

*Е.М. Яковлева*¹

К ВОПРОСУ О НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧАХ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ, ВОЗНИКАЮЩИХ В МЕХАНИКЕ РАЗРУШЕНИЯ

Приведены приближенное аналитическое и численное решения нелинейной задачи на собственные значения, возникающей при исследовании поля напряжений вблизи вершины трещины поперечного сдвига в условиях плоского напряженного состояния в материале со степенными определяющими уравнениями. Асимптотическое решение задачи на собственные значения построено с помощью метода возмущений (метода малого параметра), в соответствии с которым осуществляются разложения механических величин (функции напряжений Эри) по малому параметру, представляющему собой разность между собственным числом, отвечающим нелинейной задаче, и собственным числом, соответствующим линейной задаче, искомой функции (углового распределения функции напряжений Эри) и показателя нелинейности материала.

Ключевые слова: асимптотика напряжений и деформаций в окрестности вершины трещины, трещина поперечного сдвига в условиях плоского напряженного состояния, степенной определяющий закон, спектр собственных значений, метод возмущений (метод малого параметра), нелинейная задача на собственные значения.

Введение

Асимптотический анализ сингулярных полей напряжений, деформаций и перемещений вблизи концентраторов напряжений вызывал и продолжает вызывать значительный интерес и привлекает внимание многих исследователей в области механики деформируемого твердого тела [1–3]. Асимптотические поля напряжений, деформаций и перемещений вблизи углового выреза и трещины в изотропном линейном упругом материале впервые были определены М. Уильямсом [4]. С тех пор появлялись многочисленные решения задач об угловых вырезах, трещинах и включениях, рассматривающих влияние разнообразных факторов (влияние геометрии образца, свойств материала и др.) на распределение напряжений, деформаций и перемещений в окрестности концентратора напряжений [5–9]. Для упрочняющегося по степенному закону упругопластического материала

$$\varepsilon_{ij} = 3V\sigma_e^{n-1}s_{ij}/2, \quad (1)$$

¹© Яковлева Е.М., 2015

Яковлева Екатерина Михайловна (AduYlinaEkaterina@yandex.ru), кафедра математического моделирования в механике, Самарский государственный университет, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

где ε_{ij} – компоненты тензора деформаций, σ_{ij} – компоненты тензора напряжений, s_{ij} – компоненты девиатора напряжений, $\sigma_e = (3s_{ij}s_{ij}/2)^{1/2}$ – интенсивность касательных напряжений, B, n – постоянные материала, определяемые экспериментально, Хатчинсон, Райс и Розенгрэн получили ставшее уже классическим распределение напряжений в непосредственной окрестности вершины трещины ($r \rightarrow 0$)

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \left(\frac{J}{BI_n r} \right)^{\frac{1}{n+1}} \bar{\sigma}_{ij}(\theta, n), \quad (2)$$

где J – инвариантный интеграл механики разрушения; I_n – безразмерная функция, зависящая от n и определяемая как безразмерный J – интеграл; $\bar{\sigma}_{ij}(\theta, n)$ – универсальное угловое распределение напряжений – функции, известные из решения Хатчинсона – Райса – Розенгрена (HRR); r, θ – полярные координаты с полюсом в вершине трещины. В силу степенного характера определяющих уравнений (1) можно применить метод разделения переменных и представить искомые величины в виде произведений двух функций, одна из которых зависит от расстояния от кончика трещины r , а другая – от полярного угла. Для функции, зависящей от расстояния от вершины трещины, можно предположить степенную зависимость, тогда показатель данной степени определяется из решения нелинейной задачи на собственные значения для функции, зависящей от полярного угла, которая будет являться собственной функцией, отвечающей данному собственному значению. В задачах о трещинах нормального отрыва и поперечного сдвига данный подход позволяет найти собственное значение – показатель сингулярности напряжений у вершины трещины $s = -1/(n+1)$ в соотношениях (2). Райсом [10] был применен метод годографа для анализа напряженно-деформированного состояния вблизи трещины и углового выреза в условиях антиплоского сдвига, что позволило получить аналитическое решение задачи. Таким образом, можно заключить, что задачи о трещинах нормального отрыва и поперечного сдвига требуют применения численных методов, тогда как задача о трещине антиплоского сдвига может быть исследована аналитически. Поэтому в механике трещин задачи антиплоского сдвига дают фундаментальные решения, обеспечивающие понимание более сложных явлений и позволяют провести верификацию численных расчетов. Постановка задачи о трещине антиплоского (продольного) сдвига и ее решение посредством трансформации годографа дают возможность найти наряду с главным членом асимптотического разложения компонент тензора напряжений (2) слагаемые более высокого порядка (следующие за главным членом асимптотических разложений напряжений и деформаций). Например, Амазиго [11] получил двучленные асимптотические разложения компонент тензора деформаций на плоскости годографа вдоль линии продолжения трещины, опираясь на аналитическое решение, представленное в его предыдущей работе [12]. В [13] построены семичленные асимптотические разложения напряжений и деформаций в окрестности вершины трещины следующего вида:

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \sum_{k=1}^n A_k \bar{\sigma}_{ij}^{(k)}(\theta) r^{s_k}, \quad \varepsilon_{ij}(r, \theta) = \sum_{k=1}^n B_k \bar{\varepsilon}_{ij}^{(k)}(\theta) r^{t_k}. \quad (3)$$

В [14; 15] рассматриваемый подход был обобщен на случай упругопластических материалов и были получены приближения более высоких порядков для напряжений и деформаций в непосредственной окрестности вершины трещины. В [16–17] исследуется поле напряжений у вершины трещины в материале со степенной зависимостью, связывающей напряжения и деформации (или напряжения и скоро-

сти деформаций). В качестве главного члена асимптотического разложения компонент тензора напряжений принимается классическое решение Хатчинсона – Райса – Розенгрена и далее определяются следующие члены асимптотики напряжений у края трещины. В [16] построены двучленное асимптотическое разложение для поля перемещений и трехчленное асимптотическое разложение поля напряжений вблизи вершины трещины антиплоского сдвига в упрочняющемся по степенному закону материале. В основе проведенного в [16] расчета положена формулировка метода конечного элемента, в результате вычислений позволяющая найти показатели степеней двучленного асимптотического разложения компонент вектора перемещений.

Таким образом, следует отметить, что достаточно долго интерес исследователей вызывало построение высших приближений в асимптотических разложениях полей напряжений и деформаций в окрестности вершины трещины по заданному главному члену асимптотического разложения – решению Хатчинсона – Райса – Розенгрена (HRR). Во всех упомянутых работах главный член асимптотического разложения компонент тензора напряжений – классическое решение Хатчинсона – Райса – Розенгрена. Однако сейчас отмечается необходимость нахождения всего спектра собственных чисел [9; 19; 20], поскольку построение полей напряжений и деформаций у вершины трещины в среде с поврежденностью приводит к новым задачам на собственные значения и влечет за собой знание всего спектра собственных значений задачи.

Например, работа [9] посвящена вопросам усталостного роста трещины в среде с поврежденностью и проблемам взаимного влияния процесса накопления поврежденности и эволюции напряженно-деформированного состояния в окрестности вершины трещины. В [9] построено новое асимптотическое решение задачи об усталостном росте трещины в изотропном линейно-упругом материале с учетом процесса накопления рассеянных повреждений в рамках связанной (упругость – поврежденность) постановки задачи в условиях реализации плоского напряженного и плоского деформированного состояния. Получены: 1) новое численное решение двухточечной краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, к которой сводится проблема определения напряженно-деформированного состояния у кончика трещины в среде с поврежденностью; 2) новое аналитическое представление полей напряжений, деформаций и сплошности в окрестности вершины трещины как для плоского напряженного, так и для плоского деформированного состояний. Целью настоящего исследования является определение всего спектра собственных чисел в задаче на собственные значения, полученной для трещины поперечного сдвига в среде со степенными определяющими уравнениями в случае плоского напряженного состояния.

1. Математическая постановка задачи

Анализ напряженно-деформированного состояния в окрестности вершины трещины поперечного сдвига в материале со степенными определяющими соотношениями

$$\varepsilon_{ij} = 3B\sigma_e^{n-1}s_{ij}/2, \quad (4)$$

где ε_{ij} – компоненты тензора деформаций, s_{ij} – компоненты тензора девиатора тензора напряжений, $\sigma_e = \sqrt{3s_{ij}s_{ij}/2}$ – интенсивность напряжений, B, n – матери-

альные константы, приводит к необходимости исследования уравнений равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + 2 \frac{\sigma_{r\theta}}{r} = 0 \quad (5)$$

и условия совместности деформаций

$$2 \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varepsilon_{r\theta}}{\partial \theta} \right) = \frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial \theta^2} - r \frac{\partial \varepsilon_{rr}}{\partial r} + r \frac{\partial^2 (r \varepsilon_{\theta\theta})}{\partial r^2}. \quad (6)$$

В случае трещины поперечного сдвига в предположении реализации плоского напряженного состояния определяющие соотношения (4) принимают вид:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{1}{2} B \sigma_e^{n-1} (2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}), \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{2} B \sigma_e^{n-1} (2\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}), \quad \varepsilon_{r\theta} = \frac{3}{2} B \sigma_e^{n-1} \sigma_{r\theta}, \quad (7)$$

где интенсивность касательных напряжений определяется формулой $\sigma_e^2 = \sigma_{rr}^2 + \sigma_{\theta\theta}^2 - \sigma_{rr}\sigma_{\theta\theta} + 3\sigma_{r\theta}^2$. В полярных координатах с полюсом в вершине трещины компоненты тензора напряжений выражаются через функцию напряжений Эри $F(r, \theta)$ в следующем виде:

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}, \quad \sigma_{rr} = \Delta F - \sigma_{\theta\theta}, \quad \sigma_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right), \quad (8)$$

где Δ – оператор Лапласа. Степенной характер определяющих уравнений (4) задачи позволяет обратиться к представлению функции напряжений Эри в виде разложения по собственным функциям

$$F(r, \theta) = r^{\lambda+1} f(\theta), \quad (9)$$

где λ – собственное значение, $f(\theta)$ – собственная функция, соответствующая собственному значению λ , для описания асимптотического поведения напряжений в непосредственной окрестности вершины трещины ($r \rightarrow 0$). Тогда компоненты тензора напряжений $\sigma_{ij}(r, \theta)$ в окрестности вершины трещины $r \rightarrow 0$ представляются соотношениями

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(r, \theta) &= r^{\lambda-1} [f''(\theta) + (\lambda+1)f(\theta)], & \sigma_{\theta\theta}(r, \theta) &= r^{\lambda-1} \lambda(\lambda+1)f(\theta), \\ \sigma_{r\theta}(r, \theta) &= -r^{\lambda-1} \lambda f'(\theta). \end{aligned} \quad (10)$$

При введении функции напряжений Эри согласно (8) уравнения равновесия (5) выполняются тождественно, а условие совместности деформаций (6) после учета представлений (10) и равенств (7) приводит к нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению четвертого порядка относительно функции $f(\theta)$:

$$\begin{aligned} &4f_e^4 [2f^{IV} + (2-\lambda)(1+\lambda)f''] + 4(n-1)f_e^2 u [2f''' + (2-\lambda)(1+\lambda)f'] + \\ &+ [(n-1)(n-3)v^2 + 2(n-1)f_e^2 u - 4(\lambda-1)nf_e^4] + \\ &+ 4[(\lambda-1)n+1](\lambda-1)nf_e^4 [(2\lambda-1)(1+\lambda)f - f''] + \\ &+ 12\lambda[(\lambda-1)n+1]f_e^2 [(n-1)f'u + 2f_e^2 f''] + \\ &+ [2f'' + (2-\lambda)(1+\lambda)f] = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

где для краткости приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} f_e^2 &= (f'')^2 + (2-\lambda)(1+\lambda)ff'' + (1+\lambda)(1+\lambda^3)f^2 + 3\lambda^2(f')^2, \\ u &= 2[(f''')^2 + f''f^{IV}] + (2-\lambda)(1+\lambda)[(f'')^2 + 2f'f'' + ff^{IV}] + \\ &+ 6\lambda^2[(f'')^2 + f'f'''] + 2(1+\lambda)(1+\lambda^3)[(f')^2 + ff''], \\ v &= 2f''f''' + (2-\lambda)(1+\lambda)(f'f'' + ff''') + \\ &+ 2(1+\lambda)(1+\lambda^3)ff' + 6\lambda^2f'f''. \end{aligned}$$

Вместе с граничными условиями отсутствия поверхностных усилий на верхнем берегу трещины

$$f(\theta = \pi) = 0, \quad f'(\theta = \pi) = 0 \quad (12)$$

и условиями симметрии на ее продолжении

$$f(\theta = 0) = 0, \quad f''(\theta = 0) = 0 \quad (13)$$

уравнение (11) постулирует нелинейную задачу на собственные значения: необходимо найти нетривиальное решение нелинейного дифференциального уравнения (11), подчиняющееся условиям (12), (13) за счет определения собственного числа λ .

2. Метод возмущений (метод малого параметра)

Решение сформулированной нелинейной задачи на собственные значения может быть получено с помощью метода возмущений. Данный метод был использован М. Анхезером и Д. Гроссом [18] для задачи о трещине антиплоского сдвига², в результате чего была найдена аналитическая зависимость собственного числа λ от показателя упрочнения n и от собственного значения, отвечающего линейной задаче:

$$\lambda = \frac{(n+1)\lambda_0^2 + (n-1)(2\lambda_0 - 1)}{2n(2\lambda_0 - 1)} + \frac{\sqrt{[(n+1)\lambda_0^2 + (n-1)(2\lambda_0 - 1)]^2 - 4n^2\lambda_0^2(2\lambda_0 - 1)}}{2n(2\lambda_0 - 1)}. \quad (14)$$

Суть предлагаемого подхода заключается в использовании следующих асимптотических представлений:

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_0 + \varepsilon, \\ n &= 1 + \varepsilon n_1 + \varepsilon^2 n_2 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i n_i, \\ f(\theta) &= f_0(\theta) + \varepsilon f_1(\theta) + \varepsilon^2 f_2(\theta) + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i f_i(\theta), \end{aligned} \quad (15)$$

где $f_0(\theta)$ – решение линейной задачи ($n = 1$); ε – малый параметр, описывающий количественно отклонение собственного числа, соответствующего нелинейной задаче ($n > 1$), от собственного числа линейной "невозмущенной" задачи ($n = 1$).

Подставляя асимптотические представления (15) в уравнение (11) и собирая коэффициенты при одинаковых степенях ε , можно получить последовательность краевых задач для неоднородных дифференциальных уравнений относительно функций $f_k(\theta)$, $k = 0, 1, 2, \dots$.

Для функции $f_0(\theta)$ получается однородное линейное обыкновенное дифференциальное уравнение

$$f_0^{IV} + 2(\lambda_0^2 + 1)f_0'' + (\lambda_0^2 - 1)^2 f_0 = 0, \quad (16)$$

решение которого должно удовлетворять граничным условиям, а именно условию отсутствия поверхностных усилий на верхнем берегу трещины

$$f_0(\theta = \pi) = 0, \quad f_0'(\theta = \pi) = 0 \quad (17)$$

²Проблема определения всего спектра собственных значений в задачах о трещинах антиплоского сдвига и нормального отрыва подробно обсуждается в [5; 9; 19; 20].

и условию симметрии на ее продолжении

$$f_0(\theta = 0) = 0, \quad f_0''(\theta = 0) = 0. \quad (18)$$

Общее решение уравнения (16) имеет вид

$$f_0(\theta) = B_1 \cos [(\lambda_0 - 1) \theta] + B_2 \sin [(\lambda_0 - 1) \theta] + B_3 \cos [(\lambda_0 + 1) \theta] + B_4 \sin [(\lambda_0 + 1) \theta], \quad (19)$$

где B_k – постоянные интегрирования. В рассматриваемом случае $B_1 = B_3 = 0$, тогда решение (19) примет вид

$$f_0(\theta) = B_2 \sin [(\lambda_0 - 1) \theta] + B_4 \sin [(\lambda_0 + 1) \theta]. \quad (20)$$

Используя граничные условия на берегах трещины, а именно равенство нулю самой функции и ее производной при $\theta = \pi$, получаем систему из двух уравнений

$$\begin{aligned} B_2 \sin [(\lambda_0 - 1) \pi] + B_4 \sin [(\lambda_0 + 1) \pi] &= 0, \\ (\lambda_0 - 1) B_2 \cos [(\lambda_0 - 1) \pi] + (\lambda_0 + 1) B_4 \cos [(\lambda_0 + 1) \pi] &= 0. \end{aligned}$$

Эта система имеет нетривиальное решение, если ее определитель равен нулю, следовательно,

$$(\lambda_0 + 1) \sin [(\lambda_0 - 1) \pi] \cos [(\lambda_0 + 1) \pi] - (\lambda_0 - 1) \sin [(\lambda_0 + 1) \pi] \cos [(\lambda_0 - 1) \pi] = 0,$$

откуда следует характеристическое уравнение для собственного значения λ_0 :

$$\sin 2\pi\lambda_0 = 0, \quad (21)$$

или $2\pi\lambda_0 = \pi m$, откуда $\lambda_0 = m/2$, где m – целое число.

Для случая нечетных m решение дифференциального уравнения (16), удовлетворяющее краевым условиям (17),(18), имеет вид (с точностью до неопределенного множителя)

$$f_0(\theta) = B (\sin \alpha\theta - \sin \beta\theta), \quad (22)$$

где $\alpha = \lambda_0 - 1, \beta = \lambda_0 + 1$. Постоянная B определяется из решения задачи в целом, и для определения решения в непосредственной окрестности вершины трещины для простоты можно положить $B = 1$.

Собирая коэффициенты при первой степени малого параметра ε^1 , получаем неоднородное линейное обыкновенное дифференциальное уравнение относительно $f_1(\theta)$:

$$\begin{aligned} f_1^{IV} + 2(\lambda_0^2 + 1)f_1'' + (\lambda_0^2 - 1)^2 f_1 &= -4[\lambda_0 f_0'' - \lambda_0(1 - \lambda_0^2)f_0] - \\ - \frac{n_1}{4g_0^2} \{ &2g_0 h_0 [2f_0''' + (2 - \lambda_0)(\lambda_0 + 1)f_0' + 3\lambda_0^2 f_0'] + \\ &+ (g_0 \omega_0 - h_0^2) [2f_0'' + (2 - \lambda_0)(\lambda_0 + 1)f_0] + \\ &+ 2g_0^2 [(4\lambda_0^2 - 5\lambda_0 + 1)f_0'' + (1 - \lambda_0^2)(-4\lambda_0^2 + 3\lambda_0 + 1)f_0] \}, \end{aligned} \quad (23)$$

где приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} g_0 &= (f_0'')^2 + (2 - \lambda_0)(1 + \lambda_0)f_0 f_0'' + (1 + \lambda_0)(1 + \lambda_0^3)f_0^2 + 3\lambda_0^2(f_0')^2, \\ \omega_0 &= 2[(f_0''')^2 + f_0' f_0^{IV}] + (2 - \lambda_0)(1 + \lambda_0)[(f_0'')^2 + 2f_0' f_0'' + f_0 f_0^{IV}] + \\ &+ 2(1 + \lambda_0)(1 + \lambda_0^3)[(f_0')^2 + f_0 f_0''] + 6\lambda_0^2[(f_0'')^2 + f_0' f_0''], \\ h_0 &= 2f_0'' f_0''' + (2 - \lambda_0)(1 + \lambda_0)(f_0' f_0'' + f_0 f_0''') + \\ &+ 2(1 + \lambda_0)(1 + \lambda_0^3)f_0 f_0' + 6\lambda_0^2 f_0' f_0''. \end{aligned}$$

Граничные условия для функции $f_1(\theta)$, следующие из краевых условий (12), (13), формулируются аналогичным образом

$$f_1(\theta = \pi) = 0, \quad f_1'(\theta = \pi) = 0, \quad (24)$$

$$f_1(\theta = 0) = 0, \quad f_1''(\theta = 0) = 0. \quad (25)$$

Следовательно, для определения функции $f_1(\theta)$ получена краевая задача для неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка. Нетривиальное решение данной краевой задачи будет существовать, если выполнено некоторое условие разрешимости.

Условие разрешимости для краевой задачи относительно функции $f_k(\theta)$ может быть получено, если следовать рассуждениям, подробно изложенным в [5; 6]. Можно показать, что условие разрешимости краевой задачи относительно функции $f_k(\theta)$ принимает вид

$$\int_0^\pi u g dx = 0, \quad (26)$$

где $u = f_0(\theta) = \sin \alpha\theta - \sin \beta\theta$, g – правая часть уравнения неоднородного уравнения для функции $f_k(\theta)$. Формулируя условие разрешимости для краевой задачи относительно функции $f_1(\theta)$, можно найти коэффициент n_1 асимптотического разложения показателя нелинейности материала. Результаты расчетов для различных значений собственного числа, отвечающего линейной задаче, приведены в табл. 1.

Таблица 1

Вычисленные значение коэффициента n_1

λ_0	n_1
0,5	4,0
-0,5	1,238172541
1,5	-5,307924191
-1,5	0,598906784
2,5	-2,481439629
-2,5	0,351388166

Таким образом, получено двучленное асимптотическое разложение для показателя нелинейности материала n :

$$n = 1 + \varepsilon n_1 + O(\varepsilon^2). \quad (27)$$

Если провести сравнение между собственным значением, вычисленным по формулам $\lambda = \lambda_0 + \varepsilon$, $n = 1 + \varepsilon n_1$ для заданного значения n , и точным решением задачи HRR $\lambda = n/(n + 1)$, то можно увидеть (табл. 2) значительную погрешность, увеличивающуюся с ростом n .

Приведенное сравнение точного решения, имеющегося для $\lambda_0 = 1/2$, и приближенного решения показывает, что двучленное асимптотическое разложение не является достаточным, так как оно не дает требуемой точности. Поэтому процесс построения разложения (27) и его уточнения должен быть продолжен. Собирая коэффициенты при ε^2 в уравнении (11), получаем неоднородное линейное обыкновенное дифференциальное уравнение, которое является еще более сложным по

Таблица 2

Точное и приближенное собственное значение для разных значений показателя нелинейности материала n

n	$\lambda_{\text{приб.}}$	$\lambda_{\text{точ.}}$
2	0,75	0,66666
3	1,0	0,75000
4	1,25	0,80000
5	1,5	0,83333
6	1,75	0,85714
7	2,0	0,87500
8	2,25	0,88888
9	2,5	0,90000

сравнению с уравнением (23) и имеет вид:

$$\begin{aligned}
& f_2^{IV} + 2(\lambda_0^2 + 1)f_2'' + (\lambda_0^2 - 1)^2 f_2 = -\frac{2g_1}{g_0} \left[f_1^{IV} + 2(\lambda_0^2 + 1)f_1'' + (\lambda_0^2 - 1)^2 f_1 \right] - \\
& -4 \left[\lambda_0 f_1'' + \lambda_0(\lambda_0^2 - 1)f_1 \right] - \frac{1}{2} \left[5f_0'' + (10\lambda_0^2 + \lambda_0 - 3)f_0 \right] - \lambda_0 \frac{2g_1}{g_0} \left[f_0'' + (\lambda_0^2 - 1)f_0 \right] - \\
& - \frac{n_1}{8g_0^2} \left\{ 4g_0 h_0 \left[2f_1''' + (2 - \lambda_0)(\lambda_0 + 1)f_1' + 3\lambda_0^2 f_1' + (1 + 4\lambda_0)f_0' \right] + \right. \\
& + (g_0 h_1 + g_1 h_0) \left[8f_0''' + 4(2 - \lambda_0)(\lambda_0 + 1)f_0' + f_0' \right] + \\
& + 2(g_0 \omega_0 - h_0^2) \left[2f_1'' + (2 - \lambda_0)(\lambda_0 + 1)f_1 + (1 - 2\lambda_0)f_0 \right] + \\
& + (g_0 \omega_1 + g_1 \omega_0 - 4h_0 h_1) \left[2f_0'' + (2 - \lambda_0)(\lambda_0 + 1)f_0 \right] + \\
& + 4g_0^2 \left[(4\lambda_0^2 - 5\lambda_0 + 1)f_1'' - (1 - \lambda_0^2)(4\lambda_0^2 - 3\lambda_0 - 1)f_1 \right] + \\
& + g_0^2 \left[4(8\lambda_0 + 1)f_0'' + (48\lambda_0^3 - 24\lambda_0^2 - 33\lambda_0 - 9)f_0 \right] + \\
& + 8g_0 g_1 \left[(4\lambda_0^2 - 5\lambda_0 + 1)f_0'' + (1 - \lambda_0^2)(4\lambda_0^2 - 3\lambda_0 - 1)f_0 \right] \left. \right\} - \\
& - \frac{n_2}{8g_0^2} \left\{ 4g_0 h_0 \left[2f_0''' + (2 - \lambda_0)(\lambda_0 + 1)f_0' + 3\lambda_0^2 f_0' \right] + \right. \\
& + 2(g_0 \omega_0 - h_0^2) \left[2f_0'' + (2 - \lambda_0)(\lambda_0 + 1)f_0 \right] + \\
& + 4g_0^2 \left[(4\lambda_0^2 - 5\lambda_0 + 1)f_0'' - (1 - \lambda_0^2)(4\lambda_0^2 - 3\lambda_0 - 1)f_0 \right] \left. \right\} - \\
& - \frac{n_1^2}{8g_0^2} \left\{ h_0^2 \left[2f_0'' + (2 - \lambda_0)(\lambda_0 + 1)f_0 \right] + 12\lambda_0(\lambda_0 - 1)g_0 h_0 f_0' + \right. \\
& \left. + 4g_0^2 \left[(1 - \lambda_0^2)(2\lambda_0 - 1)(1 - \lambda_0)f_0 - (1 - \lambda_0)^2 f_0'' \right] \right\} = 0,
\end{aligned} \tag{28}$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
h_0 &= 2f_0'' f_0''' + (2 - \lambda_0)(1 + \lambda_0)(f_0' f_0'' + f_0 f_0''') + 6\lambda_0^2 f_0' f_0'' + \\
& + 2(1 + \lambda_0)(1 + \lambda_0^3) f_0 f_0', \\
g_1 &= 2f_0'' f_1'' + (2 - \lambda_0)(1 + \lambda_0)(f_0 f_1'' + f_1 f_0'') + (1 - 2\lambda_0) f_0 f_0'' + 6\lambda_0^2 f_0' f_1' + \\
& + 6\lambda_0 (f_0')^2 + 2(\lambda_0 + 1)(\lambda_0^3 + 1) f_0 f_1 + (\lambda_0 + 1)(4\lambda_0^2 - \lambda_0 + 1) f_0^2, \\
h_1 &= 2(f_0'' f_1''' + f_1'' f_0''') + (2 - \lambda_0)(1 + \lambda_0)(f_0' f_1'' + f_1' f_0'' + f_0 f_1''' + f_1 f_0''') + \\
& + (1 - 2\lambda_0)(f_0' f_0'' + f_0 f_0''') + 6\lambda_0^2 (f_0' f_1'' + f_1' f_0'') + 12\lambda_0 f_0' f_0'' + \\
& + 2(\lambda_0 + 1)(\lambda_0^3 + 1)(f_0 f_1' + f_1 f_0') + 2(\lambda_0 + 1)(4\lambda_0^2 - \lambda_0 + 1) f_0 f_0', \\
\omega_1 &= 4f_0''' f_1''' + 2(f_0'' f_1^{IV} + f_1'' f_0^{IV}) + (1 - \lambda_0) \left((f_0'')^2 + 2f_0' f_0'' + f_0 f_0^{IV} \right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ (2 - \lambda_0) (\lambda_0 + 1) (2f_0''f_1'' + 2f_0'f_1'' + 2f_1'f_0'' + f_0f_1^{IV} + f_1f_0^{IV}) + \\
 &+ 6\lambda_0^2 (2f_0''f_1'' + f_0'f_1''' + f_1'f_0''') + 12\lambda_0 \left((f_0'')^2 + f_0'f_0''' \right).
 \end{aligned}$$

Граничные условия для функции $f_2(\theta)$, следующие из краевых условий (12), (13), формулируются аналогичным образом

$$f_2(\theta = \pi) = 0, \quad f_2'(\theta = \pi) = 0, \quad (29)$$

$$f_2(\theta = 0) = 0, \quad f_2''(\theta = 0) = 0. \quad (30)$$

Решение краевой задачи (28)–(30) аналитическим способом не представляется возможным, поэтому было решено использовать иной подход, а именно условие разрешимости формулировалось в ходе численного решения краевой задачи для определения функции f_k . Для численного счета был использован метод Рунге – Кутты – Фельберга в паре с методом пристрелки, который в нашем случае является однопараметрическим. В результате расчетов были найдены $n_k, k = \overline{1, 8}$ с точностью от 10^{-7} до 10^{-9} . Следовательно, было получено девятичленное прямое разложение Пуанкаре (в соответствии с принятой терминологией):

$$n = 1 + n_1\varepsilon + n_2\varepsilon^2 + n_3\varepsilon^3 + n_4\varepsilon^4 + n_5\varepsilon^5 + n_6\varepsilon^6 + n_7\varepsilon^7 + n_8\varepsilon^8 + n_9\varepsilon^9 + O(\varepsilon^{10}), \quad (31)$$

где

$$\begin{aligned}
 n_1 &= 1, 238172541, \quad n_2 = 2, 421769422, \quad n_3 = 5, 828527873, \quad n_4 = 15, 211647887, \quad n_5 = \\
 &= 41, 012829464, \quad n_6 = 112, 728867, \quad n_7 = 315, 0681101, \quad n_8 = 895, 054860544, \quad n_9 = \\
 &= 2583, 6704559, \quad n_{10} = 7573, 303.
 \end{aligned}$$

Для λ_0 в ходе расчетов были получены следующие значения коэффициентов n_k : $n_1 = -5, 3079241, n_2 = 24, 32205, n_3 = -123, 692193, n_4 = 730, 762645, n_5 = -4933, 10805, n_6 = 36549, 108085$. На рис. 1 показана функция $f(\theta)$, определяемая 1 – одночленным асимптотическим разложением, 2 – двучленным асимптотическим разложением (15), 3 – трехчленным асимптотическим разложением, k – k -членным асимптотическим разложением ($\lambda_0 = 3/2$). Знаком "плюс" показано численное решение задачи, а на рис. 2 приведены угловые распределения компонент тензора напряжений.

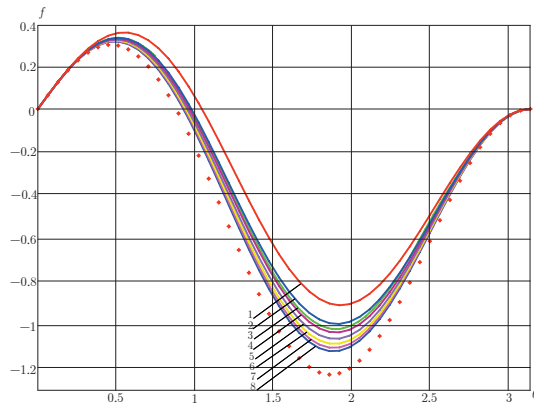


Рис. 1. Результаты вычислений

Наряду с процедурой метода возмущений собственные значения рассматриваемой нелинейной задачи были найдены численно с помощью методов Рунге – Кутты – Фельберга и пристрелки. Два неизвестных параметра – значение функции

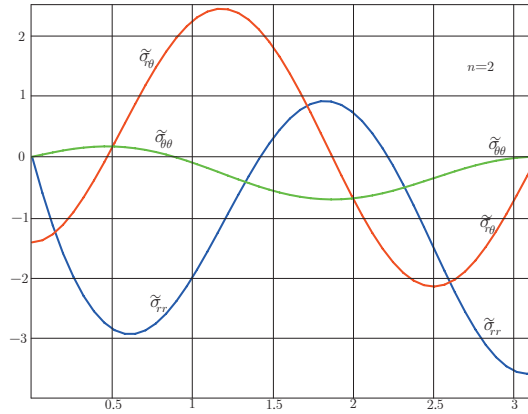


Рис. 2. Численное решение: угловые распределения компонент тензора напряжений

Таблица 3

Сравнение собственных значений, полученных с помощью метода возмущений и посредством методов Рунге – Кутты и пристрелки

n	$n = 1 + \varepsilon n_1 + \dots + \varepsilon^{10} n_{10}$	Точное численное решение	$\delta, \%$
2	-0,22079	-0,22902	3,59
3	-0,16473	-0,21178	22,21
4	-0,13566	-0,23152	41,40
5	-0,11608	-0,25472	54,40
6	-0,10131	-0,27266	62,84
7	-0,08943	-0,28494	68,61
8	-0,07948	-0,29272	72,84
9	-0,07092	-0,29755	76,16

$f'''(0)$ и собственное число λ – находились из требования выполнения краевых условий на верхнем берегу трещины. Считалось, что граничные условия выполнены, если $(f(\pi))^2 + (f'(\pi))^2 < \varepsilon_1$, где ε_1 – наперед заданная точность вычислений, которая принималась равной 10^{-7} . Из выполненного численного расчета следует, что прямое разложение (31) дает существенную погрешность между собственными значениями λ , полученными точным численным способом $\lambda_{\text{точ}}$ и приближенным методом $\lambda_{\text{приб}}$ (даже для небольших значений показателя нелинейности материала) (табл. 3):

$$\delta = \left| \frac{\lambda_{\text{exact}} - \lambda_{\text{approx}}}{\lambda_{\text{exact}}} \right| 100 \%$$

Поэтому для дальнейшего уточнения собственного значения λ использовалась аппроксимация Паде.

Суть этого метода состоит в том, что разложение для показателя n представляется в виде

$$n = \frac{1 + a_1 \varepsilon + \dots + a_L \varepsilon^L}{1 + b_1 \varepsilon + \dots + b_M \varepsilon^M}, \quad (32)$$

где a_i, b_j – коэффициенты числителя и знаменателя аппроксимации Паде, определяются известными формулами. В результате численного эксперимента были

получены собственные значения для $n = \overline{2, 9}$ аппроксимаций Паде различных порядков $[1/1]$, $[1/2]$, $[2/3]$, $[3/3]$, $[3/4]$, $[4/4]$ (табл. 4 и 5).

Таблица 4
Собственные значения λ , полученные с помощью аппроксимаций Паде различного порядка

n	$[\frac{1}{1}]$	$[\frac{1}{2}]$	$[\frac{2}{3}]$
2	-0,1869222691	-0,219932286	-0,2247225591
3	-0,1116517947	-0,1729001012	-0,1831887700
4	-0,0778179811	-0,1548237154	-0,1681812241
5	-0,0585896234	-0,1453414133	-0,1605540753
6	-0,0461882599	-0,1395153281	-0,1559556261
7	-0,0375261676	-0,1355761532	-0,1528852099
8	-0,0311337071	-0,1327361557	-0,1506911800
9	-0,0262221762	-0,1305920706	-0,1490457550

Таблица 5
Собственные значения λ , полученные с помощью аппроксимаций Паде различного порядка

n	$[\frac{3}{3}]$	$[\frac{3}{4}]$	$[\frac{4}{4}]$
2	-0,2312567963	-0,2296506394	-0,2262350356
3	-0,2133997414	-0,2061952841	-0,1815913661
4	-0,2110303447	-0,2023182046	-0,1631898614
5	-0,2101885019	-0,2009207701	-0,1535743014
6	-0,2097613263	-0,2002124095	-0,1477268804
7	-0,2095035918	-0,1997860318	-0,1438052412
8	-0,2093313154	-0,1995016417	-0,1409948970
9	-0,2092080849	-0,1992985770	-0,1388808649

Анализ собственных значений, вычисленных с помощью аппроксимаций Паде различных порядков, показывает, что наилучшей аппроксимацией является аппроксимация Паде порядка $[3/3]$, приводящая к относительной погрешности, не превышающей одного процента для значений $n = 2$ и $n = 3$. Точные оценки приведены в табл. 6.

Сравнение собственных значений, рассчитанных посредством аппроксимации Паде различных порядков, с собственными значениями, полученными численно, показывает следующее:

1) прямое разложение (31) дает значительно большую погрешность для всех значений показателя нелинейности материала по сравнению с аппроксимациями Паде;

Таблица 6

Относительная погрешность, допускаемая при вычислении собственных значений λ с помощью аппроксимаций Паде порядка $[3/3]$

n	2	3	4	5	6	7	8	9
$\delta, \%$	0,97	0,75	8,85	17,48	23,07	26,47	28,49	26,69

2) с помощью аппроксимации Паде можно оценить собственное значение для малых значений n : $n = 2$ и $n = 3$ с точностью, не превышающей одного процента.

Выводы и обсуждение результатов

В настоящей статье приведен анализ собственных чисел нелинейной задачи на собственные значения, следующей из проблемы определения напряженно-деформированного состояния вблизи кончика трещины поперечного сдвига в условиях плоского напряженного состояния в материале со степенной зависимостью между напряжениями и деформациями. Построено приближенное решение задачи, а именно дана оценка собственного значения задачи как функции от показателя нелинейности материала и от собственного значения "невозмущенной" линейной задачи с помощью прямого разложения и аппроксимации Паде: условие разрешимости, формулируемое для каждой функции f_k , позволяет отыскать n_k и дать приближенную оценку для собственного значения λ ; аппроксимация Паде дает возможность вычислить собственное значение с точностью 0,27 % (аппроксимация Паде порядка $[5/5]$) для $n = 2$, с точностью 0,76 % для $n = 3$ (аппроксимация Паде порядка $[3/3]$) и 8,85 % для $n = 4$ (аппроксимация Паде порядка $[3/3]$).

Литература

- [1] Wei R.P. Fracture Mechanics. Integration of Mechanics, Materials Science and Chemistry. Cambridge: Cambridge University Press, 2014. 232 p.
- [2] Kuna M. Finite Elements in Fracture Mechanics. Theory-Numerics-Applications. Dordrecht: Springer, 2013. 336 p.
- [3] Duality, Symmetry and symmetry lost in solid mechanics. Selected works of H.D. Bui. Eds. A. Ehlacher, H. Markenscoff. Paris: Presses des Ponts, 2011. 396 p.
- [4] Williams M.L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension // J. Appl. Mech. 1952. V. 19. P. 287–298.
- [5] Степанова Л.В. Математические методы механики разрушения. Самара: Изд-во "Самарский университет", 2006. 231 с.
- [6] Степанова Л.В. Анализ собственных значений в задаче о трещине в материале со степенным определяющим законом // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2009. Т. 49. № 8. С. 1399–1415.
- [7] Beliakova T.A., Kulagin V.A. The eigenspectrum approach and T-stress at the mixed-mode crack tip for a stress-state dependent material // Procedia Materials Science. 2014. V. 3. P. 147–152.
- [8] Natarajan S., Song C., Belouettar S. Numerical evaluation of stress intensity factors and T-stress for interfacial cracks and cracks terminating at the interface without asymptotic enrichment // Computer methods in applied mechanics and engineering. 2014. V. 279. P. 86–112.

- [9] Степанова Л.В. Уточненный расчет напряженно-деформированного состояния у вершины трещины в условиях циклического нагружения в среде с поврежденностью // Вестник Самарского государственного университета. 2011. № 83. С. 105–115.
- [10] Rice J.R. Stresses due to a sharp notch in a work-hardening elastic-plastic material loaded by longitudinal shear // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1967. V. 34. P. 287–298.
- [11] Amazigo J.C. Some mathematical problems of elastic-plastic crack growth // Fracture Mechanics. SIAM-AMS Proceedings. 1979. V. 12. P. 125–137.
- [12] Amazigo J.C. Fully plastic center-cracked strip under antiplane shear // Int. J. Fracture. 1975. V. 11. P. 1291–1299.
- [13] Yuan F.G., Yang S. Analytical solutions of fully plastic crack-tip higher order fields under antiplane shear // International Journal of Fracture. 1995. V. 69. P. 1–26.
- [14] Aravas N., Blazo D.A. Higher order terms in asymptotic elastoplastic mode-III crack tip solutions // Acta Mechanica. 1991. V. 90. P. 139–153.
- [15] Yang S. Analytical forms of higher-order asymptotic elastic-plastic crack-tip fields in a linear hardening material under antiplane shear // International Journal of Fracture. 1996. V. 80. P. 59–71.
- [16] Loghin A., Zhang N., Joseph P. A nonlinear finite element eigenanalysis of antiplane shear including higher order terms // Engineering Fracture Mechanics. 2000. V. 66. № 5. P. 441–454.
- [17] Yang S., Yuan F.G., Cai X. Higher order asymptotic elastic – plastic crack-tip fields under antiplane shear // Engineering Fracture Mechanics. 1996. V. 54. P. 405–422.
- [18] Anheuser M., Gross D. Higher order fields at crack and notch tips in power-law materials under longitudinal shear // Archive of Applied Mechanics. 1994. V. 64. P. 509–518.
- [19] Адьлина Е.М., Степанова Л.В. О построении многомасштабных моделей неупругого разрушения // Вестник Самарского государственного университета. 2012. № 9(100). С. 70–83.
- [20] Адьлина Е.М., Игонин С.А., Степанова Л.В. О нелинейной задаче на собственные значения, следующей из анализа напряжений у вершины усталостной трещины // Вестник Самарского государственного университета. 2012. № 3/1(94). С. 83–102.

References

- [1] Wei R.P. Fracture Mechanics. Integration of Mechanics, Materials Science and Chemistry. Cambridge, Cambridge University Press, 2014, 232 p.
- [2] Kuna M. Finite Elements in Fracture Mechanics. Theory-Numerics-Applications. Dordrecht, Springer, 2013, 336 p.
- [3] Duality, Symmetry and symmetry lost in solid mechanics. Selected works of H.D. Bui. Eds. A. Ehrlacher, H. Markenscoff. Paris, Presses des Ponts, 2011, 396 p.
- [4] Williams M.L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension. *J. Appl. Mech.*, 1952, Vol. 19, pp. 287–298.
- [5] Stepanova L.V. Mathematical Methods of Fracture Mechanics. Samara, Samarskii universitet, 2006, 231 p. [in Russian].
- [6] Stepanova L.V. Eigenvalue analysis for a crack in a power material. [Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics], 2009, Vol. 49, no. 8, pp. 1332–1347 [in Russian].

- [7] Beliakova T.A., Kulagin V.A. The eigenspectrum approach and T-stress at the mixed-mode crack tip for a stress-state dependent material. *Procedia Materials Science*, 2014, Vol. 3, pp. 147–152.
- [8] Natarajan S., Song C., Belouettar S. Numerical evaluation of stress intensity factors and T-stress for interfacial cracks and cracks terminating at the interface without asymptotic enrichment. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2014, Vol. 279, pp. 86–112.
- [9] Stepanova L.V. Refined study of stress-strain state near the crack tip under cyclic loading in a damage medium. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta* [Vestnik of Samara State University], 2011, no. 83, pp. 105–115.
- [10] Rice J.R. Stresses due to a sharp notch in a work-hardening elastic-plastic material loaded by longitudinal shear. *Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech.*, 1967, Vol. 34, pp. 287–298.
- [11] Amazigo J.C. Some mathematical problems of elastic-plastic crack growth. *Fracture Mechanics. SIAM-AMS Proceedings*, 1979, Vol. 12, pp. 125–137.
- [12] Amazigo J.C. Fully plastic center-cracked strip under antiplane shear. *Int. J. Fracture*, 1975, Vol. 11, pp. 1291–1299.
- [13] Yuan F.G., Yang S. Analytical solutions of fully plastic crack-tip higher order fields under antiplane shear. *International Journal of Fracture*, 1995, Vol. 69, pp. 1–26.
- [14] Aravas N., Blazo D.A. Higher order terms in asymptotic elastoplastic mode-III crack tip solutions. *Acta Mechanica*, 1991, Vol. 90, pp. 139–153.
- [15] Yang S. Analytical forms of higher-order asymptotic elastic-plastic crack-tip fields in a linear hardening material under antiplane shear. *International Journal of Fracture*, 1996, Vol. 80, pp. 59–71.
- [16] Loghin A., Zhang N., Joseph P. A nonlinear finite element eigen analysis of antiplane shear including higher order terms. *Engineering Fracture Mechanics*, 2000, Vol. 66, no. 5, pp. 441–454.
- [17] Yang S., Yuan F.G., Cai X. Higher order asymptotic elastic – plastic crack-tip fields under antiplane shear. *Engineering Fracture Mechanics*, 1996, Vol. 54, pp. 405–422.
- [18] Anheuser M., Gross D. Higher order fields at crack and notch tips in power-law materials under longitudinal shear. *Archive of Applied Mechanics*, 1994, Vol. 64, pp. 509–518.
- [19] Adylina E.M., Stepanova L.V. On the construction of multiscale fracture models. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta* [Vestnik of Samara State University], 2012, no. 9(100), pp. 70–83 [in Russian].
- [20] Adylina E.M., Igonin S.A., Stepanova L.V. About the nonlinear eigenvalue problem arising from the stress analysis near the fatigue crack growth problem. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta* [Vestnik of Samara State University], 2012, no. 3/1(94), pp. 83–102.

*E.M. Yakovleva*³

ON THE NONLINEAR EIGENVALUE PROBLEMS ARISING IN FRACTURE MECHANICS

In the article the stress-strain state near a Mode II crack tip under plane stress conditions in power-law materials is considered. It is noted that nowadays the whole eigenspectrum and orders of stress singularity at the crack tip for a power-law medium are of prevailing interest. Additional eigenvalues for the stress field at a static mode II crack under plane stress condition are numerically obtained for different values of the exponent n via the Runge-Kutta method in conjunction with the shooting method. However, in this case the shooting method is multi-parameter since it is necessary to select two parameters and, consequently, the results obtained require further verification and justification. For this purpose the technique developed in perturbation theory for study of nonlinear eigenvalue problems is offered and applied for eigenvalue problems arising from fracture mechanics analysis.

Key words: Mode II crack under plane stress conditions, power-law material, nonlinear eigenvalue problem, eigenspectrum and orders of stress singularity, perturbation technique.

Статья поступила в редакцию 18/II/2015.

The article received 18/II/2015.

³ *Yakovleva Ekaterina Michailovna* (AdylinaEkaterina@yandex.ru), Department of Mathematical Modelling in Mechanics, Samara State University, 1, Acad. Pavlov Street, Samara, 443011, Russian Federation.