная процедура управления второго игрока [1; 2], а также [3; 4].

Движением, порожденным вектором $\mathrm{u}_l \in P$ с начальным состоянием $x_{t_0}[s] = x_{t_0}[t_0 + s]$, назовем абсолютно непрерывную вектор-функцию $x[t] = x[t, p_0]$, удовлетворяющую почти всюду на промежутке $[t_0, \theta]$ уравнению в контингенциях

$$\frac{dx[t]}{dt} \in F(t, x[t+s], u_l) \tag{1.1}$$

с начальным условием $x_0(s) = x_{t_0}[t_0 + s],\ s \in [-\tau, 0],\ F(t, x_t[s], u_l) = \mathrm{co}\{f : f = f(t, x_t[s], u_l, v), v \in Q\}$.

Символом $\mathrm{X}(t^*; t_*, x_{t_*}[s])$, $t^* > t_*$; $t_* \in [t_0, \theta]$, $t^* \in (t_0, \theta]$, обозначим множество всех отрезков $x_{t^*}[s] = x[t^* + s]$, где $x[t]$, $t \in [t_*, \theta]$ есть некоторое движение, порожденное вектором $u_l \in P$, удовлетворяющее условию $x_{t_*}[s] = x[t_* + s]$.

Определение 1. Пусть каждому $t \in [t_0, \theta]$ поставлено в соответствие непустое множество $W_t = \{x_t[s] = x[t+s]\}, x_t[s] \in B_\tau$.

Пасиков Владимир Леонидович (pasikov_fmf@mail.ru), кафедра естественно-математических дисциплин, Орский филиал Оренбургского государственного института менеджмента, 462431, Российская Федерация, г. Орск, Орское шоссе, 4.

Будем называть систему $\{W_t\}$, $t \in [t_0, \theta]$, множеств W_t v-стабильной, если для любых двух моментов $t^* > \ t_*$; $\ t_*, \ t^* \in [t_0, \theta]$, любого состояния $x_{t_*}[s]$ и любого вектора $u_l \in P$ имеет место соотношение

$$\mathrm{X}(t^*; t_*, x_{t_*}, [s]) \bigcap W_{t^*} \neq \emptyset. \tag{1.2}$$

Аналогично предыдущему [5] можно показать, что замыкание системы v-стабильных множеств в $C_{[-\tau,0]}$ v-стабильно.

Построим процедуру контрпозиционного управления второго игрока, считая при этом, что в распоряжении второго игрока находится вспомогательная система, поведение которой на каждом промежутке $[\tau_i, \tau_{i+1})$ описывается уравнением в контингенциях

$$\frac{dx[t]_{\Delta_j}}{dt} \in F(t, x[t+s]_{\Delta_j}, u_{l[\tau_i]}) \tag{1.3}$$

с начальным условием $x_{\tau_i}[s]_{\Delta_j} = x[\tau_i + s]_{\Delta_j}$, причем вектор $u_{l[\tau_i]} \in P$ выбирается на каждом промежутке $[\tau_i, \tau_{i+1})$ из условия

$$\max_{v \in Q}(l[\tau_i], f(\tau_i, x_{\tau_i}[s]_{\Delta_j}, u_{l[\tau_i]}, v)) = \min_{u \in P} \ \max_{v \in Q}(l[\tau_i], f(\tau_i, x_{\tau_i}[s]_{\Delta_j}, u, v)). \tag{1.4}$$

Здесь и в дальнейшем

$$l_{[\tau_i]} = \begin{cases} \frac{\mathrm{s}_{\tau_i}}{||s_{\tau_i}||_1}, \text{ если} s_{\tau_\mathrm{i}} \neq 0, \\ \text{произвольному } l \in \mathrm{S}, \text{ если} s_{\tau_\mathrm{i}} = 0, \end{cases}$$

$s_{\tau_i} = x_{\tau_i}[0]_{\Delta_j} - y_{\tau_i}[0]_{\Delta_j}$, $x_{\tau_i}[0]_{\Delta}$ — элемент множества $Z(y_i[0]_{\Delta_j})$ предельных точек последовательности $\{x^{(k)}_{\tau_i}[0]_{\Delta_j}\}$, являющейся 0-сечением последовательности $\{x^{(k)}_{\tau_i}[s]_{\Delta_j}\}$, минимизирующей величину

$$r(y_t[s], W_{\tau_i}) = \inf ||y_t[s] - x_t[s]||_3, \ \ x_t[s] \in W_t.$$

Определение 2. Аппроксимационным движением системы (1), порожденным контрпозиционной процедурой управления второго игрока с начальным условием $y_0(s)_{\Delta_j} = y[t_0 + s]_{\Delta_j}$, назовем всякую абсолютно непрерывную вектор-функцию $y[t]_{\Delta_j} = y[t, q_0, \Gamma_j], t \in [t_0, \theta], q_0 = \{t_0, y_{t_0}[s]_{\Delta_j}\}$, удовлетворяющую на каждом промежутке $[\tau_i, \tau_{i+1})$ разбиения Γ_j почти всюду уравнению в контингенциях

$$\frac{dy[t]_{\Delta_j}}{dt} \in F_{-l_{[\tau_i]}}(t, y[t+s]_{\Delta_j})$$

с начальным условием $y_0(s)_{\Delta_j} = y[t_0 + s]_{\Delta_j}$, $F_{-l}(t, y[t+s]) = co\{f : (-l, f) \leqslant \leqslant \rho(t, y_t[s], l)\}$ или

$$F_{-l}(t, y[t+s]) = co\{f : (l, f) \geqslant \rho^*(t, y_t[s], l)\}, \tag{1.5}$$

где $\rho^*(t, y_t[s], l)\} = \min\limits_{u \in P} \max\limits_{v \in Q}(l, f(t, y_t[s], u, v)$

Определение 3. Движением системы (1), с начальным условием $y_{t_0}(s)_{\Delta_j} = = y[t_0 + s]_{\Delta_j}$, порожденным контрпозиционной процедурой управления второго игрока, назовем абсолютно непрерывную вектор-функцию $y[t] = y[t, q_0]$, $t \in [t_{0,}\theta]$, для которой найдется последовательность аппроксимационных движений $y[t]_{\Delta_j} = = y[t, q_0, \Gamma_j]$, $t \in [t_{0,}\theta]$, $j = 1, 2, ...$, равномерно по t на отрезке $[t_{0,}\theta]$ удовлетворяющая соотношению $y[t] = \lim\limits_{j \to \infty} y[t]_{\Delta_j}$. Здесь последовательность $\{\delta_j\}$; $j = 1, 2, ...$, диаметров $\{\delta_j\}$ разбиения Γ_j удовлетворяет соотношению $\lim\limits_{j \to \infty} \delta_j = 0$.

Уточним постановку задачи уклонения от множества $M \subset H_\tau$, которая решается с помощью контрпозиционной процедуры управления второго игрока [1; 2].

Определение 4. При заданной начальной позиции игры $q_0 = \{t_0, y_0(s)\}$ контрпозиционная процедура управления второго игрока гарантирует уклонение движений $y[t]$ от цели $M \subset B_\tau$ в момент θ, если

$$r(y_t(s), W_{\tau_i}) = \inf ||y_\theta[s] - x_\theta[s]||_3 > 0, x_\theta[s] \in M.$$

При этом предполагается, что $W_t \bigcap M = \emptyset \;\; \forall t \in [t_0, \theta]$.

Ниже указывается достаточное условие разрешимости задачи уклонения от множества M.

Теорема 1. Пусть на промежутке $[t_0, \theta]$ задана минимаксная v-стабильная система $\{W_t\}$ множеств $W_t, [t_0, \theta]$, причем $M \bigcap W_t = \emptyset \;\; \forall t \in [t_0, \theta]$. Если начальная позиция игры $q_0 = \{t_0, y_0(s)\}$ удовлетворяет условию $r(y_0(s), W_{t_0}) = 0$, то контрпозиционная процедура управления второго игрока гарантирует уклонение движений $y[t] = y[t, q_0]$ системы (1) от множества M вплоть до момента θ.

Сформулированная теорема вытекает из леммы.

Лемма 1. Пусть начальная позиция игры $q_0 = \{t_0, y_0(s)\}$ такова, что $r(y_0(s), W_{t_0}) = 0$ в H_t. Если система множеств $W_t, t \in [t_0, \theta]$ v-стабильна, то контрпозиционная процедура управления второго игрока удовлетворяет условию $r(y_t[s], W_t) = 0, \; t \in [t_0, \theta]$ в H_τ.

Доказательство. Аналогично доказательству леммы 1 [5] рассмотрим произвольно выбранное движение $y[t] = y[t, q_0]$, порожденное контрпозиционной процедурой управления второго игрока. По определению этого движения существует последовательность функций $\{y[t]_{\Delta_j}\} = \{y[t, q_0, \Gamma_j\}$ равномерно сходящаяся на $[t_0, \theta]$ к $y[t]$. Выберем из последовательности $\{y[t]_{\Delta_j}\}$ произвольным образом функцию $y[t]_\Delta$ и построим вдоль нее оценку величины $\varepsilon^2_\Delta[\tau_{i+1}]$ через величины $\varepsilon^2_\Delta[\tau_i]$. Здесь и в дальнейшем $\varepsilon_\Delta[\tau] = r(y[t]_\Delta, W_t)$ в H_τ. Не нарушая общности, считаем, что сечение $\{x^{(k)}_{\tau_i}[0]\}$ сходится к $x_{\tau_i}[0]_\Delta$. Рассмотрим позицию $q(k,i) = \{\tau_i, x^{(k)}_{\tau_i}[s]_\Delta\}$. В силу v-стабильности системы множеств $W_t, t \in [t_0, \theta]$, среди движений $x^{(k)}_i[t]_\Delta = x[t, p(k,i), \Gamma]$ есть движение со свойством

$$x^{(k)}_{\tau_{i+1}}[s]_\Delta \in W_{\tau_{i+1}}, \tag{1.6}$$

удовлетворяющее почти всюду на $[\tau_i, \tau_{i+1})$ уравнению в контингенциях $\frac{dx^{(k)}[s]_\Delta}{dt} \in F(t, x^{(k)}[t+s], u_{l[\tau_i]})$ с начальным условием $x^{(k)}_{\tau_i}[s] = x^{(k)}[t_i + s]$.

Аналогично (1.14) [5] имеем:

$$\varepsilon^2_\Delta[\tau_{i+1}] \leqslant \left\| y_{\tau_{i+1}}[s]_\Delta - x^{(k)}_{\tau_{i+1}}[s] \right\|^2_3. \tag{1.7}$$

Отрезки $y_{\tau_{i+1}}[s]_\Delta, x^{(k)}_{\tau_{i+1}}[s]_\Delta$ траекторий $y[t]_\Delta, x^{(k)}[t]_\Delta$ могут быть представлены в следующем виде (считаем, что $\tau_{i+1} - \tau_i \leqslant \tau, \alpha_i(t) = t - \tau_i, \alpha_i = \tau_{i+1} - \tau_i, t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$):

$$y_t[s]_\Delta = \begin{cases} y_{\tau_i}(0)_{\Delta j} + \int\limits_{\tau_i}^{t+s} f[\xi] d\xi, & -\alpha_i(t) \leqslant s \leqslant 0, \\ y_{\tau_i}[s + \alpha_i(t)], & -\tau \leqslant s \leqslant -\alpha_i(t), \end{cases} \tag{1.8}$$

$$x^{(k)}_t[s]_\Delta = \begin{cases} x^{(k)}_{\tau_i}(0)_{\Delta j} + \int\limits_{\tau_i}^{t+s} f_l[\xi] d\xi, & -\alpha_i(t) \leqslant s \leqslant 0, \\ x^{(k)}_{\tau_i}[s + \alpha_i(t)], & -\tau \leqslant s \leqslant -\alpha_i(t), \end{cases} \tag{1.9}$$

здесь $f[t], f_l[t]$ — суммируемые функции, удовлетворяющие при почти всех $t \in \in [\tau_i, \tau_{i+1})$ включениям $f_l[t] \in F(t, x^{(k)}[t+s]_\Delta, \mathrm{u}_{l[\tau_i]}), f[t] \in F_{-1_{[\tau_i]}}(t, y[t+s]_\Delta)$.

Из соотношений (1.6)–(1.9): $\varepsilon^2[\tau_{i+1}] \leqslant \quad ||y_{\tau_{i+1}}[s]_\Delta - x^{(k)}_{\tau_{i+1}}[s]_\Delta||^2_3 = ||y_{\tau_{i+1}}[0]_\Delta - - x^{(k)}_{\tau_{i+1}}[0]_\Delta||^2_1 + \int\limits_{-\tau}^{0} ||y_{\tau_{i+1}}[s]_\Delta - x^{(k)}_{\tau_{i+1}}[s]_\Delta||^2_1 ds$ подставляем сюда (1.8), (1.9)

$$||y_{\tau_{i+1}}(0)_{\Delta j} - x^{(k)}_{\tau_{i+1}}(0)_{\Delta j}||^2_1 + \int\limits_{-\tau}^{0} ||y_{\tau_{i+1}}[s]_\Delta - x^{(k)}_{\tau_{i+1}}[s]_\Delta||^2_1 ds =$$

$$= ||y_{\tau_i}(0)_{\Delta j} - x^{(k)}_{\tau_i}(0)_{\Delta j} + \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f[\xi]d\xi - \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f_l[\xi]d\xi||^2_1 + \tag{1.10}$$

$$+ \int\limits_{-\tau}^{0} ||y_{\tau_i}(0)_{\Delta j} - x^{(k)}_{\tau_i}(0)_{\Delta j} + \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f[\xi]d\xi||^2_1 ds - \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}+s} f_{l[\tau_i]}[\xi]||^2_1 d\xi.$$

Будем оценивать первое слагаемое в правой части (1.10) аналогично тому, как это делалось при решении задачи о сближении [5].

По теореме Каратеодори [6]

$$f_{l_{[\tau_i]}}[t] = \sum_{\nu=1}^{n+1} \beta^{(\nu)}_t f(t, x^{(k)}[t+s]_\Delta, u_{l_{[\tau_i]}}, v^{(\nu)}_t), \beta^{(\nu)}_t \geqslant 0, \quad \sum_{\nu=1}^{n+1} \beta^{(\nu)}_t = 1. \tag{1.11}$$

Теперь с учетом (1.11) и непрерывности множества $F(t, x_t[s]_\Delta, u_{l[\tau_i]})$ по t и $x[s]$, аналогично [7; 8], можем утверждать, что

$$\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} (l_{[\tau_i]}, f_l[\xi])d\xi = \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \sum_{\nu=1}^{n} \beta^{(\nu)}_\xi (l_{[\tau_i]}, f(\xi, x^{(k)}[\xi]_\Delta, u_{l[\tau_i]}, v^{(\nu)}_\xi))d\xi =$$

$$= \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \sum_{\nu=1}^{n+1} \beta^{(\nu)}_\xi (l_{[\tau_i]}, f(\tau_i, x^{(k)}_{\tau_i}(0)_{\Delta j}, u_{l[\tau_i]}, v^{(\nu)}_\xi))d\xi + \tag{1.12}$$

$$+ \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \sum_{\nu=1}^{n+1} \beta^{(\nu)}_\xi \psi_1(\xi)d\xi + \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \sum_{\nu=1}^{n+1} \beta^{(\nu)}_\xi \psi_2(\xi)d\xi.$$

Аналогично

$$\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \rho^*(\xi, y_\xi(0)_{\Delta j}, l_{[\tau_i]})d\xi = \alpha_i \rho^*(\tau_i, y_{\tau_i}(0)_{\Delta j} l_{[\tau_i]}) +$$

$$+ \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \psi_3(\xi)d\xi + \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \sum_{\nu=1}^{n+1} \psi_4(\xi)d\xi. \tag{1.13}$$

Здесь $\psi_1(t), \quad \psi_2(t), \quad \psi_3(t), \quad \psi_4(t)$ — непрерывные функции, удовлетворяющие неравенствам [8; 9]:

$\psi_1(t) \leqslant \omega_1(t-\tau_i)$, $\psi_2(t) \leqslant \omega_2(t-\tau_i)$, $\psi_3(t) \leqslant \omega_3(t-\tau_i)$, $\psi_4(t) \leqslant \omega_4(t-\tau_i)$, ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 — положительные монотонно-убывающие функции, стремящиеся к нулю при $t-\tau_i \to 0$ равномерно относительно моментов τ_i,τ_i, $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$, $\tau_i \in [t_0, \theta)$.

Обозначим $\mathrm{s}^{(\mathrm{k})}_{\tau_i} = x^{(k)}_{\tau_i}(0)_{\Delta j} - y_{\tau_i}(0)_{\Delta j}$ $\quad l^{(k)}_{\tau_i} = \frac{s^{(k)}_{\tau_i}}{\left\| s^{(k)}_{\tau_i} \right\|_1}$.

Тогда из (1.3) для достаточно больших k имеем

$$\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \{\, \rho^*(\xi, y_\xi(0)_{\Delta j}, l_{[\tau_i]}\,) - (l^{(k)}_{\tau_i}, f\ [\xi])\}\, d\xi \leqslant 0, \tag{1.14}$$

а из (1.4) для достаточно больших k получаем

$$(l^{(k)}_{[\tau_i]}, f(\tau_i, x^{(k)}_{\tau_i}(0)_{\Delta j}, \mathrm{u}_{l[\tau_i]}, v^{(\nu)}_t) \leqslant \rho^*(\tau_i, x^{(k)}_{\tau_i}(0)_{\Delta j} l_{[\tau_i]}). \tag{1.15}$$

Из (1.14), (1.15) заключаем

$$\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \sum_{\nu=1}^{n+1} \beta^{(\nu)}_\xi (l^k_{[\tau_i]}, f(\tau_i, x^{(k)}_{\tau_i}(0)_{\Delta j}, u_{l[\tau_i]}, v^{(\nu)}_\xi))d\xi \leqslant \alpha_i \rho^*(\tau_i, x^{(k)}_{\tau_i}[s]_{\Delta}, l_{[\tau_i]}). \tag{1.16}$$

Наконец из (1.12)–(1.15) с учетом условия Липшица получаем для достаточно больших k

$$||y_{\tau_i}(0)_{\Delta j} - x^{(k)}_{\tau_i}(0)_{\Delta j} + \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f[\xi]\, d\xi - \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f_l[\xi]\, d\xi||^2_1 =$$

$$= \left\| s^{(k)}_{\tau_i} \right\|^2_1 - 2 \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} (s^{(k)}_{\tau_i}, f[\xi]\, d\xi + 2 \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} (s^{(k)}_{\tau_i}, f_l[\xi])d\xi +$$

$$+ \left\| \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f[\xi]\, d\xi - \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f_l[\xi]\, d\xi \right\|^2 = \left\| s^{(k)}_{\tau_i} \right\|^2_1 +$$

$$+2 \left\| s^{(k)}_{\tau_i} \right\|_1 \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \sum_{\nu=1}^{n+1} \beta^{(\nu)}_\xi (l_{[\tau_i]} f(\xi, x^{(k)}_\xi(0)_{\Delta j}, u_{l_{[\tau_i]}}, v^{(\nu)}_\xi))d\xi -$$

$$-2 \left\| s^{(k)}_{\tau_i} \right\|_1 \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \rho^*(\xi, y_\xi(0)_{\Delta j} l_{[\tau_i]})d\xi + 2 \left\| s^{(k)}_{\tau_i} \right\|_1 \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \{\rho^*(\xi, y_\xi(0)_{\Delta j} l_{[\tau_i]}\,) -$$

$$-(l^{(k)}_{[\tau_i]}, f\ [\xi])\}\ d\xi + \left\| \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f[\xi]\, d\xi - \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f_l[\xi]\, d\xi \right\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left\| s^{(k)}_{\tau_i} \right\|^2_1 + 2 \left\| s^{(k)}_{\tau_i} \right\|_1 \alpha_i \rho^*(\tau_i, x^{(k)}_{\tau_i}[0]_{\Delta}, l_{[\tau_i]}) - 2 \left\| s^{(k)}_{\tau_i} \right\|_1 \alpha_i \rho^*(\tau_i, y_{\tau_i}[0], l_{[\tau_i]}) +$$

$$+\left\|\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f[\xi]\,d\xi - \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f_l[\xi]\,d\xi\right\|^2 + \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \omega(\xi-\tau_i)\,d\xi, \tag{1.17}$$

где $\omega = \sum\limits_{i=1}^{m=4} \omega_i$.

Из (1.10)–(1.17) получаем оценку

$$||y_{\tau_{i+1}}(0)_{\Delta j} - x^{(k)}_{\tau_{i+1}}(0)_{\Delta j}||_1^2 = ||y_{\tau_i}(0)_{\Delta j} - x^{(k)}_{\tau_i}(0)_{\Delta j} + \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f[\xi]d\xi - \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f_l[\xi]d\xi||_1 \leqslant$$
$$\leqslant \left\|s^{(k)}_{\tau_i}\right\|_1^2 + 2L\alpha_i\left\|x^{(k)}_{\tau_i}(0)_{\Delta j} - y_{\tau_i}(0)_{\Delta j}\right\|_1^2 + o(\delta_j), \tag{1.18}$$

где L — постоянная Липшица, $o(\delta_j)$ — равномерно по k имеет более высокий порядок малости относительно δ_j.

Оцениваем второе слагаемое в правой части (1.10). По плану доказательства (1.17) и из [3; 4] получаем

$$||y_{\tau_i}(0)_{\Delta j} - x^{(k)}_{\tau_i}(0)_{\Delta j} + \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}+s} f[\xi]d\xi - \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}+s} f_l[\xi]d\xi||_1^2 \leqslant$$
$$\leqslant \left\|y_{\tau_i}(0)_{\Delta j} - x^{(k)}_{\tau_i}(0)_{\Delta j}\right\|_1^2 + 2\delta_j L\left\|y^{(k)}_{\tau_i}[s] - x_{\tau_i}[s]_\Delta\right\|_1^2 + o(\delta_j) \tag{1.19}$$

для любого $s \in [-\tau, 0]$.

Интегрируем (1.19) по Лебегу, тогда по условиям леммы

$$\int\limits_{-\tau}^{0} ||y_{\tau_i}(0)_{\Delta j} - x^{(k)}_{\tau_i}(0)_{\Delta j} + \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}+s} f[\xi]d\xi - \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}+s} f_{l[\tau_i]}[\xi]d\xi||_1^2 ds \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{-\tau}^{0} ||y_{\tau_i}(0)_{\Delta j} - x^{(k)}_{\tau_i}(0)_{\Delta j}||_1^2 ds + 2\delta_j L\int\limits_{-\tau}^{0}\left\|y^{(k)}_{\tau_i}[s] - x_{\tau_i}[s]_\Delta\right\|_1^2 ds + \tau\, o(\delta_j) \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{-\tau}^{0}\left\|y_{\tau_i}[s]_\Delta - x^{(k)}_{\tau_i}[s]_\Delta\right\|_1^2 ds + 2\delta_j L\int\limits_{-\tau}^{0}\left\|y^{(k)}_{\tau_i}[s] - x_{\tau_i}[s]_\Delta\right\|_1^2 ds + o(\delta_j). \tag{1.20}$$

Из (1.10) и (1.14)–(1.20) следует оценка

$$\varepsilon^2_\Delta[\tau_{i+1}] \leqslant \left\|y_{\tau_i}(0)_{\Delta j} - x^{(k)}_{\tau_i}(0)_{\Delta j}\right\|_1^2 + \int\limits_{-\tau}^{0}\left\|y_{\tau_i}[s]_\Delta - x^{(k)}_{\tau_i}[s]_\Delta\right\|_1^2 ds +$$
$$+2\delta_j L(\left\|y_{\tau_i}(0)_{\Delta j} - x^{(k)}_{\tau_i}(0)_{\Delta j}\right\|_1^2 + \int\limits_{-\tau}^{0}\left\|y_{\tau_i}[s]_\Delta - x^{(k)}_{\tau_i}[s]_\Delta\right\|_1^2 ds + o(\delta_j),$$

отсюда $\varepsilon^2_\Delta[\tau_{i+1}] \leqslant (1+2\delta_j L)\,\varepsilon^2_\Delta[\tau_i] + o(\delta_j)$.

Далее, аналогично работе [9] получаем, что какое бы ни было положительное число β, все функции $x[t]_{\Delta_j}$для разбиения Γ_jс достаточно большим номером j при всех $t \in [t_0, \theta]$ удовлетворяют неравенству $\varepsilon^2_\Delta[t] \leqslant \beta\exp[3L(t-t_0)]$, что и доказывает лемму, а вместе с тем и теорему, согласно [9; 10].

2. Альтернатива в дифференциально-разностной игре сближения уклонения

Рассмотрим некоторые свойства решения задачи об уклонении, что позволит в дальнейшем доказать теорему об альтернативе для минимаксной игры сближения-уклонения.

Лемма 2. Пусть позиция $p_* = \{t_*, x_{t_*}[s]\}, t_* \in [t_0, \theta)$ такова, что $x_{t*}[s] \in \in W_{t_*} \in \{W_t\}$, $\{W_t\} < v$-стабильная система множеств W_t, $t \in [t_0, \theta]$, со свойством $W_t \bigcap M = \emptyset$. Тогда существует число $\delta > 0$ такое, что для любого движения $x[t] = = x[t; t_*, x^*(s)]$, порожденного контрпозиционной процедурой управления второго игрока, построенной для системы $\{W_t\}$, точка $x[\theta]$ удовлетворяет соотношению $x(\theta) \notin M$, лишь только $\|x_{t_*}[s] - x^*(s)\|_3 < \delta$.

Доказательство. Обозначим символом $X(t; t_*, x_{t_*}[s])$ множество всех состояний, в которые могут перейти в момент t всевозможные движения $x[t] = = x[t; t_*, x_{t*}[s]]$, порожденные контрпозиционной процедурой управления второго игрока, построенной для системы $\{W_t\}, t \in [t_*, \theta]$. Тогда $X(\theta; t_*, x_{t_*}[s])$ — множество отрезков $x[\theta] = x[\theta + s]$ — состояний v стабильной системы $\{W_t\}$ в момент θ. В [8] показано, что это множество компактно в $C[-\tau, 0]$, а если его рассматривать как множество измеримых селекторов, то оно будет компактно в H_τ. Учитывая компактность множеств $X(\theta, t_*, x_{t_*}[s])$ и M в H_τ и соотношения $X(\theta; t_*, x_{t_*}[s]) \bigcap M = \emptyset$, вытекающие из теоремы 1, получаем неравенство

$$r(X(\theta; t_*, x_{t_*}[s]), M) > \varepsilon \tag{2.1}$$

для некоторого $\varepsilon > 0$; здесь символ $r(X, M)$ означает хаусдорфово расстояние между множествами X и M.

Подобно тому как это делается в работе [8], можно показать, что система множеств $\{X(t; t_*, x_{t_*}[s])\}$ обладает свойством v-стабильности. Из (2.1) и теоремы 1 следует заключение леммы.

Лемма 3. Если позиция $p_* = (t_*, x_{t_*}[s])$, $t_* \in [t_0, \theta]$, такова, что $x_{t_*}[s] \in \in W_{t_*} \in \{W_t\}$, $t \in [t_0, \theta]$, где $\{W_t\}$ — v-стабильная система множеств W_t, со свойством $W_{t_0} \bigcap M = \emptyset$, то существует v-стабильная система $\{W_t^*\}$ множеств W_t^*, содержащая вместе с отрезком $x_{t_*}[s]$ и некоторую окрестность $S(x_{t_*}[s], \delta) = = \{x^*(s) : \|x^*(s) - x_{t_*}[s]\|_3 < \delta\}$, причем $W_{t_0}^* \bigcap M = \emptyset$.

Доказательство. Для построения системы $\{W_t^*\}$ введем в рассмотрение множество $X^*(t_*, x_{t*}[s], \delta) = x^*(s) \in S(x_{t*}[s], \delta) \bigcup X(t; t_*, x_{t*}[s])$.

Символом $\{W_t^{*\delta}\}$ обозначим множество $\{W_t\} \bigcup X^*(t_*, x_{t*}[s], \delta)$.

Из леммы 1 вытекает, что при достаточно малых $\delta > 0$ имеет место соотношение $W_\theta^{*\delta} \bigcap M = \emptyset$.

Пусть $\{W_t^*\}$ есть система $\{W_t^{*\delta}\}$, отвечающая одному из таких δ. Из результатов работы [8] вытекает, что система $\{W_t^*\}$ v-стабильна, откуда следует заключение леммы.

Перейдем теперь к непосредственному доказательству теоремы об альтернативе для минимаксной дифференциальной игры сближения-уклонения.

Уберем из пространства $\{t, x(s)\}$ все те позиции $p_* = \{t_*, x_{t_*}[s]\}$, для каждой из которых как для начальной разрешима задача уклонения на отрезке $[t_*, \theta]$. Символом $W_{t_*}^u$ обозначим замкнутое в $C[-\tau, \theta]$ множество всех оставшихся позиций.

Теорема 2. Система множеств W_t^u, $t_0 \leqslant t \leqslant \theta$ минимаксно u-стабильная и $W_\theta^u \subset M$.

Доказательство. Пусть W_t^v — объединение всех множеств со свойством $W_\theta^u \subset \subset M = \emptyset$, причем для каждой позиции $p_* = \{t_*, x_{t_*}[s]\}$ такой, что $x_t[s] \in W_t^v$, разрешима задача уклонения, следовательно, W_t^v является v-стабильной системой, тогда $W_\theta^u \subset M$. Проверим свойство минимаксной u-стабильности множества $W_t^u, t_0 \leqslant t \leqslant \theta$. Предположим, что это свойство не выполняется. Это означает, что существует позиция $p_* = \{t_*, y_{t_*}[s]\}, y_{t_*}[s] \in W_{t_*}^u$, момент $t^* \in (t_*, \theta]$ и вектор $\ell \in S$ такие, что

$$W_{t_*}^u \bigcap Y_\ell(t^*; t_*, y_{t_*}[s]) = \emptyset. \tag{2.2}$$

Из соотношения (2.2) вытекает, что для каждой позиции $p_* = \{t^*, y_{t^*}[s]\}$, $y_{t^*}[s] \in Y_\ell(t^*; t_*, y_{t_*}[s])$ существует некоторая v-стабильной система множеств $W_t^v, t \in [t^*, \theta]$, содержащая позицию $p^* = \{t^*, y_{t^*}[s]\}$, но тогда из леммы 3.2 следует, что для каждой позиции существует такая окрестность $S(y_{t^*}[s], \delta)$, что $S(y_{t^*}[s], \delta) \subset W_{t^*}^v$ где $W_t^{*v}, t \in [t^*, \theta]$ некоторая v-стабильной система. Таким образом, оказывается, что

$$Y_\ell(t^*; t_*, y_{t_*}[s]) \subset \bigcup S(y_{t^*}[s], \delta) \subset \bigcup W_{t^*}^{*v} y_{t^*}[s] \in Y_\ell(t^*; t_*, y_{t^*}[s]).$$

В силу компактности множества $Y_\ell(t^*; t_*, y_{t^*}[s])$ [5], из бесконечного покрытия множества $Y_\ell(t^*; t_*, y_{t^*}[s])$ системой $\{S(y_{t^*}[s], \delta)\}$ можно выделить конечное подпокрытие $\{S(y_{t^*}^{(k)}[s], \delta)\}$. Таким образом, выполняется включение

$$Y_\ell(t^*; t_*, y_{t_*}[s]) \subset \bigcup S(y_{t^*}^{(k)}[s], \delta) \subset \bigcup_k W_{t^* k}^{*v} y_{t^*}^{(k)}[s] \in Y_\ell(t^*; t_*, y_{t^*}[s]), \tag{2.3}$$

здесь символом $W_{t_k}^{*v}, t \in [t^*, \theta]$ обозначена система v-стабильных множеств, содержащая $S(y_t[s], \delta$; соотношение (2.3) показывает, что существует система v-стабильных множеств, которая содержит $Y_\ell(t^*; t_*, y_{t_*}[s])$.

Рассмотрим множество $\tilde{W}_t^v = \tilde{W}_t^v \bigcup Y_\ell(t^*; t_*, y_{t_*}[s]), t \in [t_*, t^*]$, покажем, что множество $Y_\ell(t^*; t_*, y_{t_*}[s])$ обладает свойством v-стабильности.

Пусть позиция $\tilde{p} = \{\tilde{t}, \tilde{y}(s)\}$ такова, что $\tilde{y}(s) \in Y(t^*; t_*, y_{t_*}[s])$, очевидно, для любого вектора $u_\ell \in P$ имеет место включение

$$F_\ell(t, y(s), u_\ell) \subset F_\ell(t, y(s)), \tag{2.4}$$

здесь

$$F_\ell(t, y(s), u_\ell) = co\{f : f = f(t, y(s), u_\ell, \vartheta)\} v \in Q, \ (l, f) \leqslant S(t, y(s), \ell).$$

Из непустоты множества $F_\ell(t, y(s), u_\ell)$ и соотношения (2.4) вытекает, что для любого решения уравнения $\dot{y} \in F_\ell(t, y(s), u_\ell); \tilde{y}_t[s] = \tilde{y}[\tilde{t} + s]$ справедливо на $[t, t^*]$ включение $y_t[s] \in Y_\ell(t; t_*, y_{t_*}[s])$.

Из последнего соотношения и включения $F_\ell(t, y_t[s], u_\ell) \subset F_\ell(t, y_t[s])$ вытекает, что существует решение $y_t[s]$ дифференциального включения $\dot{y} \in F_\ell(t, y(s), u_\ell)$; $\tilde{y}_{\tilde{t}}[s] = \tilde{y}(s)$, удовлетворяющее соотношению $y_{t^*}[s] \in Y_\ell(t^*; t_*, y_{t_*}[s])$; тем самым показано, что $Y_\ell(t^*; t_*, y_{t_*}[s])$ обладает свойством v-стабильности. Из определения множества $\tilde{W}_t^v$ следует, что $\tilde{W}_\theta^v \bigcap M = \emptyset$ и вместе с тем доказано, что $\{\tilde{W}_t^v\}$ есть система v-стабильных множеств, $t \in [t_*, t^*]$. Но тогда получаем противоречие с предположением от противного, т. к. $x_{t_*}[s] \in W_t^u \bigcap \tilde{W}_t^v = \emptyset, t \in [t_*, t^*]$.

Следовательно, предположение от противного неверно, отсюда получаем доказательство теоремы.

Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Теорема 3. Для любой исходной позиции $p_* = \{t_*, x_{t_*}[s]\}$, $t_* \in [t_0, \theta]$, $x_{t_*}[s] \in \in H_\tau[-\tau, 0]$ справедливо одно из следующих утверждений.

Либо $x_{t_*}[s] \in W^u_{t_*}$, и тогда разрешима задача о сближении и имеет решение, которое доставляет позиционная процедура управления первого игрока, построенная для системы множеств $\{W^u_{t_*}\}, t \in [t_0, \theta]$.

Либо $x_{t_*}[s] \in W^v_{t_*}$ — некоторой системе v-стабильных множеств, и тогда задача об уклонении имеет решение, которое доставляет контрпозиционная процедура управления второго игрока, построенная для системы $\{W^v_{t_*}\}, t \in [t_0, \theta]$.

Литература

[1] Ушаков В.Н. Минимаксная дифференциальная игра сближения-уклонения и локальные условия разрешимости задач сближения-уклонения // Дифференциальные системы управления. Свердловск: АН СССР УНЦ, 1979. С. 87–93.

[2] Максимов В. И. Альтернатива в дифференциально-разностной игре сближения уклонения с функциональной целью // ПММ. 1976. Т. 40. № 6. С. 987–994.

[3] Пасиков В.Л. Альтернатива в минимаксной дифференциальной игре для систем с последействием // Известия вузов. Сер.: Математика. 1983. № 8. С. 45–50.

[4] Пасиков В.Л. Минимаксная дифференциальная игра сближения-уклонения для систем с последействием / Рязанский госпединститут. Рязань, 1982. С. 40.

[5] Пасиков В.Л. Дифференциально-разностная игра сближения-уклонения в гильбертовом пространстве, I // Вестник Самарского государственного университета. 2013. № 3(104). С. 33–41.

[6] Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.

[7] Осипов Ю.С. Альтернатива в дифференциально-разностной игре // ДАН СССР. 1971. Т. 197. № 5. С. 1022–1026.

[8] Осипов Ю.С. Дифференциальная игра наведения для систем с последействием // ПММ. 1971. Т. 35. № 1. С. 123–131.

[9] Осипов Ю.С., Алесенко Л.П. О регуляризации управления в дифференциально-разностной игре сближения-уклонения // Дифференциальные уравнения. 1976. Т. 12. № 6. С. 1000–1006.

[10] Осипов Ю.С. Дифференциальные игры систем с последействием // ДАН СССР. 1971. Т. 196. № 4. С. 779-782.

References

[1] Ushakov V.N. Minimax differential game of convergence-evasion and local conditions for solvability of problems of convergence-evasion. *Differential sistems of Management.* Sverdlovsk, AN SSSR UNTs, 1979, pp. 87–93 [in Russian].

[2] Maksimov V.I. Alternative in difference-differential game of convergence-evasion with operational goal. *PMM* [*PMM*], 1976, Vol. 40, no. 6, pp. 987–994 [in Russian].

[3] Pasikov V.L. Alternative in the minimax differential game for systems with aftereffect. *Izvestiia vuzov. Matematika* [*News of Higher Educational Institutions. Mathematics*], 1983, no. 8, pp. 45–50 [in Russian].

[4] Pasikov V.L. Minimax differential game of convergence-evasion for systems with aftereffect. Riazanskii gospedinstitut. Ryazan, 1982, 40 p. [in Russian].

[5] Pasikov V.L. Difference-differential game of convergence-evasion in Hilbert space, I. *Vestnik SamGU* [*Vestnik SamSU*], 2013, no. 3(104), pp. 33–41 [in Russian].

[6] Krasovskii N.N., Subbotin A.I. Positional differential games. M., Nauka, 1974, 456 p. [in Russian].

[7] Osipov Yu.S. Alternative in difference-differential game. *DAN SSSR* [*DAS USSR*], 1971, Vol. 197, no. 5, pp. 1022–1026 [in Russian].

[8] Osipov Yu.S. Differential game of guidance for systems with aftereffect. *PMM* [*PMM*], 1971, Vol. 35, no. 1, pp. 123–131 [in Russian].

[9] Osipov Yu.S. On regularization of control in difference-differential game of convergence - evasion. *Differentsial'nye uravneniia* [*Differentsial'nye uravneniia*], 1976, Vol. 12, no. 6, pp. 1000–1006 [in Russian].

[10] Osipov Yu.S. Differential games of systems with aftereffect. *DAN SSSR* [*DAS USSR*], 1971, Vol. 196, no. 4, pp. 779–782 [in Russian].

V.L. Pasikov[2]

DIFFERENCE-DIFFERENTIAL GAME OF CONVERGENCE — EVASION IN HILBERT SPACE, II

For conflict operated differential system with delay studying of dynamic game of convergence - evasion relatively functional goal set, now regarding evasion and solution of a problem of existence of alternative in the case under consideration is continued. In the work realization of condition of saddle point relatively to the right part of operated system is not supposed. Earlier similar tasks were set and solved for finite-dimensional space at scientific school of the academician N.N. Krasovsky. For a case of infinite-dimensional space of continuous functions similar tasks were considered by the author. In the suggested work at theorem proving about convergence - evasion, the norm of Hilbert space is used.

Key words: differential game, aftereffect, norm, positional procedure, Hilbert space.

Статья поступила в редакцию 20/ *VI* /2014.

The article received 20/ *VI* /2014.

[2] *Pasikov Vladimir Leonidovich* (`pasikov_fmf@mail.ru`), Department of Natural and Mathematical Disciplines, Orsk Branch of Orenburg State Institute of Management, Orsk, 462431, Russian Federation.