УДК 517.956

А.Е. Савенкова[1]

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ С ДИНАМИЧЕСКИМ НЕЛОКАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В статье рассмотрена краевая задача для гиперболического уравнения с частными производными с динамическим нелокальным условием второго рода. Появление динамического условия может быть обусловлено наличием некоего демпфирующего устройства. Доказано существование единственного обобщенного решения исследуемой задачи в заданной цилиндрической области. Получены некоторые ограничения на входные данные. Единственность обобщенного решения доказана с помощью полученных в работе априорных оценок. Для доказательства существования обобщенного решения методом Галеркина построена последовательность приближенных решений. Для завершения доказательства применены теоремы вложения.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение, динамические нелокальные условия, нелокальные условия второго рода, интегральные условия, обобщенное решение, метод Галеркина, демпфирующее устройство, динамические краевые условия.

1. Предварительные сведения

Задачи с нелокальными условиями для уравнений с частными производными привлекают внимание многих математиков. К настоящему времени опубликовано значительное количество работ, посвященных этой тематике. Особый интерес вызывают задачи с нелокальными интегральными условиями, интенсивное изучение которых началось с работ Дж. Р. Кэннона [1] и Л.И. Камынина [2]. В этих работах рассматривались нелокальные задачи для параболических уравнений. Не менее интересными, но более трудными оказались нелокальные задачи для гиперболических уравнений. Отметим здесь работы, посвященные задачам с интегральными условиями различных видов для гиперболических уравнений [3–7].

В настоящей работе рассматривается задача с нелокальным условием второго рода, содержащим производную первого порядка по переменной времени. Такие условия называют динамическими. Присутствие первой производной по времени может быть обусловлено наличием некоего демпфирующего устройства. Простейший пример задачи с динамическим краевым условием приведен в [8], в которой

Савенкова Алеся Евгеньевна (alesya.savenkova@mail.ru), кафедра уравнений математической физики, Самарский государственный университет, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

роль демпфера играет пластинка, плоскость которой перпендикулярна оси колеблющегося тела, вследствие чего нужно учитывать сопротивление среды.

2. Основные результаты

Постановка задачи В цилиндрической области $Q_T = \Omega \times (0, T)$, где $\Omega-$ ограниченная область в R^n с гладкой границей $\partial\Omega$, рассмотрим уравнение

$$u_{tt}(x,t) - (a_{ij}u_{x_i}(x,t))_{x_j} + c(x,t)u(x,t) = f(x,t) \tag{2.1}$$

и поставим для него следующую задачу: найти в Q_T решение уравнения (2.1), удовлетворяющее условиям:

$$u(x,0) = 0, u_t(x,0) = 0, \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial N} + \alpha \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \int\limits_{\Omega} K(x,y,t)u(y,t)dy = 0, \tag{2.3}$$

где $\frac{\partial u}{\partial N} = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}u_{x_i}\cos(\nu, x_j)$, $\nu = (\nu_1, ..., \nu_n)$ — вектор внешней нормали в текущей точке $S_T = \partial\Omega \times (0, T)$, α — положительное число, функция $K(x, y, t)$ задана на $\bar{\Omega} \times \bar{Q}_T$.

Обозначим $\hat{W}_2^1(Q_T) = \{v : v \in W_2^1(Q_T), \quad v(x,T) = 0\}$.

Введем понятие обобщенного решения задачи (2.1)–(2.3). Следуя известной процедуре [9, с. 93], получим для $u \in W_2^1(Q_T)$, $\quad v \in \hat{W}_2^1(Q_T)$ равенство

$$\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega}(-u_tv_t + a_{ij}u_{x_i}v_{x_j} + cuv)dxdt + \int\limits_0^T\int\limits_{\partial\Omega}\alpha\frac{\partial u}{\partial t}vdsdt+$$

$$+\int_0^T\int\limits_{\partial\Omega}v(x,t)\int\limits_{\Omega}K(x,y,t)u(y,t)dydsdt = \int\limits_0^T\int\limits_{\Omega}f(x,t)v(x,t)dxdt. \tag{2.4}$$

Определение. Обобщенным решением задачи (2.1)–(2.3) будем называть функцию $u \in W_2^1(Q_T)$, удовлетворяющую условию $u(x,0) = 0$ и тождеству (2.4) для всех $v \in \hat{W}_2^1(Q_T)$.

Теорема. Пусть выполняются следующие условия:

$$a_{ij} \in C(Q_T), a_{ijt} \in C(Q_T), a_{ij} = a_{ji}, \mu\xi^2 a_{ij}\xi_i\xi_j \leqslant \nu\xi^2,$$
$$K(x,y,t) \in C(\bar{\Omega} \times \bar{Q}_T), K_t(x,y,t) \in C(\bar{\Omega} \times \bar{Q}_T),$$
$$c \in C(\bar{Q}_T), c_t \in C(\bar{Q}_T), f \in L_2(Q_T).$$

Тогда существует единственное обобщенное решение задачи (2.1)–(2.3).

Доказательство. Единственность обобщенного решения докажем, как обычно, от противного. Предположим, что существует два различных решения u_1, u_2, задачи (2.1)–(2.3). Тогда их разность, $u = u_1 - u_2$, удовлетворяет условиям $u(x,0) = 0, u_t(x,0) = 0$ и тождеству (2.4). Выберем в (2.4) функцию $v(x,t)$ следующим образом:

$$v(x,t) = \int\limits_{\tau}^{t} u(x,\eta)d\eta, \;\; 0 \leqslant t \leqslant \tau, \quad v(x,t) = 0, \;\; \tau \leqslant t \leqslant T$$

и проделаем некоторые преобразования в (2.4), интегрируя по частям, которые приведут нас к равенству

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}[u^2(x,\tau)+a_{ij}v_{x_i}(x,0)v_{x_i}(x,0)]dx=-\frac{1}{2}\int_0^\tau\int\limits_{\Omega}\frac{\partial a_{ij}}{\partial t}v_{x_i}(x,t)v_{x_j}(x,t)dtdx+$$

$$+\int\limits_0^\tau\int\limits_{\Omega}c(x,t)v(x,t)v_t(x,t)dxdt-\int\limits_0^\tau\int\limits_{\partial\Omega}\alpha\frac{\partial u}{\partial t}v(x,t)dsdt+$$

$$+\int\limits_0^\tau\int_{\partial\Omega}v(x,t)\int\limits_{\Omega}K(x,y,t)u(y,t)dydsdt. \tag{2.5}$$

Интегрируя третье слагаемое правой части по частям и учитывая, что $v_t(x,t)=$ $=u(x,t)$, получим

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}[u^2(x,\tau)+a_{ij}v_{x_i}(x,0)v_{x_i}(x,0)]dx+\int\limits_0^\tau\int\limits_{\partial\Omega}\alpha u^2(x,t)dsdt=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\limits_0^\tau\int\limits_{\Omega}\frac{\partial a_{ij}}{\partial t}v_{x_i}(x,t)v_{x_j}(x,t)dtdx+$$

$$+\int\limits_0^\tau\int_{\Omega}c(x,t)v(x,t)v_t(x,t)dxdt+\int_0^\tau\int\limits_{\partial\Omega}v(x,t)\int\limits_{\Omega}K(x,y,t)u(y,t)dydsdt. \tag{2.6}$$

Следующий этап доказательства состоит в получении оценки. Заметим, что в силу условий теоремы существуют такие числа $\bar{a}>0, c_0>0K_0>0$, что

$$max_{\bar{Q_T}}|\frac{\partial a_{ij}}{\partial t}|\leqslant\bar{a},$$

$$max_{\bar{Q_T}}|c(x,t)|\leqslant c_0,$$

$$K_0=max_{\bar{Q_T}}\int_{\Omega}K^2(x,y,t)dy.$$

Оценим слагаемые в правой части (2.6):

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^\tau\int\limits_{\Omega}\frac{\partial a_{ij}}{\partial t}v_{x_i}(x,t)v_{x_j}(x,t)dtdx\leqslant\frac{1}{2}\bar{a}\int\limits_0^\tau\int_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{n}v_{x_i}v_{x_j}dxdt\leqslant$$

$$\leqslant\bar{a}\int\limits_0^\tau\int_{\Omega}v_x^2dxdt.$$

Для оценки второго слагаемого воспользуемся неравенством Коши — Буняковского

$$|\int\limits_0^\tau\int\limits_{\Omega}c(x,t)v(x,t)v_t(x,t)dxdt\,|\leqslant\frac{c_0}{2}\int\limits_0^\tau\int_{\Omega}(v^2+v_x^2)dxdt.$$

К последнему слагаемому применим неравенство Коши — Буняковского и неравенство $\int\limits_{\partial\Omega}v^2(x,t)\leqslant\int\limits_{\Omega}[\varepsilon v_x^2(x,t)+c(\varepsilon)v^2(x,t)]dx$ [9, с. 77], положив в нем $\varepsilon=1$, получим

$$|\int_0^\tau \int_{\partial\Omega} v(x,t) \int_\Omega K(x,y,t)u(y,t)dydsdt| \leqslant \frac{1}{2}\int_0^\tau \int_{\partial\Omega} v^2(x,t)dsdt+$$

$$+\int_0^\tau \int_{\partial\Omega} (\int_\Omega Kudy)^2 dsdt \leqslant c_1 \int_0^\tau \int_\Omega v_x^2 dxdt + c_2 \int_0^\tau \int_\Omega v^2 dxdt + \frac{1}{2}\omega K_0 \int_0^\tau \int_\Omega u^2 dxdt,$$

$$\omega = \int_{\partial\Omega} ds, c_2 = \frac{c_1}{4} + 1.$$

С учетом этих оценок получим неравенство

$$\frac{1}{2}\int_\Omega [u^2(x,\tau) + a_{ij}v_{x_i}(x,0)v_{x_j}(x,0)]dx + \alpha \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} u^2 dsdt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c_0 + K_0\omega}{2} \int_0^\tau \int_\Omega u^2(x,t)dxdt + (\frac{c_1}{2} + \bar{a}) \int_0^\tau \int_\Omega v_x^2(x,t)dxdt+$$

$$+(\frac{c_2 + c_0}{2} + \bar{a}) \int_0^\tau \int_\Omega v^2(x,t)dxdt. \tag{2.7}$$

Введем функцию $W_i = \int_t^0 u_{x_i} d\eta$. Тогда в силу представления функции $v(x,t)$

$$v_{x_i}(x,t) = w_(x,t) - w_i(x,\tau), v_{x_i}(x,0) = -w_i(x,\tau).$$

Заметим также, что для почти всех $x \in \Omega$

$$\int_0^\tau v^2(x,t)dt = \int_0^\tau (\int_t^\tau u(x,\eta)d\eta)^2 dt \leqslant \int_0^\tau (t-\tau) \int_t^\tau u^2(x,\eta)d\eta dt \leqslant$$

$$\leqslant \tau^2 \int_0^\tau u^2(x,t)dt.$$

Тогда неравенство (2.7) можно записать в виде

$$\frac{1}{2}\int_\Omega [u^2(x,\tau) + a_{ij}w_{x_i}(x,\tau)w_{x_j}(x,\tau)]dx + \alpha \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} u^2 dsdt \leqslant$$

$$\leqslant (1+2\bar{a})\int_0^\tau \int_\Omega \sum_{i=1}^n w_i^2(x,t)dxdt + \tau(1+2\bar{a})\int_\Omega \sum_{i=1}^n w_i^2(x,\tau)dxdt+$$

$$+\frac{2c_0 + K_0\omega + 2\bar{a} + c_2}{2} \int_0^\tau \int_\Omega u^2(x,t)dxdt.$$

Из условий теоремы следует, что $a_{ij}w_{x_i}(x,\tau)w_{x_j}(x,\tau) \geqslant \mu\Sigma_{i=1}^n \omega_i^2$. Воспользуемся произволом τ и выберем его так, чтобы $\mu - 2c_1\tau \geqslant \frac{\mu}{2}$, где $c_1 = \varepsilon + 2\bar{a}$. Тогда для $\tau \in [0, \frac{\mu}{4c_1}]$ выполняется неравенство

$$m\int_\Omega [u^2(x,\tau) + \Sigma_{i=1}^n w_i^2(x,\tau)]dx \leqslant M \int_0^\tau \int_\Omega [\sum_{i=1}^n w_i^2(x,t) + u^2(x,t)]dxdt, \tag{2.8}$$

где $m = min\{1, \frac{\mu}{2}\}, M = max\{\frac{2c_0+K_0\omega+2\bar{a}+c_2}{2}, 1+2\bar{a}\}$. Применив к (2.8) лемму Гронуолла, приходим к выводу, что $u(x,t)=0$ для $t\in[0,\frac{\mu}{4c_1}]$. Повторяя эти рассуждения для $t\in[\frac{\mu}{4c_1},\frac{\mu}{2c_1}]$, получим, что $u(x,t)=0$ и на этом промежутке. Через конечное число шагов убеждаемся в том, что задача (2.1)–(2.3) не может иметь более одного обобщенного решения.

Доказательство существования обобщенного решения задачи (2.1)–(2.3) проведем по следующей схеме: построим последовательность приближенных решений методом Галеркина, покажем, что из нее можно выделить подпоследовательность, слабо сходящуюся к обобщенному решению.

Приближеное решение задачи (2.1)–(2.3) ищем в виде

$$u^m(x,t)=\sum_{k=1}^{m}c_k(t)w_k(x),$$

где $w_k(x)$ — фундаментальная система в $W_2^1(\Omega)$ и $(w_k,w_l)_{L_2(\Omega)}=\delta_k^l$, из соотношений

$$\int\limits_{\Omega}(u^m_{tt}w_l+a_{ij}u^m_{x_i}w_{lx_j}+cu^mw_l)dx+\int\limits_{\partial\Omega}\alpha u^m_tw_lds+$$
$$+\int\limits_{\partial\Omega}w_l(x)\int\limits_{\Omega}K(x,y,t)u^m(y,t)dyds=\int\limits_{\Omega}fw_ldx, \tag{2.9}$$

которые представляют собой систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных $c_k(t)$:

$$c''_k(t)+\sum_{k=1}^{m}A_{kl}c'_k(t)+\sum_{k=1}^{m}B_{kl}c_k(t)=f_l(t), \tag{2.10}$$

где $f_l(t)=\int\limits_{\Omega}fw_ldx, A_{kl}=\alpha(t)\int\limits_{\partial\Omega}w_kw_lds,$
$B_{kl}=\int\limits_{\Omega}(a_{ij}w_{kx_i}w_{lx_j}+cw_kw_l)dx+\int\limits_{\partial\Omega}w_l(x)\int\limits_{\Omega}Kw_k(y)dyds$. Добавив к (2.10) начальные условия

$$c_k(0)=0,\quad c'_k(0)=0, \tag{2.11}$$

приходим к задаче Коши. В силу условий теоремы коэффициенты системы (2.10) суть ограниченные функции, а свободные члены $f_l\in L_1(0,T)$. Но тогда эта задача однозначно разрешима и $c''_k\in L_1(0,T)$. Для продолжения доказательства нам потребуется априорная оценка, к выводу которой мы и перейдем. Умножив (2.9) на $c'_l(t)$, просуммируем полученное равенство от 1 до m, а затем проинтегрируем по t от 0 до $\tau\in[0,T]$. Это приведет нас к равенству

$$\int\limits_0^\tau\int\limits_{\Omega}(u^m_{tt}u^m_t+a_{ij}u^m_{x_i}u^m_{x_jt}+cu^mu^m_t)dxdt+\int\limits_0^\tau\int_{\partial\Omega}\alpha((u_t)^m)^2dsdt+$$
$$+\int\limits_0^\tau\int_{\partial\Omega}{u_t}^m(x,t)\int\limits_{\Omega}Ku^m(y,t)dydsdt=\int\limits_0^\tau\int\limits_{\Omega}f{u_t}^mdxdt,$$

которое после интегрирования по частям в левой его части примет вид

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}[(u^m_t(x,\tau))^2+a_{ij}u^m_{x_i}(x,\tau)u^m_{x_j}(x,\tau)+\alpha\int\limits_0^\tau\int_{\partial\Omega}({u_t}^m(x,t))^2]dx=$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega \frac{\partial a_{ij}}{\partial t}u^m_{x_i}u^m_{x_j}dxdt - \int\limits_0^\tau\int_\Omega cu^m u^m_t dxdt - \int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega a_{ij}u^m_t dxdt -$$

$$- \int\limits_0^\tau\int_{\partial\Omega} u^m_t\int\limits_\Omega Ku^m dydsdt + \int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega fu^m_t dxdt. \qquad (2.12)$$

Оценим первое и второе слагаемые в правой части последнего равенства

$$\frac{1}{2}|\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega \frac{\partial a_{ij}}{\partial t}u^m_{x_i}u^m_{x_j}dxdt| \leqslant \bar{a}\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega (u^m_x)^2 dxdt.$$

$$|\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega cu^m u^m_t dxdt| \leqslant \frac{c_0}{2}\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega [(u^m)^2 + (u^m_t)^2]dxdt.$$

Перейдем к четвертому слагаемому равенства (2.12). Заметим, что аргумент x функции $u_t(x,t)$ принадлежит $\partial\Omega$. Для того чтобы получить оценку в нужном классе, сначала проинтегрируем это слагаемое по частям

$$-\int\limits_0^\tau\int_{\partial\Omega} u^m_t\int\limits_\Omega Ku^m dydsdt = \int\limits_0^\tau\int\limits_{\partial\Omega} u^m\int\limits_\Omega Ku^m_t dydsdt +$$

$$+\int\limits_0^\tau\int\limits_{\partial\Omega} u^m\int\limits_\Omega K_t u^m dydsdt -$$

$$-\int\limits_{\partial\Omega} u^m(x,\tau)\int\limits_\Omega K(x,y,\tau)u^m(y,\tau)dyds. \qquad (2.13)$$

Оценим слагаемые правой части равенства (2.13), применяя неравенство Коши — Буняковского

$$|\int\limits_0^\tau\int\limits_{\partial\Omega} u^m\int\limits_\Omega Ku^m_t dydsdt\ | \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_0^\tau\int_{\partial\Omega}(u^m)^2 dsdt + \frac{1}{2}\int\limits_0^\tau\int\limits_{\partial\Omega}(\int\limits_\Omega Ku^m_t dy)^2 dsdt.$$

Так как

$$\int\limits_0^\tau\int\limits_{\partial\Omega}(u^m)^2 dsdt \leqslant c\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega [(u^m_x)^2 + (u^m)^2]dxdt,$$

$$\int\limits_0^\tau\int\limits_{\partial\Omega}(\int\limits_\Omega Ku^m_t dy)^2 dsdt \leqslant K_0\omega\int\limits_0^\tau\int_\Omega (u^m_t)^2 dxdt,$$

то

$$|\int\limits_0^\tau\int\limits_{\partial\Omega} u^m\int\limits_\Omega Ku^m_t dydsdt\ | \leqslant c\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega [(u^m_x)^2 + (u^m)^2]dxdt + K_0\omega\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega (u^m_t)^2 dxdt.$$

Аналогично оценивается второй интеграл в (2.13):

$$|\int\limits_0^\tau\int\limits_{\partial\Omega} u^m\int\limits_\Omega K_t u^m dydsdt| \leqslant c\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega [(u^m_x)^2 + (u^m)^2]dxdt + K_1\omega\int\limits_0^\tau\int_\Omega (u^m_t)^2 dxdt,$$

где $K_1 = max_{\bar{Q_T}} \int_\Omega K_t^2(x,y,t)dy$. Оценим последний интеграл в (2.13)

$$|\int\limits_0^\tau \int\limits_{\partial\Omega} (\int\limits_\Omega K u_t^m dy)^2 dsdt \mid \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{\partial\Omega} (u^m(x,\tau))^2 ds + \frac{1}{2}\int\limits_{\partial\Omega}(\int\limits_\Omega K u^m(y,\tau)dy)^2 ds.$$

Заметим, что имеет место представление

$$u^m(x,\tau) = \int_0^\tau u_t^m(x,t)$$

и выполняются неравенства

$$\int\limits_{\partial\Omega} (u^m(x,\tau))^2 ds \leqslant \tau \int\limits_0^\tau \int\limits_{\partial\Omega} (u_t(x,t))^2 dsdt,$$

$$\int\limits_{\partial\Omega}(\int\limits_\Omega K u^m(y,\tau)dy)^2 ds \leqslant K_0\omega\tau \int\limits_0^\tau \int_\Omega (u_t^m)^2 dxdt,$$

из которых вытекает неравенство

$$\int\limits_\Omega [(u^m(x,\tau))^2 dx \leqslant + \int\limits_0^\tau u_t^m(x,t)dt. \tag{2.14}$$

Учитывая полученные равенства, неравенство (2.14) и условия теоремы, получим из (2.12)

$$m_1 \int\limits_\Omega [(u_t^m(x,\tau))^2 + (u_x^m(x,\tau))^2 + (u^m(x,\tau))^2]dx \leqslant$$

$$\leqslant M \int\limits_0^\tau \int_\Omega [(u_t^m(x,t))^2 + u_x^m(x,t)^2 + (u^m(x,t))^2]dxdt + \parallel f \parallel_{L_2(Q_T)}, \tag{2.15}$$

где $m_1 = min\{1, \frac{\mu}{2}\}, M = max\{2(\bar{a}+c), c_0+1\}$. Применив лемму Гронуолла, получим

$$\int\limits_\Omega [(u_t^m(x,\tau))^2 + (u_x^m(x,\tau))^2 + (u^m(x,\tau))^2]dx \leqslant M_1 e^{\frac{M\tau}{m_1}} \parallel f \parallel_{L_2(Q_T)} .$$

После интегрирования этого неравенства по τ от 0 до T получим

$$\|u^m\|_{W_2^1(Q_T)} \leqslant c_3 \parallel f \parallel_{L_2(Q_T)},$$

где c_3 => 0 и не зависит от m. Благодаря полученной оценке из последовательности $\{u^m(x,t)\}$ можно выбрать подпоследовательность, слабо сходящуюся в $\{W_2^1(Q_T)\}$ и равномерно по $t \in [0,T]$ в норме $L_2(\Omega)$ к некоторому элементу $u(x,t) \in W_2^1(Q_T)$ [9]. Покажем, что ее предел при $m \longrightarrow \infty$ и есть искомое обобщенное решение задачи (2.1)–(2.3). Умножим (2.9) на $h_i(t), h_i(t) \in C'[0,T], h_i(T) = 0$, просуммируем по i от 1 до m и проинтегрируем по t от 0 до T. Обозначим

$$h^m(x,t) = \sum_{i=1}^m h_i(t)w_i(x), \tag{2.16}$$

получим

$$\int\limits_\Omega (u_{tt}^m h^m + a_{ij}u_{x_i}^m h^m + cu^m h^m)dx + \int_{\partial\Omega} \alpha u_t^m h^m ds +$$

$$+\int\limits_{\partial\Omega} h^m \int_{\Omega} K(x,y,t)u^m(y,t)dyds = \int\limits_{\Omega} fh^m dx.$$

После интегрирования по частям слагаемых, стоящих в левой части последнего равенства, получим тождество

$$\int\limits_0^T \int_{\Omega} (-u_t h_t + a_{ij}u_{x_i}h_{x_j} + cuh)dxdt + \int\limits_0^T \int_{\partial\Omega} \alpha \frac{\partial u}{\partial t} hdsdt+$$

$$+\int\limits_0^T \int\limits_{\partial\Omega} h(x,t) \int\limits_{\Omega} K(x,y,t)u(y,t)dydsdt = \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega} f(x,t)h(x,t)dxdt. \tag{2.17}$$

В тождестве (2.17) перейдем к пределу при фиксированной функции $h(x,t)$ и получим тождество (2.4) для предельной функции $u(x,t)$. Таким образом, тождество (2.4), определяющее обобщенное решение, выполняется для всех функций вида $h^m(x,t) = \sum_{i=1}^m h_i(t)w_i(x)$. Так как множество всех таких функций плотно в $\hat{W_2^1}(Q_T)$, то тождество (2.17) выполняется для всех $v \in \hat{W}_2^1(Q_T)$, а значит, совпадает с тождеством (2.4), что и завершает доказательство теоремы.

Литература

[1] Cannon J.R. The solution of the heat equation subject to the specification of energy // Quart. Appl. Math. 1963. № 21. P. 155–160.

[2] Камынин Л.И. Об одной краевой задаче теории теплопроводности с неклас- сическими граничными условиями // Журнал вычисл. мат-ки и матем. физики. Т. 4. № 6. 1964. С. 1006–1024.

[3] Гордезиани Д.Г., Авалишвили Г.А. Решения нелокальных задач для одномерных колебаний среды // Матем. моделир. 2000. Т. 12. № 1. С. 94–103.

[4] Кожанов А.И., Пулькина Л.С. О разрешимости краевых задач с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42. № 9. С. 1166–1179.

[5] Пулькина Л.С. Нелокальная задача для гиперболического уравнения с интегральными условиями 1 рода с ядрами, зависящими от времени // Известия вузов. Сер.: Математика. 2012. № 10. С. 32–44.

[6] Пулькина Л.С. Задачи с неклассическими условиями для гиперболических уравнений. Самара: Изд-во "Самарский университет", 2012. 193 с.

[7] Дмитриев В.Б. Нелокальная задача с интегральным условием для уравнения гиперболического типа // Вестник Самар. гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. 2006. № 42. С. 35–40.

[8] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 736 с.

[9] Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.

References

[1] Cannon J.R. The solution of the heat equation subject to the specification of energy. *Quart.Appl.Math.*, 1963, no. 21, pp. 155–160.

[2] Kamynin L.I. On a boundary value problem in the theory of heat conduction with nonclassical boundary conditions. *ZhVMiMF* [Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics], Volume 4, no. 6, 1964, pp. 1006–1024 [in Russian].

[3] Gordeziani D.G., Avalishvili G.A. Solutions of nonlocal problems for one-dimensional oscillations of the medium. *Matematicheskoe modelirovanie* [Mathematical Modelling], 2000, Vol. 12, no. 1, pp. 94–103 [in Russian].

[4] Kozhanov A.I., Pul'kina L.S. On a solvability of boundary value problems with nonlocal boundary conditions of an integral type for multidimensional hyperbolic equations. *Differentsial'nye uravneniia*[Differential Equations], 2006, Vol. 42, no. 9, pp. 1166–1179 [in Russian].

[5] Pul'kina L.S. Nonlocal problem for a hyperbolic equation with integral conditions of the 1st kind with time-dependent kernels. *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Matematika* [News of Higher Educational Institutions. Mathematics], 2012, no. 10, pp. 32–44 [in Russian].

[6] Pul'kina L.S. Problems with non-classical conditions for hyperbolic equations. Samara, Izd-vo "Samarskii universtet", 2012, 193 p. [in Russian].

[7] Dmitriev V.B. Nonlocal problem with integral condition for the equation of hyperbolic type. *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [Vestnik of Samara State Technical University. Series Physico-mathematical sciences], 2006, Issue 42, pp. 35–40 [in Russian].

[8] Tikhonov A.N., Samarsky A.A. Equations of mathematical physics. M., Nauka, 1972, 736 p. [in Russian].

[9] Ladyzhenskaya O.A. Boundary-value problems of mathematical physics. M., Nauka, 1973 [in Russian].

A.E. Savenkova[2]

ON ONE PROBLEM WITH DYNAMIC NONLOCAL CONDITION FOR A HYPERBOLIC EQUATION

In this article, boundary value problem for hyperbolic partial differential equation with nonlocal data in an integral of the second kind form is considered. The emergence of dynamic conditions may be due to the presence of a damping device. Existence and uniqueness of generalized solution is proved in a given cylindrical field. There is some limitation on the input data. The uniqueness of generalized solution is proved by apriori estimates. The existence is proved by Galerkin's method and embedding theorems.

Key words:hyperbolic equation, dynamic nonlocal conditions, nonlocal condition of the second kind, integral conditions, generalized solution, Galerkin method, damping device, dynamic boundary conditions.

Статья поступила в редакцию 15/*III*/2015.

The article received 15/*III*/2015.

[2] *Savenkova Alesya Evgen'evna* (alesya.savenkova@mail.ru), Department of Equations of Mathematical Physics, Samara State University, 1, Acad. Pavlov Street, Samara, 443011, Russian Federation.