ФИЗИКА

УДК 539.12.01

А.Ф. Крутов, П.А. Никулин[1]

СВЯЗЬ РАЗЛИЧНЫХ ПАРАМЕТРИЗАЦИЙ ОПЕРАТОРА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ТОКА ПРОТОНА В УСЛОВИЯХ НАРУШЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ СИММЕТРИЙ

Рассматриваются полевая и каноническая процедуры параметризации матричных элементов оператора электромагнитного тока протона в условиях нарушения дискретных симметрий. В статье описаны основные принципы, лежащие в основе полевой и канонической параметризации. Получена связь формфакторов протона в полевой и канонической параметризации. Определен физический смысл формфакторов нечетной части оператора тока протона в канонической параметризации. Обсуждается возможность использования полученных результатов для решения актуальных проблем теории электромагнитной структуры протона — нерозенблютовского рассеяния электронов на протонах и среднеквадратичного зарядового радиуса протона.

Ключевые слова: оператор электромагнитного тока, полевая параметризация, каноническая параметризация, связь параметризаций, радиус протона, нерозенблютовское рассеяние, нарушение дискретных симметрий, анапольный формфактор.

Введение

В настоящее время существует несколько открытых проблем в теории электромагнитной структуры протона. Первая проблема связана с нерозенблютовским поведением формфакторов протона в экспериментах по рассеянию продольно поляризованных электронов на протонах [1]. Отношение электрического формфактора к магнитному в этих экспериментах является функцией, линейно убывающей с ростом квадрата переданного импульса. Это противоречит предыдущим экспериментам по рассеянию неполяризованных электронов. Следуя методу Розенблюта [2], было показано, что отношение формфакторов — это величина, близкая к константе и не зависящая от переданного импульса [3]. Однозначного общепризнанного решения проблемы расхождения результатов экспериментов по упругому ep-рассеянию с поляризованными и неполяризованными пучками до сих пор не

Крутов Александр Федорович (krutov@samsu.ru), *Никулин Павел Андреевич* (napavel@mail.ru), кафедра общей и теоретической физики, Самарский государственный университет, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

найдено, однако существует несколько различных подходов к объяснению данного противоречия. Наиболее обсуждаемым является подход, основанный на учете двухфотонного обмена при описании ep-рассеяния, однако данный подход не решает проблему полностью, а лишь смягчает ее [4]. Существует также несколько альтернативных вариантов решения противоречия, среди которых следует выделить подход, основанный на гипотезе о нарушении P-симметрии [5; 6]. Косвенным подтверждением данной гипотезы и подхода в целом может служить недавний эксперимент по рассеянию электронов на ядрах дейтрона, проведенный Jefferson Lab [7]. В данном эксперименте была установлена разница между сечением рассеяния поляризованных электронов со спином, направленным по направлению импульса и против него и тем самым показана возможность нарушения пространственной четности в электромагнитных процессах с участием сильновзаимодействующих составных систем.

Другая проблема связана с измерением зарядового радиуса протона. Существует два основных метода измерения среднеквадратичного радиуса протона — из экспериментов по упругому ep-рассеянию и из спектроскопии атома водорода. Результаты для радиуса протона, полученные в рамках этих двух методов, совпадают в пределах точности измерений [8]. Неожиданная оценка среднеквадратичного зарядового радиуса протона была получена из Лэмбовского сдвига уровней атома мюонного водорода в прецизионном эксперименте [9]. Измерения радиуса протона, проведенные в ходе данного эксперимента, являются более чем в десять раз более точными, чем все предыдущие измерения, однако же результат данного эксперимента расходится с результатами спектроскопии атома водорода и упругого ep-рассеяния более чем на 5σ. В настоящее время проблема остается нерешенной, однако существует несколько возможных объяснений возникшей проблемы. Так, в работе [10] было показано, что присутствие электрона на расстоянии порядка боровского радиуса от атома мюонного водорода приводит образованию трехчастичной системы $p\mu e^-$ и, соответственно, дополнительных переходов в этой системе, которые и могли быть измерены в эксперименте [9]. Однако в [11] было установлено, что системы $p\mu e^-$ и $pp\mu^-$ являются нестабильными и гораздо менее долгоживущими, чем атом мюонного водорода. Таким образом загадка радиуса протона не связана с образованием трехчастичных систем в ходе эксперимента [9].

Еще одно возможное решение проблемы связано с учетом поляризуемости протона при расчете вклада двухфотонного обмена. Учет данного вклада производится на стыке КЭД и КХД и в целом неоднозначен [12]. Тем не менее в [13] было показано, что обозначенный вклад может быть достаточно велик для атома мюонного водорода и пренебрежимо мал для обычного атома водорода. Однако подобное объяснение проблемы возможно лишь при условии наличия неучтенного контактного протон-лептонного взаимодействия, присутствующего в Стандартной модели. Необходимость такого рода взаимодействия обусловлена поведением амплитуды рассеяния виртуального фотона на протоне при больших импульсах. Предположение о наличии подобного взаимодействия в эксперименте [9] требует дальнейшего экспериментального и теоретического изучения.

Существует множество попыток решения проблемы за рамками Стандартной модели с привлечением новых неизвестных частиц и полей (см., например [14]). Данные подходы основываются на предположении о существовании неуниверсального относительно лептонов взаимодействия. Однако множество уже проведенных экспериментов накладывают серьезные ограничения на возможное новое взаимодействие. Экспериментальные ограничения таковы, что полноценной модели, удовлетворяющей им и решающей проблему среднеквадратичного зарядового радиуса протона, найдено не было.

Таким образом, описание электромагнитной структуры протона до сих пор остается актуальной задачей. Как известно, структура протона описывается при помощи набора инвариантных функций, измеряемых на эксперименте, — формфакторов. Они естественным образом возникают при параметризации оператора электромагнитного тока протона как коэффициенты перед соответствующими членами разложения. Существует несколько различных методов подобной параметризации, каждый из которых обладает своими преимуществами. В данной статье будут рассмотрены полевая и так называемая каноническая параметризация оператора электромагнитного тока, предложенная в [15]. Основным преимуществом полевой параметризации является простота физической интерпретации результатов, полученных в ее рамках. Преимуществом канонической параметризации является возможность построения матричных элементов операторов токов перехода любой тензорной размерности для частиц произвольного спина, следуя общей схеме.

Связь полевой и канонической параметризаций оператора электромагнитного тока протона при условии сохранения дискретных симметрий в процессе взаимодействия протона с электромагнитным полем впервые была установлена в работе [16]. Однако ввиду предположения, что данный процесс происходит с нарушением пространственной четности [6], требуется проведение связи параметризаций в более общем виде. Целью данной работы является установление связи формфакторов протона в полевой и канонической параметризации при условии нарушения P- и CP-четности. Все полученные в статье результаты являются модельно-независимыми и могут быть использованы для описания любых других фермионов со спином 1/2.

1. Полевая параметризация

Известно, что оператор тока $\widehat{J}^{\mu}(x)$ является локальным оператором. Ввиду свойства трансляционной инвариантности для него справедливо соотношение:

$$\langle\vec{p},m|\,\widehat{J}^{\mu}(x)|\vec{p}\,',m'\rangle = e^{-i(p\,'-p)x}\langle\vec{p},m|\,\widehat{J}^{\mu}(0)|\vec{p}\,',m'\rangle, \tag{1.1}$$

где $\vec{p}\,'$, m' и $\vec{p}$, m — начальные и конечные 3-импульс и проекция спина частицы соответственно. Ввиду данного соотношения достаточно параметризовать лишь оператор тока в точке $x=0$, поэтому далее в тексте под оператором тока $\widehat{J}^{\mu}$ будет пониматься $\widehat{J}^{\mu}(0)$.

Запишем оператор тока в наиболее общем виде. Рассмотрим взаимодействие фермиона со спином 1/2 с фотоном. Матричный элемент оператора тока частицы может быть выражен через вершинный оператор ее взаимодействия с фотоном:

$$\langle\vec{p},m|\,\widehat{J}^{\mu}|\vec{p}\,',m'\rangle = \bar{u}(p\,,m)\,\widehat{O}^{\mu}(p\,,p\,')\,u(p\,',m'). \tag{1.2}$$

Здесь $u(p\,',m')$ и $\bar{u}(p\,,m)$ — дираковские спинор и сопряженный спинор, соответствующие частице в начальном и конечном состоянии. Спиноры удовлетворяют уравнениям Дирака в импульсном представлении:

$$(\hat{p}\,'-M)u(p\,',m') = 0, \qquad \bar{u}(p\,,m)\,(\hat{p}-M) = 0, \tag{1.3}$$

где $\hat{p} = p_{\mu}\gamma^{\nu}$. В последующем будем пользоваться сокращенными обозначениями для биспиноров:

$$u' \equiv u(p\,',m'), \qquad \bar{u} \equiv \bar{u}(p\,,m). \tag{1.4}$$

Таким образом, задача о параметризации матричного элемента оператора тока сводится к задаче о параметризации вершинного оператора $\widehat{O}^{\mu}$. Этот оператор должен быть лоренц-вектором. Кроме того, он может зависеть только лишь от начального и конечного импульсов частицы p' и p и дираковских матриц γ^{μ}. Перечисленными свойствами обладают следующие 4-векторы:

$$\begin{gathered} q^{\mu},\, P^{\mu},\, \gamma^{\,\mu},\, \sigma^{\mu\nu}q_{\nu},\, \sigma^{\mu\nu}P_{\nu}, \\ \gamma^5 q^{\mu},\, \gamma^5 P^{\mu},\, \gamma^5\gamma^{\,\mu},\, \gamma^5\sigma^{\mu\nu}q_{\nu},\, \gamma^5\sigma^{\mu\nu}P_{\nu}, \end{gathered} \tag{1.5}$$

где

$$q^{\mu} = (p-p')^{\mu}, \quad P^{\mu} = (p+p')^{\mu}, \quad \sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\left(\gamma^{\,\mu}\gamma^{\,\nu} - \gamma^{\,\nu}\gamma^{\,\mu}\right), \quad \gamma^5 = -i\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4. \tag{1.6}$$

Так как при параметризации тока (1.2) матрицы (1.5) берутся в обкладках из биспиноров, не все из них являются линейно независимыми. Используя уравнения Дирака (1.3), можно показать (см., например, [16]), что линейно независимыми являются лишь три из пяти матриц (1.5), содержащие γ^5, и три матрицы, не содержащие γ^5. При построении необходимо учесть, что оператор тока должен удовлетворять закону сохранения:

$$q_{\mu}\widehat{J}^{\mu} = 0. \tag{1.7}$$

Выполнение закона сохранения заряда сокращает число независимых матриц набора (1.5) до двух, содержащих матрицу γ^5, и двух, не содержащих ее. Таким образом, существует четыре независимых формфактора протона, каждый из которых является коэффициентом в линейной комбинации независимых матриц вида (1.5). Формфактор частицы должен быть скалярной лоренц-инвариантной функцией, зависящей от переменных в обкладках оператора. Практически удобно перейти к единственной переменной — квадрату переданного импульса $Q^2 = -q^2$.

Важно отметить, что элементы оператора тока, содержащие γ^5, нарушают P- и CP-четность оператора и, следовательно, четность лагранжиана взаимодействия. Ввиду этого, данные члены обычно отбрасывают и рассматривают лишь четную относительно дискретных симметрий часть оператора тока. Однако наличие вышеупомянутых матриц в операторе тока может быть принципиально важным для объяснения ряда актуальных проблем физики протона, в частности, упомянутых выше проблемы нерозенблютовского рассеяния поляризованных электронов на протонах [6] и проблемы мюонного водорода [9]. В связи с этим в данной статье требование P- и CP-четности на матричный элемент оператора тока накладываться не будет.

В соответствии с вышесказанным матричный элемент оператора тока удобно записать в виде суммы двух частей: нарушающей и не нарушающей дискретные симметрии. Учитывая закон сохранения заряда (1.7), матричный элемент может быть представлен в виде:

$$\begin{gathered} \langle\vec{p},m|\widehat{J}^{\mu}|\vec{p}\,',m'\rangle \equiv J^{\mu}_{mm'}(p,p') = J^{\mu}_{mm',\,sym}(p,p') + J^{\mu}_{mm',\,asym}(p,p'), \\ J^{\mu}_{mm',\,sym}(p,p') = F_1(Q^2)\,\bar{u}\gamma^{\mu}u' + \frac{i\varkappa}{2M}\,F_2(Q^2)\,\bar{u}\sigma^{\mu\nu}\gamma_{\nu}\,u', \\ J^{\mu}_{mm',\,asym}(p,p') = F_a(Q^2)\,\bar{u}\,(q^2\gamma^{\mu} - 2M\,q^{\mu})\gamma^5 u' - F_d(Q^2)\,\bar{u}\,\sigma^{\mu\nu}q_{\mu}\gamma^5 u'. \end{gathered} \tag{1.8}$$

Здесь $F_1(Q^2)$ и $F_2(Q^2)$ — формфакторы Дирака и Паули, $\varkappa$ — аномальный магнитный момент протона в магнитонах Бора, $F_d(Q^2)$ — дипольный формфактор протона, а $F_a(Q^2)$— так называемый, анапольный формфактор протона, связанный с его анапольным моментом [17]. Классическим аналогом анапольного момента является т. н. тороидный момент свернутого в тор соленоида [18].

Обычно из соображений удобства вместо формфакторов Дирака и Паули $F_1(Q^2)$ и $F_2(Q^2)$ вводят электрический и магнитный формфакторы Сакса, $G_E(Q^2)$ и $G_M(Q^2)$, соответственно:

$$\begin{gathered} G_E(Q^2) = F_1(Q^2) - \frac{\varkappa Q^2}{4M^2} F_2(Q^2), \\ G_M(Q^2) = F_1(Q^2) + \varkappa F_2(Q^2). \end{gathered} \tag{1.9}$$

Формфакторы Сакса обладают простым физическим смыслом, проявляющимся, например, при описании процессов рассеяния.

Отметим, что статическим моментам протона соответствуют значения соответствующих саксовских формфакторов в нуле. Так, анапольный момент выражается через анапольный формфактор $a = F_a(0)$. Кроме того, через производные соответствующих формфакторов в нуле определяются среднеквадратичные радиусы частиц. Например, среднеквадратичный зарядовый радиус протона выражается следующим образом:

$$\langle r_E^2 \rangle = -\frac{6}{G_E(0)} \left. \frac{dG_E(Q^2)}{dQ^2} \right|_{Q^2=0}. \tag{1.10}$$

Радиусы протона, связанные с другими видами взаимодействий, выражаются в аналогичной форме.

2. Каноническая параметризация

Помимо полевого способа параметризации существует альтернативный метод, развитый в работе [15]. В этой работе разработан общий подход, позволяющий строить матричные элементы токов перехода любой тензорной размерности для частиц произвольных спинов. Последнее является затруднительным в схеме полевой параметризации.

С теоретико-групповой точки зрения процедура канонической параметризации представляет собой реализацию теоремы Вигнера — Эккарта на группе Пуанкаре [19]. Процедура канонической параметризации сводится к построению из переменных, от которых зависят векторы гильбертова пространства в обкладках оператора, объектов двух видов:

1. Набор линейно независимых матриц по проекциям спина, являющихся одновременно лоренцевыми скалярами или псевдоскалярами. Данный набор описывает матричные элементы оператора, недиагональные по проекциям спина в начальном и конечном состояниях, а также поведение матричного элемента при дискретных преобразованиях пространства-времени.

2. Набор линейно независимых объектов той же тензорной размерности, что и параметризуемый оператор. Этот набор описывает поведение матричного элемента при преобразованиях Лоренца. Он совпадает с первым набором в случае параметризации скалярного оператора.

Матричный элемент оператора записывается в виде суммы всех возможных произведений объектов первого вида на объекты второго вида. Формфакторы канонической параметризации — это коэффициенты перед элементами этой суммы.

Таким образом, в соответствии с общими принципами для параметризации матричного элемента оператора тока $\widehat{J}^{\mu}$ необходимо построить набор линейно независимых объектов соответствующей тензорной размерности. В данном случае эти объекты должны быть 4-векторами и псевдовекторами. Из переменных состояния частицы возможно построить лишь один псевдовектор, оператор релятивистского спина $\Gamma^{\mu}(p)$ [15] и три независимых вектора:

$$q_{\mu}, \quad P_{\mu}, \quad R_{\mu} = \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\, p^{\nu} p'^{\,\lambda}\, \Gamma^{\rho}(p), \tag{2.1}$$

где $\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}$ — абсолютно антисимметричный псевдотензор 4-го ранга, $\epsilon_{0123} = -1$.

Оператор релятивистского спина в системе отсчета частицы произвольного импульса p связан с соответствующим оператором в системе покоя лоренцевым бустом L_p:

$$\begin{gathered} \Gamma^{\mu}_{mm'}(p) = \big(L_p\big)^{\mu}{}_{\nu}\, \Gamma^{\nu}_{mm'}(0), \\ \big(L_p\big)^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} + \frac{2\,p^{\mu}}{M}\,\delta^{0}_{\nu} - \frac{(p^{\mu} + M\delta^{\mu}_{0})(p_{\nu} + M\,\delta^{0}_{\nu})}{M(p^{0} + M)}. \end{gathered} \tag{2.2}$$

При этом оператор $\Gamma^{\mu}(p)$ определен таким образом, что в системе покоя частицы с точностью до множителя M совпадает с оператором нерелятивистского спина $(0, \vec{j}\,)$. Таким образом, несложно получить:

$$\begin{gathered} \Gamma^{0}(p) = (\vec{p}\vec{j}\,); \qquad \vec{\Gamma}(p) = M\vec{j} + \frac{\vec{p}\,(\vec{p}\vec{j}\,)}{p^{0} + M}; \\ \Gamma^{2} = -M^{2} j(j+1). \end{gathered} \tag{2.3}$$

Выпишем сразу вид матричного элемента оператора тока частицы спина $1/2$ в канонической параметризации с учетом закона сохранения заряда и самосопряженности оператора [6]:

$$\begin{gathered} \langle\vec{p}, m|J^{\mu}|\vec{p}\,', m'\rangle = \sum_{m''=-1/2}^{1/2} \langle m|D^{1/2}(p, p')|m''\rangle \times \\ \times\langle m''|\Big[f_{10}(Q^2) + f_{11}(Q^2)\big(ip_{\nu}\Gamma^{\nu}(p')\big)\Big]P^{\mu} + f_{20}(Q^2)\,A^{\mu} + if_{30}(Q^2)\,R^{\mu}|m'\rangle, \end{gathered} \tag{2.4}$$

где

$$A^{\mu} = \Gamma^{\mu}(p') - \left(\frac{P^{\mu}}{P^2} + \frac{q^{\mu}}{q^2}\right)\big(p_{\nu}\Gamma^{\nu}(p')\big). \tag{2.5}$$

Матрица $D^{j}(p, p')$ в выражении (2.4) является матрицей вращения Вигнера или иначе матрицей релятивистского поворота спина. Для спина $j = 1/2$ D-матрица приведена в работе [15] и равна:

$$D^{1/2}(p, p') = \frac{(p_0 + M)(p'_0 + M) - (\vec{p}\vec{\sigma})(\vec{p}\,'\vec{\sigma})}{\sqrt{2\,(p_0 + M)(p'_0 + M)(p_0 p'_0 - \vec{p}\,\vec{p}\,' + M^2)}}, \tag{2.6}$$

где $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ — вектор, составленный из матриц Паули.

По аналогии с (1.8) удобно будет разбить (2.4) на четную и нечетную относительно дискретных преобразований части:

$$J^{\mu}_{mm',\,sym}(p, p') = \sum_{m''=-1/2}^{1/2} D^{1/2}_{mm''}(p, p')\,\langle m''|f_{10}\,P^{\mu} + if_{30}\,R^{\mu}|m'\rangle, \tag{2.7}$$

$$J^{\mu}_{mm',\,asym}(p,p') = \sum_{m''=-1/2}^{1/2} D^{1/2}_{mm''}(p,p')\,\langle m''|f_{11}\big(ip_\nu\Gamma^\nu(p')\big)P^\mu + f_{20}\,A^\mu|m'\rangle. \qquad (2.8)$$

Здесь и далее аргумент формфактора будет опущен для краткости. Как будет показано далее, формфакторы в выражении (2.4) имеют следующий смысл: f_{10} и f_{30} можно интерпретировать как электрический и магнитный формфакторы соответственно, f_{11} является электрическим дипольным формфактором, а f_{20} — анапольным формфактором.

3. Связь канонической и полевой параметризации

Как было показано выше, существует два альтернативных метода параметризации (1.8) и (2.4) одного и того же объекта — матричного элемента оператора тока $J^{\mu}_{mm'}$ (1.1). Открытым остается вопрос связи формфакторов в различных параметризациях. Частично ответ на этот вопрос был получен в работе [16] для формфакторов, входящих в $J^{\mu}_{mm',\,sym}$. Мы не будем повторять здесь вычисления [16] и приведем лишь окончательный результат:

$$\begin{aligned} f_{10}(Q^2) &= \frac{2M}{\sqrt{4M^2+Q^2}}\,G_E(Q^2),\\ f_{30}(Q^2) &= -\frac{4}{M\sqrt{4M^2+Q^2}}\,G_M(Q^2). \end{aligned} \qquad (3.1)$$

Ввиду различия трансформационных свойств частей матричного элемента $J^{\mu}_{mm',\,sym}$ и $J^{\mu}_{mm',\,asym}$ относительно дискретных преобразований очевидно, что формфакторы G_E и G_M выражаются лишь через формфакторы f_{10} и f_{30}, а F_a и F_d — через f_{11} и f_{20}. Это означает, что проводить связь параметризаций для четной и нечетной части можно независимо. Таким образом, в дальнейшем нас будет интересовать лишь асимметричная часть матричного элемента.

Основная идея, лежащая в основе процедуры связи параметризаций, заключается в нахождении аналогов между объектами, формирующими нечетный матричный элемент в (1.8) и в (2.8). Таким образом, все, что необходимо сделать, — это выразить встречающиеся в (2.8) комбинации $\Gamma^{\mu}_{mm'}(p)$ и $D^{1/2}_{mm'}(p,p')$ при помощи объектов вида (1.5), взятых в обкладки из биспиноров начального и конечного состояния частицы.

Дальнейшие доказательства проведем в стандартом представлении для матриц Дирака [20]. В этом представлении:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i\\ -\sigma^i & 0\end{pmatrix},\quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\quad i=1,2,3. \qquad (3.2)$$

Дираковские биспиноры для свободных частиц с определенным спином представляются в виде [20]:

$$\begin{aligned} u(p',m') &= \sqrt{\varepsilon'-M}\begin{pmatrix} w_{m'}\\ \dfrac{\vec{p}\,'\vec{\sigma}}{\varepsilon'+M}\,w_{m'}\end{pmatrix},\\ \bar{u}(p,m) &= u^{+}(p,m)\,\gamma^0, \end{aligned} \qquad (3.3)$$

где w_m — двухкомпонентная спиновая функция, а $\varepsilon' = \sqrt{p'^2+M^2}$.

Биспиноры и гамма-матрицы обладают следующими трансформационным свойствами (см., например, [20]):

$$u(p,m) = S(L_P)\,u(0,m),$$

$$\bar u(p,m) = \bar u(0,m)\,S^{-1}(L_p), \tag{3.4}$$

$$S^{-1}(L_p)\,\gamma^\mu\,S(L_p) = (L_p)^\mu{}_\nu\,\gamma^\nu.$$

Здесь $S(L_p)$ — оператор спинорного представления группы Лоренца.

Используя (2.2), (3.3), (3.4), а также определение оператора спина $j^{\,i}$, установим соответствие между $\Gamma^\mu_{mm'}(p)$ и $u(p,m)\,\gamma^5\gamma^\mu\,u(p,m')$:

$$\begin{aligned}
\bar u(p,m)\,\gamma^5\gamma^\mu\,u(p,m') &= (L_p)^\mu{}_\nu\,\bar u(0,m)\,\gamma^5\gamma^\nu\,u(0,m') = \\
&= (L_p)^\mu{}_\nu\,(\varepsilon+M)\,\begin{pmatrix} w^T_m, & 0\end{pmatrix}\gamma^0\gamma^5\gamma^\nu\begin{pmatrix} w_{m'} \\ 0\end{pmatrix} = \\
&= (L_p)^\mu{}_i\,2M\,w^T_m\,\sigma^i\,w_{m'} = (L_p)^\mu{}_i\,4M\,w^T_m\,j^i\,w_{m'} = \\
&= (L_p)^\mu{}_\nu\,4\,\Gamma^\nu_{mm'}(0) = 4\,\Gamma^\mu_{mm'}(p).
\end{aligned} \tag{3.5}$$

При получении (3.5) учтено, что для покоящейся частицы $\varepsilon = M$ и $\Gamma^0_{mm'}(0) = 0$.

Теперь, используя явный вид биспиноров (3.3) и D-матрицы (2.6), несложно установить следующее соответствие:

$$\bar u(p\,,m)\,u(p'\,,m') = \sqrt{2(pp'+M^2)}\,D^{1/2}_{mm'}(p,p') = \sqrt{4M^2+Q^2}\,D^{1/2}_{mm'}(p,p'). \tag{3.6}$$

Приведем здесь еще одно известное соотношение, полезное для дальнейших вычислений [20]:

$$\sum_{m=-1/2}^{1/2} u(p,m)\,\bar u(p,m) = \hat p + M. \tag{3.7}$$

Несложно увидеть, что в канонической параметризации $J^\mu_{mm',\,asym}(p,p')$ является линейной комбинацией объектов двух видов:

$$\sum_{m''=-1/2}^{1/2} D^{1/2}_{mm''}(p,p')\,\langle m''|\,\Gamma^\mu(p')|m'\rangle, \tag{3.8}$$

$$\sum_{m''=-1/2}^{1/2} D^{1/2}_{mm''}(p,p')\,\langle m''|B^\mu(p_\nu\Gamma^\nu(p'))|m'\rangle, \tag{3.9}$$

где B^μ — произвольный 4-вектор. Рассмотрим каждый из них по отдельности. Начнем с более простого объекта (3.8). Приняв во внимание (3.5)–(3.7), а также уравнения Дирака (1.3) и коммутационные соотношения для γ-матриц, получим следующее соотношение:

$$\sum_{m''=-1/2}^{1/2} D^{1/2}_{mm''}(p,p')\,\Gamma^{\mu}_{m''m'}(p') =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{4M^2+Q^2}}\sum_{m''}\bar u(p,m)\,u(p',m'')\bar u(p',m'')\,\gamma^5\gamma^\mu\,u(p',m') = \qquad (3.10)$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{4M^2+Q^2}}\,\bar u\,(\hat p'+M)\,\gamma^5\gamma^\mu\,u'.$$

Коммутируя γ-матрицы, "протащим" $\hat p'$ к u' и воспользуемся уравнением Дирака:

$$\sum_{m''=-1/2}^{1/2} D^{1/2}_{mm''}(p,p')\,\Gamma^{\mu}_{m''m'}(p') =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{4M^2+Q^2}}\left(M\,\bar u\,\gamma^5\gamma^\mu u' - 2p'^{\,\mu}\,\bar u\,\gamma^5 u' + \bar u\,\gamma^5\gamma^\mu\,\hat p' u'\right) = \qquad (3.11)$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{4M^2+Q^2}}\left(2M\,\bar u\,\gamma^5\gamma^\mu u' + q^\mu\,\bar u\,\gamma^5 u' - P^\mu\,\bar u\,\gamma^5 u'\right).$$

Полученная формула является ключевой для процедуры связи параметризаций. С ее помощью нетрудно разложить объект (3.9) по базису полевой параметризации. Действительно, как можно видеть, (3.9) получается из (3.8) сверткой с p_ν и умножением на вектор B^μ:

$$\sum_{m''=-1/2}^{1/2} D^{1/2}_{mm''}(p,p')\,\langle m''|B^\mu(p_\nu\Gamma^\nu(p'))|m'\rangle =$$

$$= \frac{B^\mu}{4\sqrt{4M^2+Q^2}}\,p_\nu\left(2M\,\bar u\,\gamma^5\gamma^\nu u' - 2p'^{\,\nu}\,\bar u\,\gamma^5 u'\right) =$$

$$= -\frac{B^\mu}{4\sqrt{4M^2+Q^2}}\left(2M^2\,\bar u\,\gamma^5\gamma^\nu u' + 2pp'\,\bar u\,\gamma^5 u'\right) = \qquad (3.12)$$

$$= -\frac{\sqrt{4M^2+Q^2}}{4}\,B^\mu\,\bar u\,\gamma^5 u'.$$

Воспользуемся полученными соотношениями (3.11) и (3.12), чтобы перейти в выражении для нечетного матричного элемента (2.8) от канонической к полевой параметризации:

$$J^\mu_{mm',\,asym} = \left[if_{11}P^\mu - f_{20}\left(\frac{P^\mu}{P^2}+\frac{q^\mu}{q^2}\right)\right]\left(-\frac{\sqrt{4M^2+Q^2}}{4}\,\bar u\,\gamma^5 u'\right) +$$

$$+ f_{20}\,\frac{1}{4\sqrt{4M^2+Q^2}}\left(2M\,\bar u\,\gamma^5\gamma^\mu u' + (q^\mu - P^\mu)\,\bar u\,\gamma^5 u'\right) = \qquad (3.13)$$

$$= \frac{Mf_{20}}{2Q^2\sqrt{4M^2+Q^2}}\left(q^2\gamma^\mu - 2M\,q^\mu\right)\gamma^5 - if_{11}\,\frac{\sqrt{4M^2+Q^2}}{4}\,P^\mu\bar u\,\gamma^5 u'.$$

Доказательство соотношения (3.13) сводится к простым арифметическим преобразованиям с учетом равенства $P^2 = 4M^2+Q^2$.

Как можно видеть, выражение (3.13) записано в другом базисе, по сравнению с (1.8). Для перехода в нужный базис представим $P^\mu\bar u\,\gamma^5 u'$ в виде линейной комбинации независимых векторов $\bar{u}\,(q^2\gamma^\mu - 2M\,q^\mu)\gamma^5 u'$ и $\bar{u}\,\sigma^{\mu\nu}q_\mu\gamma^5 u'$. Используя уравнения Дирака (1.3) и коммутационные свойства γ-матриц, получим:

$$\bar{u}\,\sigma^{\mu\nu}q_\nu\gamma^5 u' = \frac{i}{2}\,\bar{u}\Big[(2g^{\mu\nu} - \gamma^\nu\gamma^\mu)p_\nu + (2g^{\mu\nu} - \gamma^\mu\gamma^\nu)p_\nu\Big]\gamma^5 u' = i\,P^\mu\,\bar{u}\,\gamma^5 u'. \quad (3.14)$$

Окончательно получаем выражение для нечетной части матричного элемента оператора тока в базисе полевой параметризации, записанное через формфакторы канонической параметризации:

$$J^\mu_{mm',\,asym} = \frac{M f_{20}}{2Q^2\sqrt{4M^2+Q^2}}\,\left(q^2\gamma^\mu - 2M\,q^\mu\right)\gamma^5 - f_{11}\,\frac{\sqrt{4M^2+Q^2}}{4}\,\bar{u}\,\sigma^{\mu\nu}q_\nu\gamma^5 u'. \quad (3.15)$$

Сравнивая выражения (1.8) и (3.15), получаем формулы связи формфакторов в полевой и канонической параметризации:

$$F_a(Q^2) = \frac{M f_{20}(Q^2)}{2Q^2\sqrt{4M^2+Q^2}},$$
$$F_d(Q^2) = \frac{\sqrt{4M^2+Q^2}}{4}\,f_{11}(Q^2). \quad (3.16)$$

Как и было сказано ранее, из полученных формул можно видеть, что в канонической параметризации f_{11} и f_{20} — это дипольный и анапольный формфакторы частицы соответственно.

В работе [6] было рассчитано сечение упругого электрон-протонного рассеяния с учетом нарушения пространственной четности. При расчете была использована неточная формула связи анапольного формфактора в канонической и полевой параметризации. Результаты, полученные в нашей статье, позволяют исправить допущенную неточность и получить верный вид анапольного формфактора.

Заключение

В статье установлена связь электромагнитных формфакторов фермиона со спином 1/2 в полевой и канонической параметризации с учетом нарушения дискретных симметрий в процессах взаимодействия фермиона с электромагнитным полем. Получены точные формулы связи формфакторов нечетной части матричных элементов оператора тока (3.16). По полученным формулам видно, что формфакторы канонической параметризации $f_{11}(Q^2)$ и $f_{20}(Q^2)$ пропорциональны формфакторам $F_d(Q^2)$ и $F_a(Q^2)$ полевой параметризации соответственно. Это значит, что формфактор $f_{11}(Q^2)$ можно интерпретировать как дипольный формфактор канонической параметризации, а формфактор $f_{20}(Q^2)$ как анапольный формфактор канонической параметризации.

Авторы выражают благодарность М.Ю. Кудинову за плодотворные обсуждения.

Литература

[1] G_E/G_M Ratio by Polarization Transfer in $\vec{e}p \to e\vec{p}$ / M.K. Jones [et al.] // Phys. Rev. Lett. 2000. V. 84. P. 1398–1402.

[2] Rosenbluth M.N. High Energy Elastic Scattering of Electrons on Protons // Phys. Rev. 1950. V. 79. P. 615–619.

[3] Measurements of the proton elastic form factors for $1 \leqslant Q^2 \leqslant 3(GeV/c)^2$ at SLAC / R.C. Walker [et al.] // Phys. Rev. D. 1994. V. 49. P. 5671–5689.

[4] Arrington J. Evidence for two-photon exchange contributions in electron-proton and positron-proton elastic scattering // Phys. Rev. C. 2004. V. 69. P. 032201.

[5] Крутов А.Ф., Кудинов М.Ю. Об анапольном формфакторе протона // Вестник Самарского государственного университета. Сер.: Естественнонаучная. 2012. № 3/2(94). С. 12–23.

[6] Крутов А.Ф., Кудинов М.Ю. Электромагнитная структура протона в рамках гипотезы о нарушении CP-инвариантности // Ядерная физика. 2013. Т. 76. № 11. С. 1410–1416.

[7] Measurement of parity violation in electron–quark scattering / D. Wang [et al.] // Nature. 2014. V. 506. P. 67–70.

[8] Mohr P.J., Taylor B.N., Newell D.B. CODATA recommended values of the fundamental physical constants: 2010 // Rev. Mod. Phys. 2012. V. 84. P. 1527–1605.

[9] The size of the proton / R. Pohl [et al.] // Nature. 2010. V. 466. P. 213–216.

[10] Jentschura U.D. Lamb shift in muonic hydrogen—II. Analysis of the discrepancy of theory and experiment // Ann. Phys. 2011. V. 326. P. 516—533.

[11] Karr J.P., Hilico L. Why Three-Body Physics Does Not Solve the Proton-Radius Puzzle // Phys. Rev. Lett. 2012. V. 109. P. 103401.

[12] Hill R.J., Paz G. Model Independent Analysis of Proton Structure for Hydrogenic Bound States // Phys. Rev. Lett. 2011. V. 107. P. 160402.

[13] Miller G.A. Proton polarizability contribution: Muonic hydrogen Lamb shift and elastic scattering // Phys. Lett. B. 2012. V. 718. P. 1078–1082.

[14] Proton Size Anomaly / V. Barger [et al.] // Phys. Rev. Lett. 2011. V. 106. P. 153001.

[15] Чешков А.А., Широков Ю.М. Инвариантная параметризация локальных операторов // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1963. Т. 44. С. 1982–1992.

[16] Баландина Е.В., Юдин Н.П. О соотношении параметризаций электромагнитных токов в квантовой теории // Вестник Московского государственного университета. Сер.: Физика и Астрономия. 1995. Т. 36. С. 14–19.

[17] Зельдович Я.Б. Электромагнитное взаимодействие при нарушении четности // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1957. Т. 33. С. 1531–1533.

[18] Дубовик В.М., Тосунян Л.А. Тороидные моменты в физике электромагнитных и слабых взаимодействий // Физика элементарных частиц и атомного ядра. 1983. Т. 14. С. 1193–1228.

[19] Крутов А.Ф. Аналог разложения Вигнера — Эккарта для группы Пуанкаре // Теоретическая физика. 2001. Т. 2. С. 97–111.

[20] Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Теоретическая физика. Т. 4. Квантовая электродинамика / под общ. ред. Л.П. Питаевского. 4-е изд., испр. М.: Физматлит, 2002. 720 с.

References

[1] Jones M.K. *et al.* G_E/G_M Ratio by Polarization Transfer in $\vec{e}p \to e\vec{p}$. Phys. Rev. Lett., 2000, Vol. 84, pp. 1398–1402.

[2] Rosenbluth M.N. High Energy Elastic Scattering of Electrons on Protons, Phys. Rev. 1950, Vol. 79, pp. 615–619.

[3] Walker R.C. (et. al.) Measurements of the proton elastic form factors for $1 \leqslant Q^2 \leqslant 3$ $(GeV/c)^2$ at SLAC. Phys. Rev. D, 1994, Vol. 49, pp. 5671–5689.

[4] Arrington J. Evidence for two-photon exchange contributions in electron-proton and positron-proton elastic scattering, Phys. Rev. C, 2004, Vol. 69, pp. 032201.

[5] Krutov A.F., Kudinov M.Yu. About proton anapole form factor. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser.: Estestvennonauchnaia* [Vestnik of Samara State University. Natural Science Series], 2012, no.3/2 (94), pp. 12–23 [in Russian].

[6] Krutov A.F., Kudinov M.Yu. Electromagnetic structure of the proton within the CP-violation hypothesis. *Iadernaia fizika* [Physics of Atomic Nuclei], 2013, Vol. 76, no. 11, pp. 1345–1351 [in Russian].

[7] Wang D. (et. al.) Measurement of parity violation in electron–quark scattering. Nature, 2014, Vol. 506, pp. 67–70.

[8] Mohr P.J., Taylor B.N., Newell D.B. CODATA recommended values of the fundamental physical constants: 2010. Rev. Mod. Phys., 2012, Vol. 84, pp. 1527–1605.

[9] Pohl R. *et al.* The size of the proton. Nature, 2010, Vol. 466, pp. 213–216.

[10] Jentschura U.D. Lamb shift in muonic hydrogen—II. Analysis of the discrepancy of theory and experiment. Ann. Phys., 2011, Vol. 326, pp. 516—533.

[11] Karr J.P., Hilico L. Why Three-Body Physics Does Not Solve the Proton-Radius Puzzle. Phys. Rev. Lett., 2012, Vol. 109, pp. 103401.

[12] Hill R.J., Paz G. Model Independent Analysis of Proton Structure for Hydrogenic Bound States. Phys. Rev. Lett., 2011, Vol. 107, pp. 160402.

[13] Miller G.A. Proton polarizability contribution: Muonic hydrogen Lamb shift and elastic scattering. Phys. Lett. B, 2012, Vol. 718, pp. 1078–1082.

[14] Barger V., Chiang C.W., Keung W.Y., Marfatia D. Proton Size Anomaly. Phys. Rev. Lett., 2011, Vol. 106, pp. 153001.

[15] Cheshkov A.A., Shirokov Yu.M. Invariant parametrization of local operators. *Zhurnal Experimentalnoi I Teoretocheskoi Fiziki* [Journal of Experimental and Theoretical Physics], 1963, Vol. 44, pp. 1982–1992 [in Russian].

[16] Balandina E.V., Yudin N.P. About relations of electromagnetic current parameterizations in quantum theory. *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser.: Fizika i Astronomia* [Vestnik of Moscow State University. Physics and Astonomy Series], 1995, Vol. 36, pp. 14–19 [in Russian].

[17] Zeldovich Ya.B. Electromagnetic interaction within a parity violation. Zhurnal Experimentalnoi I Teoretocheskoi Fiziki [Journal of Experimental and Theoretical Physics], 1957, Vol. 33, pp. 1531–1533. [in Russian].

[18] Dubovik V.M., Tosunian L.A. Toroid momentums in physics of electromagnetic and weak interactions. *Fizika elemantarnih chastitz i atomnogo yadra* [Physics of Elementary Particles and Atomic Nuclei], 1983, Vol. 14, p. 1193–1228 [in Russian].

[19] Krutov A.F. The analogue of Wigner-Eckart decomposition for Poincare group. *Teoreticheskaia fizika* [Theoretical physics], 2001, Vol. 2, pp. 97–111 [in Russian].

[20] Berestetskiy V.B., Lifshitz E.M., Pitaevskiy L.P. Theoretical physics. Pitaevskiy L.P. (Ed.). 4th ed., corr. M., Fizmatlit, 2002. Vol. 4: Quantum electrodynamics, 720 p. [in Russian].

A.F. Krutov, P.A. Nikulin [2]

CONNECTION OF DIFFERENT PARAMETRIZATIONS OF THE PROTON ELECTROMAGNETIC CURRENT OPERATOR IN DISCRETE SYMMETRIES VIOLATION CASE

In this paper field and canonical parameterizations of matrix elements of proton electromagnetic current operator in discrete symmetries violation case were reviewed. The main principles of field and canonical operator parameterizations were described. The connection between proton form-factors in field and canonical parametrization has been constructed. Physical interpretation of the proton electromagnetic current odd part formfactors in canonical parametrization has been obtained. Opportunity of using obtained results for solving the actual problems of proton electromagnetic structure theory — the non-rosenbluth *ep*-scattering problem and the proton radius puzzle — was discussed.

Key words: electromagnetic current operator, field parametrization, canonical parametrization, connection of parameterizations, proton radius, non-rosenbluth scattering, discrete symmetries violation, anapole formfactor.

Статья поступила в редакцию 5/*XII*/2014.

The article received 5/*XII*/2014.

[2] *Krutov Alexandr Fedorovich* (`krutov@samsu.ru`), *Nikulin Pavel Andreyevich* (`napavel@mail.ru`), Department of General and Theoretical Physics, Samara State University, 1, Acad. Pavlov Street, Samara, 443011, Russian Federation.