УДК 511.334

Г.В. Воскресенская[1]

О ПРОСТРАНСТВАХ МОДУЛЯРНЫХ ФОРМ ЧЕТНОГО ВЕСА[2]

В статье исследуется структура пространств параболических форм четного веса уровня N с помощью параболических форм минимального веса того же уровня. Изучено точное рассечение, при котором любая параболическая форма является произведением фиксированной функции на модулярную форму меньшего веса. Кроме уровней 17 и 19, рассекающая функция является мультипликативным эта-произведением. В общем случае пространство $f(z)M_{k-l}(\Gamma_0(N))$ уже не совпадает с пространством $S_k(\Gamma_0(N))$, структура дополнительного пространства полностью изучена. Результат зависит от значения уровня по модулю 12. Размерности пространств вычисляются по формуле Коэна — Остерле, порядки модулярных форм в параболических вершинах — по формуле Биаджиоли.

Ключевые слова: модулярные формы, параболические формы, эта-функция Дедекинда, параболические вершины, ряды Эйзенштейна, дивизор функции, структурные теоремы, формула Коэна — Остерле.

Введение

В статье для пространств параболических форм $S_k(\Gamma_0(N))$ четного веса доказываются структурные теоремы. Исследования используют метод рассечения параболическими формами минимальных весов. Мы рассматриваем общий случай и случай точного рассечения. Все стандартные обозначения и основные определения теории модулярных форм, которые используются в статье, можно найти в книгах [1–3]. Настоящая статья является продолжением исследований, начатых автором в статьях [4; 5].

1. Теорема Коэна — Остерле

Мы будем использовать теорему, доказанную в 1977 году французскими математиками А. Коэном и Ж. Остерле, которая в современных исследованиях является основной формулой для вычисления размерностей.

Воскресенская Галина Валентиновна (galvosk@mail.ru), кафедра алгебры и геометрии, Самарский государственный университет, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.
[2]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 12-01-00137.

1.1. Формулировка теоремы

Пусть χ — характер Дирихле, $\chi(-1) = (-1)^k$, f — его кондуктор. Если $p|N$, то обозначим через r_p максимальную степень, в которой p делит N, через s_p — максимальную степень, в которой p делит f.

$$\lambda(r_p, s_p, p) = \begin{cases} p^{r'} + p^{r'-1}, & 2s_p \leqslant r_p = 2r', \\ 2p^{r'}, & 2s_p \leqslant r_p = 2r' + 1, \\ 2p^{r_p - s_p}, & 2s_p \geqslant r_p \end{cases}$$

$$\nu_k = \begin{cases} 0, & k \equiv 1 \ (mod\ 2), \\ -\frac{1}{4}, & k \equiv 2 \ (mod\ 4), \\ \frac{1}{4}, & k \equiv 0 \ (mod\ 4) \end{cases}$$

$$\mu_k = \begin{cases} 0, & k \equiv 1 \ (mod\ 3), \\ -\frac{1}{3}, & k \equiv 2 \ (mod\ 3), \\ \frac{1}{3}, & k \equiv 0 \ (mod\ 3) \end{cases}$$

Теорема Коэна — Остерле [6].

Если k — целое, χ — характер Дирихле по модулю N, $\chi(-1) = (-1)^k$, то

$$dim_{\mathbf{C}}(S_k(\Gamma_0(N), \chi)) - dim_{\mathbf{C}}(M_{2-k}(\Gamma_0(N), \chi)) =$$

$$= \frac{(k-1)N}{12} \prod_{p|N} (1+p^{-1}) - \frac{1}{2} \prod_{p|N} \lambda(r_p, s_p, p) + \nu_k \cdot \sum_{x: x^2+1 \equiv 0 (N)} \chi(x) + \mu_k \cdot \sum_{x: x^2+x+1 \equiv 0 (N)} \chi(x)$$

Если $k > 2$, то $dim_{\mathbf{C}}(M_{2-k}(\Gamma_0(N), \chi)) = 0$. Левая часть становится равна $dim_{\mathbf{C}}(S_k(\Gamma_0(N), \chi))$. Если $k \leqslant 0$, то $dim_{\mathbf{C}}(S_k(\Gamma_0(N), \chi)) = 0$. Левая часть становится равна $-dim_{\mathbf{C}}(M_{2-k}(\Gamma_0(N), \chi))$.

1.2. Смысл компонент

Каждое из слагаемых в правой части имеет смысл, который мы сейчас поясним.

Первое слагаемое равно

$$(k-1)|\Gamma : \Gamma_0(N)| = \frac{(k-1)N}{12} \prod_{p|N} (1 + p^{-1}).$$

Мы рассматриваем случай четного веса, характер χ в этом случае тривиальный, и $s_p = 0\ \forall p$.

Второе слагаемое обозначим через $\frac{1}{2} D_1 = \frac{1}{2} \prod_{p|N} \lambda(r_p, s_p, p)$.

Рассмотрим функцию $\nu_\infty(N)$ — количество параболических вершин относительно $\Gamma_0(N)$. Докажем, что $D_1 = \nu_\infty(N)$.

$$\nu_\infty(N) = \sum_{d|N} \phi((d, \frac{N}{d})).$$

Покажем, что ν_∞ — мультипликативная функция. Пусть N и M —взаимно простые натуральные числа, тогда $\forall d|N,\ \delta|M$ числа $(d, \frac{N}{d})$ и $(\delta, \frac{N}{\delta})$ взаимно просты; когда d пробегает все делители N, δ пробегает все делители M, $d\delta$ пробегает все делители NM. Получаем

$$\nu_\infty(N)\nu_\infty(M) = \sum_{d|N} \phi((d, \frac{N}{d})) \sum_{\delta|M} \phi((\delta, \frac{M}{\delta})) =$$

$$= \sum_{d|N}\sum_{\delta|M}\phi((d,\frac{N}{d}))\phi((\delta,\frac{M}{\delta})) = \sum_{d|N}\sum_{\delta|M}\phi((d,\frac{N}{d})(\delta,\frac{M}{\delta})) =$$

$$= \sum_{d|N}\sum_{\delta|M}\phi((d\delta,\frac{NM}{d\delta})) = \sum_{\tilde{d}|MN}\phi((\tilde{d},\frac{NM}{\tilde{d}})) = \nu_\infty(NM).$$

Пусть $N = p^{2r'}$. Тогда

$$\nu_\infty(N) = 2(\phi(1)+\phi(p)+\phi(p^2)+...+\phi(p^{r'-1}))+\phi(p^{r'}) =$$

$$= 2(1+p-1+p^2-p+...+p^{r'-1}-p^{r'-2})+p^{r'}-p^{r'-1} = p^{r'}+p^{r'-1}.$$

Пусть $N = p^{2r'+1}$. Тогда

$$\nu_\infty(N) = 2(\phi(1)+\phi(p)+\phi(p^2)+...+\phi(p^{r'})) = 2\phi(p^{r'}).$$

Итак, $D_1 = \nu_\infty(N)$.

Третье слагаемое равно

$$\nu_k \cdot D_2 = \nu_k \cdot \sum_{x:x^2+1\equiv 0(N)}\chi(x).$$

В нашем случае рассматривается четный вес, поэтому характер тривиальный, и D_2 — количество решений уравнения $x^2+1\equiv 0(N)$.

Если N делится на 4 или на простое $p\equiv 3(4)$, то $D_2 = 0$.

Если $N = p_1^{\alpha_1}...p_s^{\alpha_s}$ или $N = 2p_1^{\alpha_1}...p_s^{\alpha_s}$, где $p_i\equiv 1(4)$, то $D_2 = 2^s$ — количество делителей числа $\tilde{N} = p_1...p_s$.

Четвертое слагаемое равно

$$\mu_k \cdot D_3 = \mu_k \cdot \sum_{x:x^2+x+1\equiv 0(N)}\chi(x).$$

В нашем случае D_3 — количество решений уравнения $x^2+x+1\equiv 0(N)$.

Если N делится на 2, 9 или на простое $p\equiv 2(3)$, то $D_3 = 0$.

Если $N = p_1^{\alpha_1}...p_s^{\alpha_s}$ или $N = 3p_1^{\alpha_1}...p_s^{\alpha_s}$, где $p_i\equiv 1(3)$, то $D_3 = 2^s$ — количество делителей числа $\tilde{N} = p_1...p_s$.

2. Теорема о рассечении

Теорема 2.1.

Пусть $f(z)\in S_l(\Gamma_0(N))$, l,k —положительные четные числа, $k>l$, тогда

$$S_k(\Gamma_0(N)) \cong f(z)M_{k-l}(\Gamma_0(N))\oplus V,$$

причем размерность V зависит от N,l и иногда от значения k по модулю 12.

Доказательство.

Очевидно, что пространство $f(z)M_{k-l}(\Gamma_0(N))$ содержится в $S_k(\Gamma_0(N))$, размерность V вычислим по формуле Коэна — Остерле.

$$dim\ V = \frac{(k-1)N}{12}\prod_{p|N}(1+p^{-1}) - \frac{1}{2}D_1 + \nu_k D_2 + \mu_k D_3 -$$

$$-\frac{(k-1)N}{12}\prod_{p|N}(1+p^{-1}) - \frac{1}{2}D_1 + \nu_{l-k+2}D_2 + \mu_{l-k+2}D_3 =$$

$$= \frac{lN}{12} \prod_{p|N} (1+p^{-1}) - D_1 + (\nu_k + \nu_{l-k+2}) D_2 + (\mu_k + \mu_{l-k+2}) D_3.$$

Если $D_2 = 0$, $D_3 = 0$ или при условии $k \equiv 2(4)$, $l \equiv 0(4)$, или при $k \equiv 0(4)$, $l \equiv 2(4)$ $dim\ V = l|\Gamma : \Gamma_0(N)| - \nu_\infty(N)$.

При возрастании k при фиксированном l доля дополнительного пространства V становится все менее значительной, ситуация приближается к точному рассечению.

3. Теоремы о структуре

Выбирая $f(z)$ удобным образом, можно точнее описать пространство V и выяснить структуру $S_k(\Gamma_0(N))$. Здесь возникают несколько различных ситуаций. Мы сформулируем ряд теорем, доказательства их аналогичны, различие в технических деталях. Мы приведем доказательство одной из них. Выбор в качестве $f(z)$ функции, являющейся η-произведением, объясняется прежде всего тем, что у функций такого вида нет нулей на верхней полуплоскости. В доказательстве использована формула для вычисления порядков эта-частных в параболических вершинах, полученная А. Биаджиоли в статье [7].

Напомним определение η-функции. Она задается следующей формулой:

$$\eta(z) = q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n), \qquad q = e^{2\pi i z},$$

z принадлежит верхней комплексной полуплоскости.

Как обычно, далее функции $E_4(z)$ и $E_6(z)$ — ряды Эйзенштейна.

3.1. Формулировки теорем

Теорема 3.1

Пусть $N \equiv 1\ (12)$. *Тогда*

$$S_k(\Gamma_0(N)) = (V_1 + V_2) \oplus V_3,$$

где

$V_1 = \eta^{24}(Nz) M_{k-12}(\Gamma_0(N))$, $V_2 = (S_{12}(\Gamma_0(N)))G(z)$, $V_3 = S_2(\Gamma_0(N))H(z)$.

Функции $G(z)$ *и* $H(z)$ *выписаны в следующей таблице в зависимости от значения* k. *При этом* $V_1 \cap V_2 = < \eta^{24}(Nz) \cdot G(z) >$.

Условие на k	$G(z)$	$H(z)$
$k \equiv 2(12),\quad k \geqslant 26$	$E_4^2 E_6^{\frac{k-20}{6}}$	$E_4^{\frac{k-2}{4}}$
$k \equiv 4(12),\quad k \geqslant 16$	$E_4^{\frac{k-12}{4}}$	$E_4^2 E_6^{\frac{k-10}{6}}$
$k \equiv 6(12),\quad k \geqslant 18$	$E_6^{\frac{k-12}{6}}$	$E_4^{\frac{k-2}{4}}$
$k \equiv 8(12),\quad k \geqslant 20$	$E_4^{\frac{k-12}{4}}$	$E_6^{\frac{k-2}{6}}$
$k \equiv 10(12),\quad k \geqslant 22$	$E_4 E_6^{\frac{k-16}{6}}$	$E_4^{\frac{k-2}{4}}$
$k \equiv 0(12),\quad k \geqslant 12$	$E_4^{\frac{k-12}{4}}$	$E_4 E_6^{\frac{k-6}{6}}$

Теорема 3.2

Пусть $N \equiv 5\ (12)$ *или* $N \equiv 9\ (12)$. *Тогда*

$$S_k(\Gamma_0(N)) = (V_1 + V_2) \oplus V_3,$$

где

$V_1 = \eta^4(Nz)\eta^4(z)\cdot M_{k-4}(\Gamma_0(N))$, $V_2 = (S_4(\Gamma_0(N)))\cdot G(z), V_3 = S_2(\Gamma_0(N))\cdot H(z)$,

$G(z) = E_4^{\frac{k-4}{4}}(z)$, $H(z) = E_6^{\frac{k-2}{6}}(z)$, *при* $k \equiv 0(4)$,

$G(z) = E_6^{\frac{k-4}{6}}(z)$, $H(z) = E_4^{\frac{k-4}{4}}(z)$, *при* $k \equiv 2(4)$.

При этом $V_1 \cap V_2 =< \eta^4(Nz)\eta^4(z)\cdot G(z) >$.

Теорема 3.3

Пусть $N \equiv 3\ (12)$ *или* $N \equiv 7\ (12)$. *Тогда*

$$S_k(\Gamma_0(N)) = (V_1 + V_2) \oplus V_3,$$

где

$V_1 = \eta^6(Nz)\eta^6(z)M_{k-6}(\Gamma_0(N))$, $V_2 = (S_6(\Gamma_0(N)))G(z)$, $V_3 = S_2(\Gamma_0(N))H(z)$,

функции $G(z)$ *и* $H(z)$ *выписаны в следующей таблице в зависимости от значения* k. *При этом* $V_1 \cap V_2 =< \eta^6(Nz)\eta^6(z)\cdot G(z) >$.

Условие на k	$G(z)$	$H(z)$
$k \equiv 2(12), \quad k \geqslant 14$	$E_4^2 E_6^{\frac{k-14}{6}}$	$E_4^{\frac{k-2}{4}}$
$k \equiv 4(12), \quad k \geqslant 16$	$E_4 E_6^{\frac{k-10}{6}}$	$E_6 E_4^{\frac{k-8}{4}}$
$k \equiv 6(12), \quad k \geqslant 18$	$E_6^{\frac{k-6}{6}}$	$E_4^{\frac{k-2}{4}}$
$k \equiv 8(12), \quad k \geqslant 20$	$E_6 E_4^{\frac{k-12}{4}}$	$E_6^{\frac{k-2}{6}}$
$k \equiv 10(12), \quad k \geqslant 22$	$E_4^{\frac{k-6}{4}}$	$E_4^2 E_6^{\frac{k-10}{6}}$
$k \equiv 0(12), \quad k \geqslant 12$	$E_6^{\frac{k-6}{6}}$	$E_6 E_4^{\frac{k-8}{4}}$

Теорема 3.4

Пусть $N \equiv 11\ (12)$. *Тогда*

$$S_k(\Gamma_0(N)) = V_1 + V_2 + V_3,$$

$V_1 = \eta^2(Nz)\eta^2(z)M_{k-2}(\Gamma_0(N))$, $V_2 = (S_2(\Gamma_0(N)))G(z)$, $V_3 = S_2(\Gamma_0(N))H(z)$,

$G(z)$ *и* $H(z)$ *выписаны в следующей таблице в зависимости от значения* k.

Условие на k	$G(z)$	$H(z)$
$k \equiv 2(12), \quad k \geqslant 2$	$E_4^{\frac{k-2}{4}}$	$E_6^{\frac{k-2}{6}}$
$k \equiv 4(12), \quad k \geqslant 4$	$E_4^2 E_6^{\frac{k-10}{6}}$	$E_6 E_4^{\frac{k-8}{4}}$
$k \equiv 6(12), \quad k \geqslant 6$	$E_4^{\frac{k-2}{4}}$	$E_4 E_6^{\frac{k-6}{6}}$
$k \equiv 8(12), \quad k \geqslant 8$	$E_6^{\frac{k-2}{6}}$	$E_6 E_4^{\frac{k-8}{4}}$
$k \equiv 10(12), \quad k \geqslant 10$	$E_4^{\frac{k-2}{4}}$	$E_4 E_6^{\frac{k-6}{6}}$
$k \equiv 0(12), \quad k \geqslant 12$	$E_6 E_4^{\frac{k-8}{4}}$	$E_4 E_6^{\frac{k-6}{6}}$

При этом

$V_1 \cap V_2 =< \eta^2(Nz)\eta^2(z)G(z) >$, $V_1 \cap V_3 =< \eta^2(Nz)\eta^2(z)H(z) >$, $V_2 \cap V_3 = \{0\}$.

Теорема 3.5

Пусть $N \equiv 2\ (4)$. *Тогда*

$$S_k(\Gamma_0(N)) = (V_1 + V_2) \oplus V_3,$$

где

$V_1 = \eta^8(Nz)\eta^8(z)M_{k-8}(\Gamma_0(N))$, $V_2 = (S_8(\Gamma_0(N)))G(z), V_3 = S_2(\Gamma_0(N))H(z)$,

$G(z) = E_4^{\frac{k-8}{4}}(z),\ \ H(z) = E_6^{\frac{k-2}{6}}(z),$ *при* $k \equiv 0(4),$
$G(z) = E_6^{\frac{k-8}{6}}(z),\ \ H(z) = E_4^{\frac{k-2}{4}}(z),$ *при* $k \equiv 2(4).$
При этом $V_1 \cap V_2 = <\eta^8(Nz)\eta^8(z)G(z)>.$

Теорема 3.6
Пусть $N \equiv 0\ (4)$. *Тогда*

$$S_k(\Gamma_0(N)) = (V_1 + V_2) \oplus V_3,$$

где
$V_1 = \eta^{12}(\frac{Nz}{2}) \cdot M_{k-6}(\Gamma_0(N)),\ \ V_2 = (S_6(\Gamma_0(N))) \cdot G(z), V_3 = S_2(\Gamma_0(N)) \cdot H(z),$
$G(z)$ *и* $H(z)$ *выписаны в зависимости от значения* k *в таблице к теореме 3.3.*
При этом $V_1 \cap V_2 = <\eta^{12}(\frac{Nz}{2}) \cdot G(z)>.$
Доказательство.

Мы приведем доказательство теоремы 3.3. Остальные случаи рассматриваются аналогично, разница лишь в небольших технических деталях, зависящих от значений веса и уровня.

Формулировка теоремы эквивалентна следующей, более удобной для проведения доказательства: $W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$, где
$W_1 = \eta^4(Nz)\eta^4(z)M_{k-4}(\Gamma_0(N));$
$W_2 = <\eta^4(Nz)\eta^4(z)>^{\perp} \cdot G(z);$
$W_3 = S_2(\Gamma_0(N))H(z).$
Здесь $<\ \eta^4(Nz)\eta^4(z)\ >^{\perp}$ — ортогональное дополнение к подпространству $<\eta^4(Nz)\eta^4(z)>$ относительно скалярного произведения Петерсона в $S_4(\Gamma_0(N))$.
Далее, размерность пространства слева равна сумме размерностей справа.
Действительно, для $k \equiv 0\ (4)$
$dim\ \ S_k(\Gamma_0(N)) = \frac{(k-1)N}{12}\prod_{p|N}(1+p^{-1}) - \frac{1}{2}D_1 + \frac{1}{4}D_2;$
$dim\ \ M_{k-4}(\Gamma_0(N)) = \frac{(k-5)N}{12}\prod_{p|N}(1+p^{-1}) + \frac{1}{2}D_1 + \frac{1}{4}D_2;$
для $k \equiv 2\ (4)$
$dim\ \ S_k(\Gamma_0(N)) = \frac{(k-1)N}{12}\prod_{p|N}(1+p^{-1}) - \frac{1}{2}D_1 - \frac{1}{4}D_2;$
$dim\ \ M_{k-4}(\Gamma_0(N)) = \frac{(k-5)N}{12}\prod_{p|N}(1+p^{-1}) + \frac{1}{2}D_1 - \frac{1}{4}D_2;$
$dim\ \ S_2(\Gamma_0(N)) = \frac{N}{12}\prod_{p|N}(1+p^{-1}) - \frac{1}{2}D_1 - \frac{1}{4}D_2 + 1;$
$dim\ \ S_4(\Gamma_0(N)) - 1 = \frac{3N}{12}\prod_{p|N}(1+p^{-1}) - \frac{1}{2}D_1 + \frac{1}{4}D_2 - 1.$
Покажем, что $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

Параболическая форма $f(z)$ уровня N и веса k принадлежит пространству W_1 тогда и только тогда, когда она удовлетворяет следующим условиям в параболических вершинах:

$$ord_{\infty}(f) \geqslant \frac{N+1}{6};\ \ ord_0(f) \geqslant \frac{N+1}{6};\ \ ord_{\frac{m}{n}}(f) \geqslant \frac{N+n^2}{6n(n,\frac{N}{n})}.$$

Действительно, в этом случае $\frac{f(z)}{\eta^4(Nz)\eta^4(z)}$ является модулярной формой веса $k-4$, так как порядки в параболических вершинах у этого частного неотрицательны. То, что эти условия выполняются для любой модулярной формы из пространства в W_1, очевидно, так как у формы $\eta^4(Nz)\eta^4(z)$ нет нулей на верхней полуплоскости, а выписанные справа значения порядков — это в точности значения ее порядков в параболических вершинах.

Если $f(z) \in W_1 \cap W_2$, то $f(z) = g(z)G(z)$, а для $g(z)$ выполняются указанные условия в параболических вершинах, так как нулей в параболических вершинах у $G(z)$ нет. Но тогда $\frac{g(z)}{\eta^4(Nz)\eta^4(z)} \in M_0(\Gamma_0(N))$, то есть равна константе, что невозможно.

Теперь покажем, что $W_1 \cap W_3 = \{0\}$.

Равенство $\eta^4(Nz)\eta^4(z)\cdot F(z) = f(z)\cdot H(z)$, $F(z) \in M_{k-4}(\Gamma_0(N))$, $f(z) \in S_2(\Gamma_0(N))$ невозможно, так как существует параболическая вершина, в которой какое-нибудь из указанных выше условий нарушается, так как $H(z)$ не имеет нулей в параболических вершинах, а степень дивизора у форм из $S_2(\Gamma_0(N)$ ровно в два раза меньше, чем степень дивизора у форм из $S_4(\Gamma_0(N)$.

И, наконец, покажем, что $W_2 \cap W_3 = \{0\}$.

Пусть $k \equiv 0 \ (4)$.

Из равенства $f_1(z)E_4^{\frac{k-4}{4}} = f_2(z)E_6^{\frac{k-2}{6}}$ следует неравенство $ord_\omega f_2(z) \geqslant \frac{k-4}{4}$.

Тогда $\frac{f_2^2(z)}{E_4(z)} \in M_0(\Gamma_0(N))$, то есть $f_2^2(z) = cE_4(z)$, что невозможно, так как $E_4(z)$ не является параболической формой.

Для $k \equiv 2 \ (4)$ аналогично.

4. Точное рассечение

Теорема 4.1

Пусть k, l — четные числа, $k > l$.

$$S_k(\Gamma_0(N)) \cong f(z) \cdot M_{k-l}(\Gamma_0(N))$$

тогда и только тогда, когда либо

1) $f(z)$ — мультипликативное эта-произведение четного веса,

либо

2) $N = 17$, $k \equiv 2(4), k \geqslant 6$, $l = 2$;

$N = 19$, $k \equiv 2(6), k \geqslant 8$, $l = 2$.

Во всех этих случаях $f(z)$ имеет мультипликативные коэффициенты Фурье, являясь собственной функцией относительно всех операторов Гекке, и

$S_l(\Gamma_0(N)) \cong < f(z) >$. Кроме двух последних пространств $S_2(\Gamma_0(17))$ и $S_2(\Gamma_0(19))$, $f(z)$ является мультипликативным эта-произведением четного веса. Приведем их в следующей таблице. Этот список можно найти в статьях [8–10].

$f(z)$	k	N
$\eta^4(6z)$	2	36
$\eta^2(8z)\eta^2(4z)$	2	32
$\eta^2(10z)\eta^2(2z)$	2	20
$\eta(12z)\eta(6z)\eta(4z)\eta(2z)$	2	24
$\eta(15z)\eta(5z)\eta(3z)\eta(z)$	2	15
$\eta(14z)\eta(7z)\eta(2z)\eta(z)$	2	14
$\eta^2(9z)\eta^2(3z)$	2	27
$\eta^2(11z)\eta^2(z)$	2	11
$\eta^2(6z)\eta^2(3z)\eta^2(2z)\eta^2(z)$	4	6
$\eta^4(5z)\eta^4(z)$	4	5
$\eta^8(3z)$	4	9
$\eta^4(4z)\eta^4(2z)$	4	8
$\eta^6(3z)\eta^6(z)$	6	3
$\eta^{12}(2z)$	6	4
$\eta^8(2z)\eta^8(z)$	8	2
$\eta^{24}(z)$	12	1

Доказательство.

Отметим сразу, что утверждение теоремы для уровня 1 и веса $l = 12$ является хорошо известным классическим фактом [2].

Докажем сначала, что если имеет место точное рассечение, то

$dim\ S_l(\Gamma_0(N)) = 1$.

Допустим противное. Тогда пространства $f(z) \cdot M_{k-l}(\Gamma_0(N))$ совпадают для любых $f(z)$ из $S_l(\Gamma_0(N))$. Пусть $h(z)$ — функция из $M_{k-l}(\Gamma_0(N))$ и s — такая параболическая вершина, в которой она не обращается в ноль. Пусть $f(z)$ — такая функция из $S_l(\Gamma_0(N))$, что $ord_s(f)$ минимально. Пусть $g(z)$ — такая функция из $S_l(\Gamma_0(N))$, что $ord_s(g) > ord_s(f)$. Имеем $f(z)h(z) = g(z)h_1(z)$, $h(z)$, $h_1(z) \in \in M_{k-l}(\Gamma_0(N))$. Но это равенство невозможно, так как порядки в s у функций справа и слева различны. Значит, все формы из $S_l(\Gamma_0(N))$ имеют одинаковый порядок в s. Но это тоже невозможно, так как если $f(z)$ и $g(z)$ — нормированные формы из $S_l(\Gamma_0(N))$, тогда $f(z) - g(z)$ имеет больший порядок в s.

Известно, что $dim\ S_{12}(\Gamma)) = 1$. Следовательно, $dim\ S_{12}(\Gamma_0(N)) > 1 \forall N > 1$. Значит, проверять l надо до значения 12. Если $dim\ S_2(\Gamma_0(p)) > 1$, то $dim\ S_k(\Gamma_0(p)) > 1$, поэтому для точного рассечения необходимым условием является

$dim\ S_2(\Gamma_0(p)) \leqslant 1$, где p — простой делитель уровня N. Это условие выполняется для $p = 2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 17,\ 19$. Вычисляем, что для

$N = 11,\ 12,\ 14,\ 15,\ 17,\ 19,\ 20,\ 27,\ 36$ $dim\ S_2(\Gamma_0(N)) = 1$. Если уровень N_1 делится на любое из этих значений, $N_1 > N$, $dim\ S_2(\Gamma_0(N_1)) > 1$.

Далее, что для $N = 5,\ 8,\ 9$ $dim\ S_4(\Gamma_0(N)) = 1$; если уровень N_1 делится на любое из этих значений, $N_1 > N$, $dim\ S_4(\Gamma_0(N_1)) > 1$;

для $N = 3,\ 4$ $dim\ S_6(\Gamma_0(N)) = 1$; если уровень N_1 делится на любое из этих значений, $N_1 > N$, $dim\ S_6(\Gamma_0(N_1)) > 1$;

для $N = 2$ $dim\ S_8(\Gamma_0(N)) = 1$; если уровень N_1 делится на любое из этих значений, $N_1 > N$, $dim\ S_8(\Gamma_0(N_1)) > 1$.

Для всех мультипликативных эта-произведений известно, что их порядок в каждой параболической вершине равен 1, а вне параболических вершин нулей нет. Пусть $g(z) \in S_k(\Gamma_0(N))$, тогда $\frac{g(z)}{f(z)} \in M_{k-l}(\Gamma_0(N))$. Обратное включение $f(z) \times \times M_{k-l}(\Gamma_0(N)) \subset S_k(\Gamma_0(N))$ очевидно.

Мультипликативные η-произведения соответствуют всем рассматриваемыем выше уровням, кроме 17, 19. Для уровней $N = 17,\ 19$ равенство размерностей для пространств слева и справа достигается не для любых значений k, а лишь при указанных в формулировке условиях.

Литература

[1] Ono K. The web of modularity: arithmetic of the coefficients of modular forms and q-series. A.M.S.: Providence, 2004. 216 p.

[2] Коблиц Н. Введение в эллиптические кривые и модулярные формы. М.: Мир, 1988. 320 с.

[3] Кнэпп Э. Эллиптические кривые. М.: Факториал Пресс, 2004. 488 с.

[4] Воскресенская Г.В. Пространства модулярных форм, содержащих мультипликативные эта-произведения // Вестник Самарского государственного университета, 2012. Т. 97. № 6. С. 5–11.

[5] Voskresenskaya G.V. One special class of modular forms and group representations // Journal de Theorie des Nombres de Bordeaux. 1999. Vol. 11. P. 247–262.

[6] Cohen H., Oesterle J. Dimensions des espaces de formes modulaires // LNM. 1976. Vol. 627. P. 69–78.

[7] Biagioli A.J.F. The construction of modular forms as products of transforms of the Dedekind eta-function // Acta Arithm. 1990. Vol. LIV. № 4. P. 273–300.

[8] Mason G. M_{24} and certain automorphic forms // Contemp.Math. 1985. Vol. 45. P. 223–244.

[9] Gordon B., Sinor D. Multiplicative properties of η-products. // L.N.M. 1987. Vol. 1395. P. 173–200.

[10] Dummit D.,Kisilevsky H., MacKay J. Multiplicative products of η-functions // Contemp. Math. 1985. Vol. 45. P. 89–98.

References

[1] Ono K. The web of modularity: arithmetic of the coefficients of modular forms and q-series. A.M.S., Providence, 2004, 216 p.

[2] Koblitz N. Introduction in elliptic curves and modular forms. M., Mir, 1988, 320 p. [in Russian].

[3] Knapp A. Elliptic curves. M., Faktorial Press, 2004, 488 p. [in Russian].

[4] Voskresenskaya G.V. Spaces of modular forms containing multiplicative eta-products. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser.: Estestvennonauchnaiia* [*Vestnik of Samara State University. Natural Science Series*], 2012, no. 6(97), pp. 5–11 [in Russian].

[5] Voskresenskaya G.V. One special class of modular forms and group representations. *Journal de Theorie des Nombres de Bordeaux*, 1999, Vol. 11, pp. 247–262.

[6] Cohen H., Oesterle J. Dimensions des espaces de formes modulaires. *LNM*, 1976, Vol. 627, pp. 69–78.

[7] Biagioli A.J.F. The construction of modular forms as products of transforms of the Dedekind eta-function. *Acta Arithm.*, 1990, Vol. LIV, no. 4, pp. 273–300.

[8] Mason G. M_{24} and certain automorphic forms. *Contemp.Math.*, 1985, Vol. 45, pp. 223–244.

[9] Gordon B., Sinor D. Multiplicative properties of η-products. *LNM*, 1987, Vol. 1395, pp. 173–200.

[10] Dummit D., Kisilevsky H., MacKay J. Multiplicative products of η-functions. *Contemp.Math.*, 1985, Vol. 45, pp. 89–98.

G.V. Voskresenskaya[3]

ON SPACES OF MODULAR FORMS OF EVEN WEIGHT

In the article we study the structure of space of cusp forms of an even weight and a level $N$with the help of cusp forms of minimal weight of the same level. The exact cutting is studied when each cusp form is a product of fixed function and a modular form of a smaller weight. Except the levels 17 and 19 the cutting function is a multiplicative eta – product. In the common case the space $f(z)M_{k-l}(\Gamma_0(N))$ is not equal to the space $S_k(\Gamma_0(N))$, the structure of additional space is competely studied. The result is depended on the value of the level modulo 12. Dimensions of spaces are calculated by the Cohen — Oesterle formula, the orders in cusps are calculated by the Biagioli formula.

Key words: modular forms, cusp forms, Dedekind eta-function, parabolic vertex, Eisenstein series, divisor of function, structure theorems, Cohen — Oesterle formula.

Статья поступила в редакцию 24/ VI /2014.

The article received 24/ VI /2014.

[3] *Voskresenskaya Galina Valentinovna* (galvosk@mail.ru), Department of Algebra and Geometry, Samara State University, Samara, 443011, Russian Federation.