УДК 517.95

Р.М. Сафина[1]

ЗАДАЧА КЕЛДЫША ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУЛЬКИНА В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

В данной статье для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом исследуется задача Келдыша с неполными граничными данными. На основании свойства полноты системы собственных функций одномерной спектральной задачи установлен критерий единственности. Решение построено в виде суммы ряда Фурье — Бесселя. При обосновании равномерной сходимости ряда возникла проблема малых знаменателей. При некоторых ограничениях на данные задачи найдена оценка об отделенности от нуля малого знаменателя с соответствующей асимптотикой, которая позволила доказать равномерную сходимость ряда и его производных до второго порядка включительно и теорему существования в классе регулярных решений.

Ключевые слова: уравнение смешанного типа, сингулярный коэффициент, задача Келдыша, спектральный метод, ряд Фурье — Бесселя, равномерная сходимость, единственность, существование.

1. Постановка задачи

Рассмотрим уравнение С.П. Пулькина [1]

$$Su \equiv u_{xx} + (\mathrm{sgn} y)u_{yy} + \frac{k}{x}u_x = 0 \tag{1.1}$$

в прямоугольной области $D = \{(x,y)| \quad 0 < x < l, -\alpha < y < \beta\}$, где $k \geqslant 1$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ – заданные действительные числа.

В этой работе рассмотрим первую граничную задачу для уравнения (1.1) в области D. В силу результатов работ [1; 2] в классе ограниченных в D решений уравнения при $k \geqslant 1$ отрезок $x = 0$ границы области D освобождается от граничного условия. В связи с этим предлагается следующая задача с неполными граничными данными, т. е. задача E (по терминологии М.В. Келдыша)

Задача E. Найти в области D функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям:

$$u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^2(D^+ \cup D^-); \tag{1.2}$$

$$Su(x,y) \equiv 0, \quad (x,y) \in D^+ \cup D^-; \tag{1.3}$$

$$u(l,y) = 0, \quad -\alpha \leqslant y \leqslant \beta; \tag{1.4}$$

Сафина Римма Марселевна (rimma77705@mail.ru), кафедра физико-математических дисциплин и информационных технологий, Поволжская государственная академия физической культуры, спорта и туризма, 420138, Российская Федерация, г. Казань, ул. Деревня Универсиады, 35.

$$u(x,\beta)=\varphi(x), \quad u(x,-\alpha)=\psi(x), \quad 0\leqslant x\leqslant l, \tag{1.5}$$

где φ, ψ – заданные достаточно гладкие функции, удовлетворяющие условиям $\varphi(0)=\varphi(l)=\psi(0)=\psi(l)=0$, $D^+=D\cap\{y>0\}$, $D^-=D\cap\{y<0\}$.

В работах [1; 3, с. 68], показано, что в случае задачи E

$$u_x(0,y)=0, -\alpha\leqslant y\leqslant\beta. \tag{1.6}$$

Ф.И. Франкль [4, с. 288] впервые обратил внимание на то, что ряд задач трансзвуковой динамики сводится к задаче Дирихле для уравнений смешанного типа. Так, например, если рассматривать задачу перехода через звуковой барьер установившихся двумерных безвихревых течений идеального газа в соплах, когда сверхзвуковые волны примыкают к стенкам сопла вблизи минимального сечения, то она сводится к задаче Дирихле для уравнения Чаплыгина. В работе [5] была показана некорректность постановки задачи Дирихле для уравнения Лаврентьева $u_{xx}+(\mathrm{sgn}y)u_{yy}=0$. Результат этой работы с необходимостью поставил вопрос поиска смешанных областей, для которых задача Дирихле является корректно поставленной. В дальнейшем задача Дирихле для уравнений смешанного типа изучалась многими авторами [6–12]. Более полную библиографию работ, посвященных этой тематике, можно найти в монографии [12].

В последние годы задача Дирихле для уравнений смешанного типа исследована в работах [13–18].

Данная работа является продолжением исследований автора [19], где изучена задача Дирихле для уравнения (1.1) в прямоугольной области D при $0<k<1$.

2. Единственность решения

Решения уравнения (1.1), не равные нулю на множестве $D^+\cup D^-$ и удовлетворяющие нулевым граничным условиям (1.4) и (1.6), будем искать в виде произведения $u(x,y)=X(x)\cdot Y(y)$. Подставляя данное произведение в уравнение (1.1), получим

$$X^{''}(x)+\frac{k}{x}X^{'}(x)+\lambda^2X(x)=0, \quad 0<x<l, \tag{2.1}$$

$$X'(0)=X(l)=0, \tag{2.2}$$

где λ^2 – постоянная разделения.

Решение спектральной задачи (2.1) и (2.2) определяется по формуле

$$X_n(x)=x^{\frac{1-k}{2}}J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda_n x), \tag{2.3}$$

$$\lambda_n=\frac{\mu_n}{l}, \quad n=1,2,3,..., \tag{2.4}$$

где $J_\nu(t)$ – функция Бесселя первого рода, μ_n – n-й корень уравнения $J_{\frac{k-1}{2}}(\mu_n)=0$.

Отметим, что для собственных значений задачи (2.1) и (2.2) при больших n справедлива асимптотическая формула [20, с. 317]:

$$\mu_n=\lambda_n l=\pi n+\frac{\pi}{4}(k+2)+O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{2.5}$$

Пусть $u(x,y)$ – решение задачи (1.2) – (1.5). Рассмотрим функции

$$u_n(y)=\int_0^l u(x,y)x^kX_n(x)dx, \quad n=1,2,3,..., \tag{2.6}$$

где $X_n(x)$ определяются по формуле (2.3). На основании (2.6) введем функции

$$u_{n,\varepsilon}(y) = \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u(x,y)x^k X_n(x)dx, \quad n = 1, 2, 3, ..., \tag{2.7}$$

где $\varepsilon > 0$ – достаточно малое число. Дифференцируя равенство (2.7) по y дважды при $y \in (-\alpha, 0) \cup (0, \beta)$ и учитывая уравнение (1.1), получим

$$\begin{gathered} u''_{n,\varepsilon}(y) = \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u_{yy}(x,y)x^k X_n(x)dx = -(\text{sgny}) \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} (u_{xx} + \tfrac{k}{x}u_x)x^k X_n(x)dx = \\ = -(\text{sgny}) \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} \tfrac{\partial}{\partial x}(x^k u_x) X_n(x)dx = \\ = -(\text{sgny}) \Big[x^k u_x X_n(x) \Big|_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} - \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} x^k u_x X'_n(x)dx \Big]. \end{gathered} \tag{2.8}$$

Из равенства (2.7) в силу уравнения (2.1), имеем

$$\begin{gathered} u_{n,\varepsilon}(y) = -\tfrac{1}{\lambda_n^2} \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u(x,y)x^k \Big[X''_n(x) + \tfrac{k}{x}X'_n(x) \Big] dx = \\ = -\tfrac{1}{\lambda_n^2} \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u(x,y) \tfrac{d}{dx}(x^k X'_n(x))dx = \\ = -\tfrac{1}{\lambda_n^2} \Big[u(x,y)x^k X'_n(x) \Big|_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} - \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} x^k u_x X'_n(x)dx \Big]. \end{gathered} \tag{2.9}$$

Из равенства (2.9) найдем

$$\int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u_x x^k X'_n(x)dx = \lambda_n^2 u_{n,\varepsilon}(y) + u(x,y)x^k X'_n(x) \Big|_{\varepsilon}^{l-\varepsilon}. \tag{2.10}$$

Подставляя (2.10) в (2.8), получим

$$u''_{n,\varepsilon}(y) = -(\text{sgny}) \left[x^k u_x X_n(x) \Big|_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} - \lambda_n^2 u_{n,\varepsilon}(y) - u(x,y)x^k X'_n(x) \Big|_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} \right].$$

Переходя здесь к пределу при $\varepsilon \to 0$, с учетом граничных условий (1.4), (1.6) и (2.2), получим, что $u_n(y)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$u''_n(y) + (\text{sgny})\lambda_n^2 u_n(y) = 0, \quad y \in [-\alpha, 0) \cup (0, \beta]. \tag{2.11}$$

Общее решение дифференциального уравнения (2.11) имеет вид

$$u_n(y) = \begin{cases} a_n e^{\lambda_n y} + b_n e^{-\lambda_n y}, & y > 0, \\ c_n \cos \lambda_n y + d_n \sin \lambda_n y, & y < 0, \end{cases} \tag{2.12}$$

где a_n, b_n, c_n, d_n – произвольные постоянные.

Теперь в (2.12) на основании (1.2) подберем постоянные a_n, b_n, c_n и d_n так, чтобы выполнялись условия сопряжения

$$u_n(0-0) = u_n(0+0), \quad u'_n(0-0) = u'_n(0+0). \tag{2.13}$$

Условия (2.13) выполняются только тогда, когда $c_n = a_n + b_n$ и $d_n = a_n - b_n$, $n = 1, 2, 3, ...$.

С учетом последних равенств функции (2.12) принимают вид

$$u_n(y) = \begin{cases} c_n \operatorname{ch} \lambda_n y + d_n \operatorname{sh} \lambda_n y, & y > 0, \\ c_n \cos \lambda_n y + d_n \sin \lambda_n y, & y < 0. \end{cases} \tag{2.14}$$

Для нахождения постоянных c_n и d_n воспользуемся граничным условием (1.5) и формулой (2.6):

$$u_n(\beta)=\int_0^l u(x,\beta)x^kX_n(x)dx=\int_0^l \varphi(x)x^kX_n(x)dx=\varphi_n, \qquad (2.15)$$

$$u_n(-\alpha)=\int_0^l u(x,-\alpha)x^kX_n(x)dx=\int_0^l \psi(x)x^kX_n(x)dx=\psi_n. \qquad (2.16)$$

Теперь на основании (2.14)–(2.16) получим систему

$$\begin{cases} c_n \operatorname{ch}\lambda_n\beta+d_n\operatorname{sh}\lambda_n\beta=\varphi_n,\\ c_n\cos\lambda_n\alpha-d_n\sin\lambda_n\alpha=\psi_n. \end{cases} \qquad (2.17)$$

Если определитель системы (2.17) при всех $n\in N$

$$\triangle(n,\alpha,\beta)=ch\lambda_n\beta\sin\lambda_n\alpha+sh\lambda_n\beta\cos\lambda_n\alpha\neq 0, \qquad (2.18)$$

то данная система имеет единственное решение

$$c_n=\frac{\psi_n sh\lambda_n\beta+\varphi_n\sin\lambda_n\alpha}{ch\lambda_n\beta\sin\lambda_n\alpha+sh\lambda_n\beta\cos\lambda_n\alpha}, \qquad (2.19)$$

$$d_n=\frac{\varphi_n\cos\lambda_n\alpha-\psi_n ch\lambda_n\beta}{ch\lambda_n\beta\sin\lambda_n\alpha+sh\lambda_n\beta\cos\lambda_n\alpha}. \qquad (2.20)$$

С учетом (2.14), (2.19), (2.20) найдем окончательный вид функции

$$u_n(y)=\begin{cases} \frac{1}{\triangle(n,\alpha,\beta)}\left[\varphi_n(\cos\lambda_n\alpha sh\lambda_n y+\sin\lambda_n\alpha ch\lambda_n y)+\psi_n sh\lambda_n(\beta-y)\right], & y>0,\\ \frac{1}{\triangle(n,\alpha,\beta)}\left[\varphi_n\sin\lambda_n(y+\alpha)+\psi_n(sh\lambda_n\beta\cos\lambda_n y-ch\lambda_n\beta\sin\lambda_n y)\right], & y<0. \end{cases} \qquad (2.21)$$

Пусть теперь $\varphi(x)\equiv 0$ и $\psi(x)\equiv 0$ и выполнены условия (2.18). Тогда из равенств (2.15), (2.16) и (2.21) следует, что $u_n(y)\equiv 0$ при всех $n\in\mathbb{N}$. Тогда из (2.6) получим

$$\int_0^l u(x,y)x^kX_n(x)dx=0, \quad n=1,2,3,\ldots \quad . \qquad (2.22)$$

Отсюда в силу полноты системы (2.3) в пространстве $L_2[0,l]$ с весом x^k следует $u(x,y)=0$ почти для всех $x\in[0,l]$ и при любом $y\in[-\alpha,\beta]$. Поскольку $u(x,y)\in$ $\in C(\overline{D})$, то $u(x,y)=0$ в $\overline{D}$.

Пусть при некоторых α,β и $n=s\in\mathbb{N}$ нарушено условие (2.18), т. е. $\triangle(s,\alpha,\beta)=0$. Тогда однородная задача (1.2) – (1.5) (где $\varphi(x)=\psi(x)\equiv 0$) имеет нетривиальное решение

$$u_s(x,y)=\begin{cases} \widetilde{d}_s(sh\lambda_s y ch\lambda_s\beta-sh\lambda_s\beta ch\lambda_s y)X_s(x), & y>0,\\ \widetilde{d}_s(ch\lambda_s\beta\sin\lambda_s y-sh\lambda_s\beta\cos\lambda_s y)X_s(x), & y<0, \end{cases} \qquad (2.23)$$

где $\widetilde{d}_s$ – произвольная постоянная, не равная нулю, $X_s(x)$ определяются по формуле (2.3).

Выражение $\triangle(n,\alpha,\beta)$ представим в виде

$$\triangle(n,\alpha,\beta)=\sqrt{ch2\lambda_n\beta}\sin(\mu_n\widetilde{\alpha}+\theta_n), \qquad (2.24)$$

где $\lambda_n\alpha=\frac{\mu_n}{l}\alpha=\mu_n\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\alpha}=\frac{\alpha}{l}$, $\theta_n=\arcsin\frac{ch\lambda_n\beta}{\sqrt{ch2\lambda_n\beta}}\to\frac{\pi}{4}$ при $n\to+\infty$. Из представления (2.24) видно, что выражение $\triangle(n,\alpha,\beta)=0$ относительно $\tilde{\alpha}$ только в том случае, когда

$$\tilde{\alpha}=\frac{1}{\mu_n}(\pi z-\theta_n), \quad z=1,2,\ldots \quad . \qquad (2.25)$$

Таким образом, доказана

Теорема 1. *Если существует решение задачи (1.2) – (1.5), то оно единственно тогда и только тогда, когда выполнены условия (2.18) при всех $n\in N$.*

3. Существование решения

Поскольку α и β – любые числа из промежутков задания, то при достаточно больших n выражение $\triangle(n,\alpha,\beta)$, которое входит в знаменатели коэффициентов (2.19) и (2.20), может стать достаточно малым, т. е. возникает проблема "малых знаменателей" [13]. Для обоснования существования решения данной задачи необходимо показать существование чисел α, β и k таких, что при достаточно больших n выражение $\triangle(n,\alpha,\beta)$ отделено от нуля.

Лемма 1. *Если $\widetilde{\alpha}=p/q$, $p,q\in N$, $(p,q)=1$ и $k\neq\frac{1}{p}(4dq-q-4r)-2$, $d\in N$, $r=1,...,q-1$, то существуют положительные постоянные C_0 и $n_0\in N$ такие, что при всех $n>n_0$ справедлива оценка*

$$|\triangle(n,\alpha,\beta)|\geqslant C_0e^{\lambda_n\beta}. \tag{3.1}$$

Доказательство. На основании формулы (2.5) имеем

$$\mu_n\widetilde{\alpha}=\pi n\widetilde{\alpha}+\frac{\pi}{4}(k+2)\widetilde{\alpha}+O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{3.2}$$

Тогда из соотношения (2.24) с учетом (3.2) получим

$$\triangle(n,\alpha,\beta)=\sqrt{ch2\lambda_n\beta}\sin\left[\pi n\widetilde{\alpha}+\frac{\pi}{4}(k+2)\widetilde{\alpha}+O\left(\frac{1}{n}\right)+\theta_n\right]. \tag{3.3}$$

Пусть теперь $\widetilde{\alpha}=p/q$ – рациональное число, где $p,q\in N$, $(p,q)=1$. В этом случае разделим np на q с остатком: $np=sq+r$, $s,r\in N\cup 0$, $0\leqslant r\leqslant q-1$. Тогда выражение (3.3) примет вид:

$$\begin{aligned}\triangle(n,\alpha,\beta)&=\sqrt{ch2\lambda_n\beta}(-1)^s\sin\left[\tfrac{\pi r}{q}+\tfrac{\pi p}{4q}(k+2)+\theta_n+O\left(\tfrac{1}{n}\right)\right]=\\&=\tfrac{e^{\lambda_n\beta}}{\sqrt{2}}\sqrt{1+e^{-4\lambda_n\beta}}(-1)^s\sin\left[\tfrac{\pi r}{q}+\tfrac{\pi p}{4q}(k+2)+\tfrac{\pi}{4}-\varepsilon_n+O\left(\tfrac{1}{n}\right)\right],\end{aligned} \tag{3.4}$$

здесь $\varepsilon_n>0$ и $\varepsilon_n\to 0$ при $n\to\infty$.

Применяя формулу разности арксинусов

$$\arcsin x-\arcsin y=\arcsin(x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2}),\quad xy>0,$$

и учитывая неравенство $\arcsin x<\pi x/2$, $0<x<1$, имеем

$$\begin{aligned}|\varepsilon_n|&=\left|\tfrac{\pi}{4}-\theta_n\right|=\left|\arcsin\tfrac{1}{\sqrt{2}}-\arcsin\tfrac{ch\lambda_n\beta}{\sqrt{ch2\lambda_n\beta}}\right|=\left|\arcsin\tfrac{1}{\sqrt{2}}\tfrac{sh\lambda_n\beta-ch\lambda_n\beta}{\sqrt{ch2\lambda_n\beta}}\right|=\\&=\left|\arcsin\tfrac{-e^{-\lambda_n\beta}}{\sqrt{2ch2\lambda_n\beta}}\right|<\tfrac{\pi}{2}\tfrac{e^{-\lambda_n\beta}}{\sqrt{e^{2\lambda_n\beta}+e^{-2\lambda_n\beta}}}<\tfrac{\pi}{2}e^{-2\lambda_n\beta}.\end{aligned}$$

Тогда из представления (3.4) следует, что существует номер n_0 такой, что при всех $n>n_0$

$$|\triangle(n,\alpha,\beta)|\geqslant\frac{e^{\lambda_n\beta}}{\sqrt{2}}\left|\sin\left[\frac{\pi r}{q}+\frac{\pi p}{4q}(k+2)+\frac{\pi}{4}\right]\right|=C_0e^{\lambda_n\beta}. \tag{3.5}$$

Теперь потребуем, чтобы постоянная C_0 была больше нуля, а это возможно только тогда, когда

$$\frac{\pi r}{q}+\frac{\pi p}{4q}(k+2)+\frac{\pi}{4}\neq\pi d, d\in N,$$

или

$$\frac{r}{q}+\frac{1}{4}\neq d-\frac{(k+2)p}{4q} \tag{3.6}$$

при всех $d\in N,\ r\in N_0\cap[0,q-1]$.

Из (3.6) имеем

$$k\neq\frac{1}{p}(4dq-q-4r)-2. \tag{3.7}$$

Из неравенства (3.7) видно, что если k является положительным иррациональным числом, то неравенство (3.6) всегда выполнено. При рациональном k условие (3.6) может нарушаться. Поэтому потребуем, что постоянная k не принимала рациональные значения из правой части (3.7).

Лемма 2. *Пусть выполнено неравенство (3.1) при $n>n_0$. Тогда при таких n для любых $y\in[-\alpha,\beta]$ справедливы оценки:*

$$|u_n(y)|\leqslant C_1(|\varphi_n|+|\psi_n|), \tag{3.8}$$

$$|u_n^{'}(y)|\leqslant C_2 n(|\varphi_n|+|\psi_n|), \tag{3.9}$$

$$|u_n^{''}(y)|\leqslant C_3 n^2(|\varphi_n|+|\psi_n|), \tag{3.10}$$

C_i – здесь и далее положительные постоянные.

Доказательство. На основании формул (2.21) с учетом оценки (3.1) найдем

$$\begin{gathered}|u_n(y)|\leqslant\frac{1}{|\triangle(n,\alpha,\beta)|}\left[|\varphi_n|(sh\lambda_n\beta+ch\lambda_n\beta)+|\psi_n|sh\lambda_n\beta\right]\leqslant\\ \leqslant\frac{1}{C_0e^{\lambda_n\beta}}\left[|\varphi_n|(sh\lambda_n\beta+ch\lambda_n\beta)+|\psi_n|sh\lambda_n\beta\right]\leqslant\widetilde{C_1}[|\varphi_n|+|\psi_n|],\quad y>0,\end{gathered} \tag{3.11}$$

$$|u_n(y)|\leqslant\frac{1}{C_0e^{\lambda_n\beta}}\left[|\varphi_n|+|\psi_n|(sh\lambda_n\beta+ch\lambda_n\beta)\right]\leqslant\widetilde{C_2}[|\varphi_n|+|\psi_n|],\quad y<0. \tag{3.12}$$

Тогда при всех $y\in[-\alpha,\beta]$ и $n>n_0$

$$|u_n(y)|\leqslant C_1(|\varphi_n|+|\psi_n|), \tag{3.13}$$

здесь $C_1=max\{\widetilde{C_1},\widetilde{C_2}\}$.

На основании формул (2.21) вычислим

$$u_n^{'}(y)=\begin{cases}\frac{\lambda_n}{\triangle(n,\alpha,\beta)}\left[\varphi_n(\cos\lambda_n\alpha ch\lambda_n y+\sin\lambda_n\alpha sh\lambda_n y)-\psi_n ch\lambda_n(\beta-y)\right], & y>0,\\ \frac{\lambda_n}{\triangle(n,\alpha,\beta)}\left[\varphi_n\cos\lambda_n(y+\alpha)-\psi_n(sh\lambda_n\beta\sin\lambda_n y+ch\lambda_n\beta\cos\lambda_n y)\right], & y<0.\end{cases} \tag{3.14}$$

Аналогично, исходя из равенств (3.1) и (3.14), получим

$$\begin{gathered}|u_n^{'}(y)|\leqslant\frac{n}{C_0e^{\lambda_n\beta}}\left[|\varphi_n|(ch\lambda_n\beta+sh\lambda_n\beta)-|\psi_n|ch\lambda_n\beta\right]\leqslant n\widetilde{C_3}(|\varphi_n|+|\psi_n|),\quad y>0,\\ |u_n^{'}(y)|\leqslant\frac{n}{C_0e^{\lambda_n\beta}}\left[|\varphi_n|-|\psi_n|(sh\lambda_n\beta+ch\lambda_n\beta)\right]\leqslant n\widetilde{C_4}(|\varphi_n|+|\psi_n|),\quad y<0.\end{gathered} \tag{3.15}$$

Тогда при всех $y\in[-\alpha,\beta]$ и $n>n_0$

$$|u_n(y)|\leqslant nC_2(|\varphi_n|+|\psi_n|), \tag{3.16}$$

где $C_2=max\{\widetilde{C_3},\widetilde{C_4}\}$.

Для второй производной справедливо тождество

$$u_n^{''}(y)=-(\text{sgn y})\lambda_n^2u_n(y),\quad y\in[-\alpha,0)\cup(0,\beta].$$

Отсюда в силу оценки (3.13) следует, что

$$|u_n^{''}(y)|\leqslant\lambda_n^2|u_n(y)|\leqslant C_3n^2(|\varphi_n|+|\psi_n|).$$

Лемма 3. *Для достаточно больших n и при всех $x \in [0,l]$ справедливы оценки:*

$$|X_n(x)| \leqslant C_5 n^{-\frac{1}{2}}, \tag{3.17}$$

$$|X_n^{'}(x)| \leqslant C_6 n^{\frac{1}{2}}, \tag{3.18}$$

$$|X_n^{''}(x)| \leqslant C_7 n^{\frac{3}{2}}. \tag{3.19}$$

где C_i – положительные постоянные.

Доказательство. Функция $X_n(x) = x^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda_n l x) \in C^2[0,l]$ и при больших t справедлива асимптотическая формула

$$J_\nu(t) = O\left(\frac{1}{t^{1/2}}\right). \tag{3.20}$$

Отсюда следует справедливость оценки (3.17). Найдем

$$X_n^{'}(x) = -\lambda_n l x^{-\frac{1-k}{2}} J_{\frac{k+1}{2}}(\lambda_n l x). \tag{3.21}$$

Тогда из формул (3.20) и (3.21) следует справедливость оценки (3.18). Далее из уравнения (2.1) найдем

$$X_n^{''}(x) = -\frac{k}{x} X_n^{'}(x) - \lambda^2 X_n(x).$$

Отсюда в силу доказанных неравенств (3.17) и (3.18) следует справедливость оценки (3.19).

Лемма 4. *Если функции $\varphi(x) \in C^4[0,l]$ и $\psi(x) \in C^4[0,l]$ и $\varphi(0) = \psi(0) = \varphi^{'}(0) = \psi^{'}(0) = \varphi^{''}(0) = \psi^{''}(0) = 0$, $\varphi(l) = \psi(l) = \varphi^{'}(l) = \psi^{'}(l) = \varphi^{''}(l) = \psi^{''}(l) = 0$, то справедливы оценки:*

$$|\varphi_n| \leqslant \frac{C_8}{n^4}, \quad |\psi_n| \leqslant \frac{C_9}{n^4}. \tag{3.22}$$

Доказательство. Интегрируя два раза по частям в интеграле (2.15) с учетом равенства (2.1), имеем

$$\begin{gathered}\varphi_n = \int_0^l \varphi(x) x^k X_n(x) dx = -\tfrac{1}{\lambda_n^2} \int_0^l \varphi(x) (x^k X_n^{'}(x))^{'} dx = \\ = \tfrac{1}{\lambda_n^2} \int_0^l \varphi^{'}(x) x^k X_n^{'}(x) dx = -\tfrac{1}{\lambda_n^2} \int_0^l (\varphi^{'}(x) x^k)^{'} X_n(x) dx = \\ = -\tfrac{1}{\lambda_n^2} \int_0^l \varphi^{''}(x) x^k X_n(x) dx - \tfrac{k}{\lambda_n^2} \int_0^l \tfrac{\varphi^{'}(x)}{x} x^k X_n(x) dx.\end{gathered}$$

Отсюда получим представление

$$\varphi_n = -\frac{1}{\lambda_n^2} \varphi_n^{(2)} - \frac{k}{\lambda_n^2} \varphi_{1n}, \tag{3.23}$$

где

$$\varphi_n^{(2)} = \int_0^l \varphi^{''}(x) x^k X_n(x) dx, \quad \varphi_{1n} = \int_0^l \frac{\varphi^{'}(x)}{x} x^k X_n(x) dx.$$

Аналогично получим представления для

$$\varphi_n^{(2)} = -\frac{1}{\lambda_n^2} \varphi_n^{(4)} - \frac{k}{\lambda_n^2} \varphi_{3n}, \tag{3.24}$$

$$\varphi_{1n} = -\frac{1}{\lambda_n^2} \varphi_{1n}^{(2)} - \frac{k}{\lambda_n^2} \varphi_{2n}, \tag{3.25}$$

где

$$\varphi_n^{(4)} = \int_0^l \varphi^{(4)}(x) x^k X_n(x) dx, \quad \varphi_{3n} = \int_0^l \frac{\varphi^{'''}(x)}{x} x^k X_n(x) dx,$$

$$\varphi_{1n}^{(2)} = \int_0^l \varphi_1^{''}(x)x^k X_n(x)dx, \quad \varphi_{2n} = \int_0^l \frac{\varphi_1^{'}(x)}{x} x^k X_n(x)dx, \quad \varphi_1(x) = \varphi^{'}(x)/x.$$

Подставляя (3.24) и (3.25) в (3.23), получим

$$\varphi_n = \frac{1}{\lambda_n^4}\varphi_n^{(4)} + \frac{k}{\lambda_n^4}\varphi_{3n} + \frac{k}{\lambda_n^4}\varphi_{1n}^{(2)} + \frac{k^2}{\lambda_n^4}\varphi_{2n}. \quad (3.26)$$

Из представления (3.26) следует первая оценка из (3.22). Аналогично доказывается справедливость второй оценки из (3.22).

Если выполнены условия (2.18) и (3.1), то на основании частных решений (2.3) и (2.21) решение задачи (1.2) – (1.5) можно представить в виде суммы ряда Фурье

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(y)X_n(x), \quad (3.27)$$

где функции $u_n(y)$ определены по формуле (2.21), а функции $X_n(x)$ – по формуле (2.3).

Формально из ряда (3.27) почленным дифференцированием составим ряды:

$$u_y(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{'}(y)X_n(x), \quad u_x(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(y)X_n^{'}(x). \quad (3.28)$$

$$u_{yy}(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{''}(y)X_n(x), \quad u_{xx}(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(y)X_n^{''}(x). \quad (3.29)$$

Ряды (3.27) и (3.28) при любом $(x,y) \in \overline{D}$ мажорируются рядом

$$C_{10}\sum_{n=0}^{+\infty} n^{\frac{1}{2}}(|\varphi_n| + |\psi_n|), \quad (3.30)$$

а ряды (3.29) при любом $(x,y) \in \overline{D^+} \cup \overline{D^-}$ – рядом

$$C_{11}\sum_{n=0}^{+\infty} n^{\frac{3}{2}}(|\varphi_n| + |\psi_n|). \quad (3.31)$$

Согласно лемме 4 ряды из (3.30) и (3.31) оцениваются соответственно числовыми рядами

$$C_{12}\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-\frac{7}{2}}, \quad C_{13}\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-\frac{5}{2}}. \quad (3.32)$$

На основании сходимости рядов (3.32) в силу признака Вейерштрасса сходятся равномерно ряды (3.27), (3.28) на замкнутой области $\overline{D}$, а ряды (3.29) соответственно на замкнутых областях $\overline{D^+}$ и $\overline{D^-}$. Поэтому функция $u(x,y)$, определенная рядом (3.27), удовлетворяет условиям (1.2) и (1.3).

Если для указанных в лемме 1 чисел $\widetilde{\alpha}$ при некоторых $n = m = s_1, s_2, ..., s_h$, где $1 \leqslant s_1 < s_2 < ... < s_h \leqslant n_0$, s_h и h – заданные натуральные числа, $\triangle(m,\alpha,\beta) = 0$. Тогда для разрешимости системы (2.17) достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\varphi_m = 0, \psi_m = 0, m = s_1, s_2, ..., s_h. \quad (3.33)$$

В этом случае решение задачи (1.2)–(1.5) определяется в виде

$$u(x,y) = \left(\sum_{n=1}^{s_1-1} + ... + \sum_{n=s_{h-1}+1}^{s_h-1} + \sum_{n=s_h+1}^{+\infty}\right) u_n(y)X_n(x) + \sum_m u_m(x,y), \quad (3.34)$$

здесь в последней сумме m принимает значения $s_1, s_2, ..., s_h$, функция $u_m(x, y)$ определяется по формуле (2.23).

Итак, доказана

Теорема 2. *Пусть функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям леммы 4 и выполнена оценка (3.1) при $n > n_0$. Тогда если $\triangle(n, \alpha, \beta) \neq 0$ при всех $n = \overline{1, n_0}$, то существует единственное решение задачи (1.2)–(1.5), и это решение определяется рядом (3.27); если $\triangle(n, \alpha, \beta) = 0$ при некоторых $n = s_1, s_2, ..., s_h \leqslant n_0$, то задача (1.2)–(1.5) разрешима, когда выполняются условия (3.33), и решение в этом случае определяется рядом (3.34).*

Литература

[1] Пулькин С.П. О единственности решения сингулярной задачи Геллерстеда // Изв. вузов. Сер.: Математика. 1960. № 6(19). С. 214–225.

[2] Келдыш М.В. О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области // ДАН. 1951. Т. 77. № 2. С. 181–183.

[3] Сабитов К.Б. К теории уравнений смешанного типа. М.: Физматлит, 2014. 304 с.

[4] Франкль Ф.И. Избранные труды по газовой динамике. М.: Наука, 1973. 711 с.

[5] Бицадзе А.В. Некорректность задачи Дирихле для уравнений смешанного типа // ДАН СССР. 1953. Т. 122. № 2. С. 167–170.

[6] Шабат Б.В. Примеры решения задачи Дирихле для уравнения смешанного типа // ДАН СССР. 1957. Т. 112. № 3. С. 386–389.

[7] Вахания Н.Н. Об одной особой задаче для уравнения смешанного типа // Тр. АН Груз. ССР. 1963. Т. 3. С. 69–80.

[8] Cannon J.R. Dirichlet problem for an equation of mixed type with a discontininius coefficient // Ann. Math. pura ed appl. 1963. Vol. 62. P. 371–377.

[9] Нахушев А.М. Критерий единственности задачи Дирихле для уравнения смешанного типа в цилиндрической области // Дифференциальные уравнения. 1970. Т. 6. № 1. С. 190–191.

[10] Хачев М.М. Задача Дирихле для уравнения Трикоми в прямоугольнике // Дифференцальные уравнения. 1975. Т. 11. № 1. С. 151–160.

[11] Солдатов А.П. Задача типа Дирихле для уравнения Лаврентьева — Бицадзе // ДАН. 1993. Т. 333. № 1. С. 16–18.

[12] Хачев М.М. Первая краевая задача для линейных уравнений смешанного типа. Нальчик: Эльбрус, 1998. 168 с.

[13] Сабитов К.Б. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа в прямоугольной области // ДАН. 2007. Т. 413. № 1. С. 23–26.

[14] Сабитов К.Б., Сулейманова А.Х. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа второго рода в прямоугольной области // Изв. вузов. Сер.: Математика. 2007. № 4. С. 45–53.

[15] Сабитов К.Б., Сулейманова А.Х. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа с характеристическим вырождением в прямоугольной области // Изв. вузов. Сер.: Математика. 2009. № 11. С. 43–52.

[16] Сабитов К.Б., Вагапова Э.В. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения в прямоугольной области // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49. № 1. С. 68–78.

[17] Хайруллин Р.С. К задаче Дирихле для уравнения смешанного типа второго рода с сильным вырождением // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49. № 4. С. 528–534.

[18] Сафина Р.М. Критерий единственности решения задачи Дирихле с осевой симметрией для трехмерного уравнения смешанного типа с оператором Бесселя // Изв. вузов. Сер.: Математика. 2014. № 6. С. 78–83.

[19] Сафина Р.М. Задача Дирихле для уравнения Пулькина в прямоугольной области // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучн. сер., 2014. № 10(121). С. 91–101.

[20] Олвер Ф. Введение в асимптотические методы и специальные функции. М.: Мир, 1986. 381 с.

References

[1] Pulkin S.P. Uniqueness of the solution of a singular problem of Gellerstedt. *Izvestiia vuzov. Matematika* [News of Higher Educational Institutions. Mathematics], 1960, no. 6(19), pp. 214–225 [in Russian].

[2] Keldysh M.V. On certain cases of degeneration of equations of elliptic type on the bondary. *DAN* [Reports of the Academy of Sciences], 1951, Vol. 77, no. 2, pp. 181–183 [in Russian].

[3] Sabitov K.B. On the theory of equations of the mixed type. M., Fizmatlit, 2014, 304 p. [in Russian].

[4] Frankl F.I. Selected works on gas dynamics. M., Nauka, 1973, 711 p. [in Russian].

[5] Bitsadze A.V. Incorrectness of the Dirichlet problem for the equations of the mixed type. *DAN SSSR* [Reports of the Academy of Sciences of the USSR], 1953, Vol. 122, no. 2, pp. 167–170 [in Russian].

[6] Shabat B.V. The examples of solutions of the Dirichlet problem for mixed-type equations. *DAN SSSR* [Reports of the Academy of Sciences of the USSR], 1957, Vol. 112, no. 3, pp. 386–389 [in Russian].

[7] Vakhaniya N.N. About one singular problem for the equations of the mixed type. *Tr. AN GruzSSR* [Materials of the Georgian Academy Academy of Sciences of the USSR], 1963, Vol. 3, pp. 69–80 [in Russian].

[8] Cannon J.R. Dirichlet problem for an equation of mixed type with a discontininius coefficient. *Ann. Math. pura ed appl.*, 1963, Vol. 62, pp. 371–377.

[9] Nakhushev A.M. Criterion of uniqueness of solution of Dirichlet problem for the equation of the mixed type in the cylindrical domain. *Differentsial'nye uravneniia* [Differential equations], 1970, Vol. 6, no. 1, pp. 190–191 [in Russian].

[10] Hachev M.M. Dirichlet problem for the Tricomi equation in a rectangle. *Differentsial'nye uravneniia* [Differential equations], 1975, Vol. 11, no. 1, pp. 151–160 [in Russian].

[11] Soldatov A.P. Dirichlet type problem for the equation of Lavrentiev - Bitsadze. *DAN* [Reports of the Academy of Sciences], 1993, Vol. 333, no. 1, pp. 16–18 [in Russian].

[12] Hachev M.M. The first boundary value problem for the equations of the mixed type. Nalchik, Izd-vo Elbrus, 1998, 168 p. [in Russian].

[13] Sabitov K.B. Dirichlet problem for a mixed-type equation in a rectangular domain. *DAN* [Reports of the Academy of Sciences], 2007, Vol. 413, no. 1, pp. 23–26 [in Russian].

[14] Sabitov K.B., Suleimanova A.Kh. Dirichlet problem for a mixed-type equation of the second kind in a rectangular domain. *Izvestiia vuzov. Matematika* [News of Higher Educational Institutions. Mathematics], 2007, no. 4, pp. 45–53 [in Russian].

[15] Sabitov K.B., Suleimanova A.Kh. Dirichlet problem for a mixed-type equation with characteristic degeneration in a rectangular domain. *Izvestiia vuzov. Matematika* [News of Higher Educational Institutions. Mathematics], 2009, no. 11, pp. 43–52 [in Russian].

[16] Sabitov K.B., Vagapova E.V. Dirichlet problem for an equation of the mixed type with two degeneration lines in a rectangular domain. *Differentsial'nye uravneniia* [Differential equations], 2013, Vol. 49, no. 1, pp. 68–78 [in Russian].

[17] Khairullin R.S. On the Dirichlet problem for mixed-type equation of the second kind with strong degeneration. *Differentsial'nye uravneniia* [Differential equations], 2013, Vol. 49, no. 4, pp. 528–534 [in Russian].

[18] Safina R.M. Criterion of uniqueness of solution to the Dirichlet problem with the axial symmetry for three-dimensional mixed type equation with Bessel operator. *Izvestiia vuzov. Matematika* [News of Higher Educational Institutions. Mathematics], 2014, no. 6, pp. 78–83 [in Russian].

[19] Safina R.M. Dirichlet problem for Pulkin's equation in a rectangular domain. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta. Estestvennonauchn. ser.* [Vestnik of Samara State University. Natural Science Series], 2014, no. 10, pp. 91–101 [in Russian].

[20] Olver F. Introduction to asymptotics methods and special functions. M., Izd-vo Mir, 1986, 381 p. [in Russian].

***R.M. Safina*[2]**

KELDYSH PROBLEM FOR PULKIN'S EQUATION IN A RECTANGULAR DOMAIN

In this article for the mixed type equation with a singular coefficient Keldysh problem of incomplete boundary conditions is studied. On the basis of property of completeness of the system of own functions of one-dimensional spectral problem the criterion of uniqueness is established. The solution is constructed as the summary of Fourier-Bessel row. At the foundation of the uniform convergence of a row there is a problem of small denominators.Under some restrictions on these tasks evaluation of separation from zero of a small denominator with the corresponding asymptotics was found, which helped to prove the uniform convergence and its derivatives up to the second order inclusive, and the existence theorem in the class of regular solutions.

Key words: equation of the mixed type, singular coefficient, Keldysh problem, spectral method, series of Fourier-Bessel, uniform convergence, uniqueness, existence.

Статья поступила в редакцию $16/I/2015$.

The article received $16/I/2015$.

[2] *Safina Rimma Marselevna* (rimma77705@mail.ru), Department of Physical and Mathematical Disciplines and Information Technologies, Volga Region State Academy of Physical Culture, Sport and Tourism, 35, ul. Derevnya Universiady, Kazan, 420138, Russian Federation.

УДК 519.63

О.П. Филатов[1]

ГЛОБАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Доказана глобальная теорема существования и единственности обобщенного решения первой краевой задачи для нелинейного интегродифференциального уравнения параболического типа.

Если правая часть уравнения интегрально ограничена, то имеет место оценка нормы разности двух решений, из которой следуют непрерывная зависимость решения от начальной функции и единственность решения первой краевой задачи.

Рассматриваемая задача обобщает реальные модели измерения уровня несжимаемой жидкости в топливных баках ракет. Поэтому такие задачи имеют актуальные приложения.

Ключевые слова: интегродифференциальное уравнение, параболический тип, первая краевая задача, априорная оценка, обобщенное решение, существование, единственность, непрерывная зависимость.

1. Постановка задачи

Рассматривается первая краевая задача

$$u_t - div(p(x)\nabla u) = f(x,t;u), \quad u|_{D_0}, \quad u_{S_T} = 0 \tag{1.1}$$

в цилиндре $G_T = G\times[0,T]$, где ограниченная область $G \subset R^m, \partial G \in C^2$, $S_T = \partial G\times \times[0,T]$ — боковая поверхность цилиндра, у которого верхнее и нижнее основания обозначаются соответственно символами

$$D_T = \{(x,t) : x \in G,\, t = T\}, \quad D_0 = \{(x,t) : x \in G,\, t = 0\},$$

правая часть уравнения

$$f(x,t;u) = F(x,t, \int_{G_t} u(x,\tau)\, dxd\tau),$$

Филатов Олег Павлович (filatov_oleg@samaradom.ru), кафедра уравнений математической физики, Самарский государственный университет, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.