УДК 519.63

О.П. Филатов[1]

ГЛОБАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Доказана глобальная теорема существования и единственности обобщенного решения первой краевой задачи для нелинейного интегродифференциального уравнения параболического типа.

Если правая часть уравнения интегрально ограничена, то имеет место оценка нормы разности двух решений, из которой следуют непрерывная зависимость решения от начальной функции и единственность решения первой краевой задачи.

Рассматриваемая задача обобщает реальные модели измерения уровня несжимаемой жидкости в топливных баках ракет. Поэтому такие задачи имеют актуальные приложения.

Ключевые слова: интегродифференциальное уравнение, параболический тип, первая краевая задача, априорная оценка, обобщенное решение, существование, единственность, непрерывная зависимость.

1. Постановка задачи

Рассматривается первая краевая задача

$$u_t - div(p(x)\nabla u) = f(x,t;u), \quad u|_{D_0}, \quad u_{S_T} = 0 \tag{1.1}$$

в цилиндре $G_T = G\times[0,T]$, где ограниченная область $G \subset R^m, \partial G \in C^2$, $S_T = \partial G\times \times[0,T]$ — боковая поверхность цилиндра, у которого верхнее и нижнее основания обозначаются соответственно символами

$$D_T = \{(x,t) : x \in G,\, t = T\}, \quad D_0 = \{(x,t) : x \in G,\, t = 0\},$$

правая часть уравнения

$$f(x,t;u) = F(x,t,\int_{G_t} u(x,\tau)\,dxd\tau),$$

Филатов Олег Павлович (filatov_oleg@samaradom.ru), кафедра уравнений математической физики, Самарский государственный университет, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

функция $p \in C^1(\overline{G})$, $p(x) \geqslant p_0 = const > 0$. Измеримая функция $F : G \times [0, T] \times \times R \to R$ удовлетворяет условию Липшица

$$|F(x, t, y_1) - F(x, t, y_2)| \leqslant L|y_1 - y_2|$$

по переменной y при любых допустимых значениях переменных t, x, y_1, y_2 с общей постоянной $L \geqslant 0$ и интегрально ограничена: $|F(x, t, y)| \leqslant F_0(x, t)$ для любых t, x, y, где $F_0 \in L_2(G_T)$.

Во всех леммах и теоремах, которые приводятся ниже, предполагается выполнение указанных свойств.

В качестве примера приведем частный случай задачи (1.1), которая связана с измерением уровня несжимаемой жидкости в топливном баке ракеты по уровню жидкости в вертикальной измерительной трубке, которая сообщается с баком в его нижней части и в верхней. Если давление наддува в верхней полости бака обеспечивает постоянство давления жидкости в его нижней части при изменении высоты жидкости в баке $h(t)$, то в соответствующей системе координат получим задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u = f(t; u), \quad u|_{D_0} = \varphi, \quad u|_{S_T} = 0$$

в цилиндре G_T, где

$$f(t; u) = g(t)\Big(1 - \frac{h(t)}{l(t; u)}\Big), \quad l(t; u) = l_0 - \frac{1}{S}\int_0^t \int_G u(x, \tau) dx\, d\tau.$$

Здесь $l(t; u)$ — высота столба жидкости в измерительной трубке, $u = v_3 = u(x, t)$ — скорость жидкости в момент времени $t \in [0, T]$ в точке $x = (x_1, x_2) \in G = \{x \in R^2 : x_1^2 + x_2^2 < r^2\}, S$ — площадь поперечного сечения трубки, ν — коэффициент кинематической вязкости жидкости. Для вектора скорости жидкости $v = (v_1, v_2, v_3)$ выполняется условие $v_1 = v_2 = 0$. Функция $g(t)$ имеет смысл величины вектора ускорения свободного падения, направленного вертикально вниз. В этой модели фигурирует одномерное уравнение Навье — Стокса [1; 2].

Далее используется гильбертово пространство $W_2^{1,0}(G_T)$ функций $u \in L_2(G_T)$, которые имеют обобщенные производные $u_{x_j} \in L_2(G_T), j = 1, 2, \ldots, m$. Скалярное произведение и норма в этом пространстве определяются соотношениями

$$\langle u, v\rangle_T = \int_{G_T} (uv + \sum_{j=1}^m u_{x_j} v_{x_j}) dx\, dt, \quad \|u\|_T = \sqrt{\langle u, u\rangle_T}.$$

Пространство $W_2^1(G_T)$ отличается от пространства $W_2^{1,0}(G_T)$ тем, что его элементы дополнительно имеют обобщенную производную по t из $L_2(G_T)$.

Подпространство функций из $W_2^1(G_T)$, след которых на поверхностях D_T и S_T равен 0, обозначим через $\Theta_0(G_T)$.

Определение обобщенного решения задачи (1.1) следует схеме, принятой для линейных задач [3; 4]. Функция $u \in W_2^{1,0}(G_T), u|_{S_T} = 0$ называется обобщенным решением задачи, если для любой пробной функции $\eta \in \Theta_0(G_T)$ выполняется равенство

$$-\int_{G_T} u\eta_t\, dx\, dt + \int_{G_b} p\langle \nabla u, \nabla \eta\rangle\, dx\, dt = \int_G \varphi(x)\eta(x, 0)\, dx + \int_{G_T} f(x, t; u)\eta_t\, dx\, dt, \quad (1.2)$$

где

$$\langle \nabla u, \nabla \eta\rangle = \sum_{j=1}^m u_{x_j} \eta_{x_j}.$$

К настоящему времени, начиная с классической книги [5] (первое издание на испанском языке появилось в 1927 г.), опубликовано необозримое количество работ по интегродифференциальным уравнениям. В книге [6] приводятся модели реакции-диффузии, учитывающие эффекты обратных связей, для описания которых используются интегродифференциальные уравнения Вольтерра. Подобные модели рассматривались в [7; 8]. Из последних, наиболее близких работ, отметим [9], где рассматривалась первая краевая задача для параболического интегродифференциального уравнения с нелинейностью специального вида. Понятие обобщенного решения в этой работе опиралось на статью [10].

2. Теорема единственности

Зафиксируем число $b \in (0, T]$. Из [4, теоремы 2, 3, гл. VI, п. 2] следует, что для любой функции $u \in W_2^{1,0}(G_b)$ и соответствующей правой части $f(x,t;u)$ существует единственное обобщенное решение $w = A(u) \in W_2^{1,0}(G_b)$ задачи (1.1), которое удовлетворяет неравенству

$$\|w\|_b \leqslant C(\|\varphi\|_{L_2(G)} + \|f\|_{L_2(G_b)}), \tag{2.1}$$

где постоянная $C > 0$ не зависит от $b \in (0, T], f$ и φ. Если $u_j \in W_2^{1,0}(G_b)$ и $w_j = A(u_j), j = 1, 2$, то функция $w = w_1 - w_2$ является обобщенным решением задачи (1.1) с правой частью

$$g(x,t) = f(x,t;u_1) - f(x,t;u_2)$$

и начальной функцией $\varphi = 0$. Из (2.1) получим

$$\|w\|_b \leqslant C\|g\|_{L_2(G_b)}. \tag{2.2}$$

Так как

$$|g(x,t)| \leqslant L\Big|\int_{G_t} u(x,\tau)\,d\tau\,dx\Big|, \quad G_t = G \times [0,t],$$

где $u = u_1 - u_2$, то с учетом неравенства Коши отсюда следует

$$|g(x,t)| \leqslant L\sqrt{t|G|}\|u\|_{L_2(G_b)},$$

где $|G|$— мера Лебега области G. Возведем левую и правую часть этого неравенства в квадрат, а затем проинтегрируем на множестве G_b. После простых преобразований получим оценку нормы

$$\|g\|_{L_2(G_b)} \leqslant \frac{L|G|b}{\sqrt{2}}\|u\|_{L_2(G_b)}.$$

Так как $\|u\|_{L_2(G_b)} \leqslant \|u\|_b$, то отсюда и (2.2) следует неравенство

$$\|w\|_b \leqslant q\|u\|_b, \tag{2.3}$$

где

$$q = q(b) = \frac{CL|G|b}{\sqrt{2}}.$$

За счет выбора $b > 0$ всегда можно обеспечить неравенство

$$q(b) < 1. \tag{2.4}$$

Теорема 2.1. Пусть для числа $b \in (0, T]$ выполняется неравенство (2.4). Тогда существует не более одного обобщенного решения задачи (1.1) из пространства $W^{1,0}(G_b)$.

Доказательство. Пусть u_1 и u_2 — обобщенные решения. В неравенстве (2.3) $w = u = u_1 - u_2$. Следовательно, $(1-q)\|u\|_b \leqslant 0$. По условию $q < 1$, что влечет $\|u\|_b = 0$, а значит, и равенство $u_1 = u_2$. Теорема доказана.

Замечание 2.1. Теорема остается справедливой и в случае, если начальный момент времени 0 заменяется на число $T_0 \in (0, T)$, функция

$$F(x, t, \int_0^t \int_G u(x,\tau)\, dx d\tau)$$

заменяется на функцию

$$F(x, t, I + \int_{T_0}^t \int_G u(x,\tau)\, dx d\tau),$$

где $I = const$, а цилиндр G_b — на цилиндр $G \times [T_0, T_0 + b]$.

3. Теорема существования

Пусть задано некоторое $b \in (0, T]$, для которого выполняется неравенство (2.4). Построим последовательность функций $u_n \in W^{1,0}(G_b), n = 1, 2, \dots$ по следующему правилу. Примем $u_1 = 0$ и допустим, что функция u_n уже определена, тогда для правой части $f(x, t; u_n)$ найдем обобщенное решение u_{n+1} задачи (1.1) из пространства $W^{1,0}(G_b)$. Последовательность построена. Из (2.3), (2.4) получим

$$\|u_3 - u_2\|_b \leqslant q\|u_2 - u_1\|_b = q\|u_2\|_b, \quad \|u_4 - u_3\|_b \leqslant q\|u_3 - u_2\|_b \leqslant q^2\|u_2\|_b.$$

В общем случае, очевидно,

$$\|u_{n+1} - u_n\|_b \leqslant q^{n-1}\|u_2\|_b, \quad n = 2, 3, \dots .$$

Отсюда следует

$$\|u_{n+1}\|_b \leqslant \|u_2 - u_1\|_b + \|u_3 - u_2\|_b + \dots + \|u_{n+1} - u_n\|_b \leqslant$$
$$\leqslant \|u_2 - u_1\|_b(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}) \leqslant \frac{\|u_2\|_b}{1-q}.$$

Таким образом, получена оценка

$$\|u_n\|_b \leqslant \frac{\|u_2\|_b}{1-q}, \quad n = 1, 2, \dots . \tag{3.1}$$

Так как для любого $k = 1, 2, \dots$ и произвольного $n = 1, 2, \dots$ выполняется неравенство

$$\|u_{n+k} - u_n\|_b \leqslant \frac{q^{n-1}}{1-q}, \tag{3.2}$$

то последовательность $u_1, u_2, \dots$ фундаментальна в пространстве $W^{1,0}(G_b)$. Следовательно, существует предельная функция

$$u = \lim_{n\to\infty} u_n$$

из пространства $W^{1,0}(G_b)$. Переходя к пределу при $n \to \infty$ в равенстве (см. (1.2))

$$-\int_{G_b} u_{n+1}\eta_t\, dx\, dt + \int_{G_b} p\langle\nabla u_{n+1}, \nabla\eta\rangle\, dx\, dt =$$
$$= \int_G \varphi(x)\eta(x,0)\, dx + \int_{G_b} f(x,t;u_n)\eta_t\, dx\, dt,$$

убеждаемся, что функция u является обобщенным решением задачи (1.1). Следовательно, доказана

Теорема 3.1. Для данной начальной функции $\varphi \in L_2(G)$ при достаточно малом $b > 0$ существует обобщенное решение $u \in W^{1,0}(G_b)$ задачи (1.1).

Замечание 3.1. Теорема остается справедливой в рамках замечания 2.1.

Из неравенства (3.2), после перехода к пределу при $k \to \infty$, следует оценка

$$\|u - u_n\|_b \leqslant \frac{q^{n-1}}{1-q}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

для приближенного решения u_n задачи (1.1) и точного u.

4. Глобальная теорема

Сначала докажем лемму о продолжении обобщенного решения.

Лемма 4.1. Пусть $b \in (0, T)$ и $u_1 \in W^{1,0}(G_b)$ — обобщенное решение задачи (1.1). Тогда существует число $\delta > 0$ и обобщенное решение $u \in W^{1,0}(G_{b+\delta})$ этой же задачи, которое является продолжением решения u_1.

Доказательство. Рассмотрим задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} - div(p(x)\nabla u) = f(x, t; u_1), \quad v|_{D_0} = \varphi, \quad v|_{S_b} = 0$$

в цилиндре G_b. Согласно [4, теоремы 2, 3, гл. VI, п. 2] обобщенное решение этой задачи u_* существует, единственно и определяется рядом Фурье

$$u_*(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} W_k^{(1)}(t) v_k(x),$$

где $v_k, k = 1, 2, \ldots,$ — ортонормированные собственные функции задачи

$$div(p(x)\nabla v) = \lambda v, \quad v|_{\partial G} = 0, \quad x \in G,$$

отвечающие собственным числам $\lambda_k, 0 > \lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots, \lambda_k \to -\infty$ при $k \to \infty$. Здесь функция

$$W^{(1)}{}_k(t) = \varphi_k e^{\lambda_k t} + \int_0^t f_k^{(1)}(\tau) e^{\lambda_k (t-\tau)}\, d\tau,$$

где $f^{(1)}(x, t) = f(x, t; u_1)$, $\varphi \in L_2(G), f_1 \in L_2(G_b)$,

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k v_k(x), \quad f_1(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^{(1)}(t) v_k(x).$$

С другой стороны, функция u_1 — решение этой же задачи. Следовательно, $u_* = u_1$. Обозначим

$$\varphi^{(2)} = u_1|_{D_b}, \quad I_1 = \int_0^b \int_G u_1(x, \tau)\, dx d\tau.$$

Теперь рассмотрим задачу

$$\frac{\partial z}{\partial t} - div(p\nabla z) = F(x, t, I_1 + \int_b^t \int_G z(x, \tau)\, dx d\tau), \quad z|_{D_b} = \varphi^{(2)}, \quad z|_{S_{b,b+\delta}} = 0$$

в цилиндре $G \times [b, b+\delta]$, где D_b — нижнее основание, а $S_{b,b+\delta}$ — боковая сторона этого цилиндра. По теоремам 2.1, 3.1 и соответствующим замечаниям 2.1, 3.1 при достаточно малом $\delta > 0$ задача имеет единственное обобщенное решение $z = u_2$, которое совпадает с обобщенным решением задачи

$$\frac{\partial z}{\partial t} - div(p\nabla z) = f^{(2)}(x,t), \quad z|_{D_b} = \varphi^{(2)}, \quad z|_{S_{b,b+\delta}} = 0,$$

где

$$f^{(2)}(x,t) = F(x,t,I_1 + \int_b^t \int_G u_2(x,\tau)\, dx d\tau),$$

и, следовательно, определяется рядом Фурье

$$u_2(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} W_k^{(2)}(t) v_k(x),$$

где

$$W_k^{(2)}(t) = \varphi_k^{(2)} e^{\lambda_k (t-b)} + \int_b^t f_k^{(2)}(\tau) e^{\lambda_k (t-\tau)}\, d\tau, \quad \varphi^{(2)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^{(2)} v_k(x),$$

$$f^{(2)}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^{(2)}(t) v_k(x).$$

Определим теперь функции

$$u_3(x,t) = \begin{cases} u_1(x,t), \text{ если } t \in [0,b],\ x \in G, \\ u_2(x,t), \text{ если } t \in [b, b+\delta],\ x \in G, \end{cases}$$

$$f^{(3)}(x,t) = f(x,t;u_3)$$

и рассмотрим задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} - div(p\nabla u) = f^{(3)}(x,t), \quad u|_{D_0} = \varphi, \quad u|_{S_{b+\delta}} = 0$$

в цилиндре $G \times [0, b+\delta]$. Из [4, теорема 2, 3, гл. VI, п. 2] следует, что ее обобщенное решение u существует, единственно и определяется рядом Фурье

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} W_k(t) v_k(x),$$

где

$$W_k(t) = \varphi_k e^{\lambda_k t} + \int_0^t f_k^{(3)}(\tau) e^{\lambda_k (t-\tau)}\, d\tau,$$

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k v_k(x), \quad f^{(3)}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^{(3)}(t) v_k(x).$$

Легко проверяется, что функция W_k на отрезке $[0,b]$ совпадает с функцией $W_k^{(1)}$, а на отрезке $[b, b+\delta]$ — с функцией $W_k^{(2)}$. Следовательно, функция u на множестве $G \times [0,b]$ совпадает с функцией u_1, а на множестве $G \times [b, b+\delta]$ — с u_2. Это означает, что $u = u_3$. Отсюда следует, что функция u является обобщенным решением задачи (1.1) в цилиндре $G \times [0, b+\delta]$. Лемма доказана.

Пусть $b_e \in (0,T]$ — точная верхняя грань тех $b > 0$, для которых в пространстве $W^{1,0}(G_b)$ обобщенное решение задачи (1.1) существует. По теореме 3.1 выполняется неравенство $b_e > 0$.

Лемма 4.2. Обобщенное решение задачи (1.1) существует.

Доказательство. Допустим, что $b_e < T$. Тогда по лемме 4.1 решение задачи (1.1) можно продолжить на больший цилиндр, что противоречит определению числа b_e. Лемма доказана.

В следующей теореме постоянная C из неравенства (2.1), функция

$$K(y) = C\sqrt{y(y + I_0)}, \quad y \in R,$$

где

$$I_0 = 4\|F_0\|_{L_2(G_T)}.$$

Здесь функция F_0 берется из условия интегральной ограниченности правой части уравнения (1.1).

Теорема 4.1. Если $\varphi \in L_2(G)$, то существует единственное обобщенное решение $u \in W^{1,0}(G_T)$ задачи (1.1). Если u_1 и u_2 — решения задачи (1.1), отвечающие начальным функциям φ_1 и φ_2 соответственно, то выполняется неравенство

$$\|u_1 - u_2\|_T \leqslant K(y)\exp(aT^2/4), \tag{4.1}$$

где $y = \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L_2(G)}$, $a = (CL|G|)^2$.

Доказательство. Существование решения доказано в лемме 4.2. Докажем единственность решения. Пусть d — точная верхняя грань тех $b \in (0, T]$, для которых решение задачи (1.1) единственно из пространства $W^{1,0}(G_b)$. Покажем, что $d = T$. Предположим противное. Тогда $d < T$ и существует единственное решение $u \in W^{1,0}(G_d)$, при этом начальная функция $u|_{D_d}$ по теоремам 2.1, 3.1 и лемме 5.1 однозначно определяет продолжение решения u, и оно принадлежит пространству $W^{1,0}(G_{d+\delta})$ при некотором $\delta > 0$, что противоречит определению числа d.

Докажем неравенство (4.1), используя условие интегральной ограниченности функции F. Заметим, что функция $v = u_1 - u_2$ является обобщенным решением задачи (1.1) с правой частью

$$g(x,t) = f(x,t;u_1) - f(x,t;u_2)$$

и начальной функцией $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$. Отсюда

$$|g(x,t)|^2 \leqslant L^2\Big(\int_{G_t} |u_1 - u_2|\,dxds\Big)^2 \leqslant L^2\Big(\int_{G_t} 1\,dxdt\Big)\|v\|_t^2 = L^2 t|G|\,\|v\|_t^2.$$

Проинтегрируем левую и правую части этого неравенства по множеству G_t и учтем, что $\|v\|^2_{L_2(G_t)} \leqslant \|v\|^2_\tau$, получим

$$\|g\|^2_{L_2(G_t)} \leqslant L^2|G|^2\int_0^t \tau\|v\|_\tau^2\,d\tau. \tag{4.2}$$

Так как из неравенства (2.1) следует оценка

$$\|v\|_t \leqslant C\|\varphi\|_{L_2(G)} + C\|g\|_{L_2(G_t)}$$

при любом $t \in [0, T]$, то, с учетом (4.2), получим

$$\|v\|_t^2 \leqslant C^2\Big(\|\varphi\|^2_{L_2(G)} + 2\|\varphi\|_{L_2(G)}\|g\|_{L_2(G_t)} + \|g\|^2_{L_2(G_t)}\Big) \leqslant Q(\varphi) + C^2\|g\|^2_{L_2(G_t)} \leqslant$$

$$\leqslant Q(\varphi) + a\int_0^t \tau\|v\|_\tau^2\,d\tau,$$

где

$$Q(\varphi) = C^2\Big(\|\varphi\|_{L_2(G)} + I_0\Big)\|\varphi\|_{L_2(G)}.$$

Здесь использовано условие $|F(x,t,y)| \leqslant F_0(x,t)$. Обозначим $z(t) = \|v\|_t^2$. В результате получим интегральное неравенство

$$z(t) \leqslant Q(\varphi) + a\int_0^t \tau z(\tau)\,d\tau.$$

Отсюда

$$z(t) \leqslant Q(\varphi)\exp(at^2/2), \quad t \in [0,T]$$

и

$$\|v\|_t \leqslant \sqrt{Q(\varphi)}\exp(at^2/4), \quad t \in [0,T],$$

что и требовалось. В частности, из неравенства (4.1) следует единственность решения задачи (1.1), но при дополнительном условии интегральной ограниченности правой части уравнения (1.1). Теорема доказана.

Литература

[1] Валландер С.В. Лекции по гидроаэромеханике. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2005. 304 с.

[2] Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1973. 848 с.

[3] Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М: Наука, 1973. 408 с.

[4] Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М: Наука, 1976. 392 с.

[5] Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегродифференциальных уравнений. М.: Наука, 1982. 304 с.

[6] Pao C.V. Nonlinear parabolic and elliptic equations. New York; London: Plenum Press, 1992. 777 p.

[7] Нефедов Н.Н., Никитин А.Г., Уразгильдина Т.А. Задача Коши для интегродифференциального уравнения Вольтерра // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2006. Т. 46. № 5. С. 805–812.

[8] Нефедов Н.Н., Никитин А.Г. Начально-краевая задача для нелокального сингулярно возмущенного уравнения "реакция-диффузия" // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2012. Т. 52. № 6. С. 1042–1047.

[9] Боголюбов А.Н., Малых М.Д. Об одном классе нелокальных нелинейных уравнений параболического типа // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2011. Т. 51. № 6. С. 1056–1063.

[10] Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Краевая задача для линейных и квазилинейных параболических уравнений. I // Изв. АН ССР. Сер.: Математика. 1962. Т. 26. № 1. С. 5–52.

References

[1] Wallander S.V. Lectures on hydroaeromechanics. Izd-vo S.-Peterb. un-ta, 2005, 304 p. [in Russian].

[2] Loitsiansky L.G. Fluid Mechanics. M., Nauka, 1973, 848 p. [in Russian].

[3] Ladyzhenskaya O.A. Boundary-value problems of mathematical physics. M., Nauka, 1973, 408 p. [in Russian].

[4] Mikhailov V.P. Partial differential equations. M., Nauka, 1976, 392 p. [in Russian].

[5] Volterra V. Functional theory, integral and integro-differential equations. M., Nauka, 1982, 304 p. [in Russian].

[6] Pao C.V. Nonlinear parabolic and elliptic equations. New York-London, Plenum Press, 1992, 777 p.

[7] Nefedov N.N., Nikitin A.G., Urazgil'dina T.A. The Cauchy problem for integro-differential equation of Volterra. *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki* [Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics], 2006, Vol. 46, no. 5, pp. 805–812 [in Russian].

[8] Nefedov N.N., Nikitin A.G. Initial-boundary value problem for a nonlocal singularly perturbed reaction-diffusion equation. *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki* [Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics], 2012, Vol. 52, no. 6, pp. 1042–1047 [in Russian].

[9] Bogolyubov A.N., Malykh M.D. On a class of nonlocal nonlinear parabolic equations. *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki* [Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics], 2011, Vol. 51, no. 6, pp. 1056–1063 [in Russian].

[10] Ladyzhenskaya O.A., Ural'tseva N.N. Boundary value problem for linear and quasi-linear parabolic equations. I. *Izv. AN SSR. Ser. Matem.* [Proceedings of the Academy of Sciences of the USSR. Series Mathematics], 1962, Vol. 26, no. 1, pp. 5–52 [in Russian].

O.P. Filatov[2]

GLOBAL THEOREM OF EXISTENCE AND UNIQUENESS OF THE FIRST BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR NONLINEAR INTEGRODIFFERENTIAL EQUATIONS OF PARABOLIC TYPE

Global theorem of existence and uniqueness of solution of the first boundary value problem for nonlinear integrodifferential equation of parabolic type is proved. If the right-hand side of the equation is integrally bounded, then we have estimate of the norm of the difference of two solutions, which implies continuous dependence of solution on the initial function and uniqueness of solution of the first boundary value problem. The problem under consideration generalizes the real model for measuring the level of incompressible fluid in the fuel tanks missiles. Therefore, such problem have a current application.

Key words: integrodifferential equation, parabolic type, first boundary value problem, generalized solution, existence, uniqueness, continuous dependence.

Статья поступила в редакцию 11/*II*/2015.

The article received 11/*II*/2015.

[2] *Filatov Oleg Pavlovich* (filatov_oleg@samaradom.ru), Department of Mathematics and Mechanics, Samara State University, 1, Acad. Pavlov Street, Samara, 443011, Russian Federation.