УДК 512.554

С.П. Мищенко, О.В. Шулежко[1]

О ПОЧТИ НИЛЬПОТЕНТНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ В КЛАССЕ КОММУТАТИВНЫХ МЕТАБЕЛЕВЫХ АЛГЕБР

При изучении линейных алгебр с точки зрения выполняющихся в них тождеств интерес вызывают тождественные соотношения, следствиями которых является тождество нильпотентности. Хорошо известны теорема Нагаты — Хигмана, в которой утверждается, что над полем нулевой характеристики ассоциативная алгебра с ниль условием ограниченного индекса является нильпотентной, а также результат Е.И. Зельманова о нильпотентности алгебры Ли, в которой выполняется тождество энгелевости.

Совокупность линейных алгебр, в которых выполняется фиксированный набор тождеств, следуя А.И. Мальцеву, называют многообразием, которое называется почти нильпотентным, если само оно не является нильпотентным, но каждое его собственное подмногообразие нильпотентно.

В статье в случае нулевой характеристики основного поля доказано, что для любого натурального числа m существует коммутативное метабелево почти нильпотентное многообразие, экспонента которого равна m.

Ключевые слова: линейная алгебра, многообразие алгебр, почти нильпотентное многообразие.

Введение

В статье представлены новые результаты, касающиеся почти нильпотентных многообразий линейных алгебр над полем нулевой характеристики. Ненильпотентное многообразие называется почти нильпотентным, если любое его собственное подмногообразие является нильпотентным. Единственным примером почти нильпотентного многообразия ассоциативных алгебр является многообразие всех коммутативно-ассоциативных алгебр. Размерность так называемых полилинейных частей этого многообразия равна единице, поэтому нет ничего удивительного, что любое его собственное подмногообразие является нильпотентным. В случае неассоциативных алгебр существуют множество интересных примеров почти нильпотентных многообразий. Так, в работе авторов [1] в неассоциативном случае построены

Мищенко Сергей Петрович (mishchenkosp@mail.ru), кафедра алгебро-геометрических вычислений, Ульяновский государственный университет, 432017, Российская Федерация, г. Ульяновск, ул. Льва Толстого, 42.

Шулежко Олеся Владимировна (ol.shulezhko@gmail.com), кафедра информатики, Ульяновский государственный педагогический университет им. И.Н. Ульянова, 432700, Российская Федерация, г. Ульяновск, пл. 100-летия со дня рождения В.И. Ленина, 4.

примеры почти нильпотентных многообразий со значительной размерностью полилинейных частей. Более точно построена дискретная серия почти нильпотентных многообразий различных целых экспонент.

В данной статье аналогичный результат получен в случае коммутативных метабелевых алгебр. Для любого натурального числа m построено коммутативное метабелево почти нильпотентное многообразие экспоненты m. Этот результат показывает, что наличие тождества коммутативности не гарантирует отсутствие многообразий с непривычными свойствами даже при наложении такого сильного ограничения, как метабелевость. Вообще, многообразие коммутативных алгебр содержит множество экзотических примеров поведения числовых характеристик многообразий. Например, в работе [2] построены многообразия любой действительной экспоненты и континуальное семейство многообразий с различными промежуточными ростами. Однако появились и обнадеживающие результаты. Так, в работе [3] анонсировано полное описание коммутативных метабелевых почти нильпотентных многообразий, рост которых ниже экспоненциального, то есть рост которых является или полиномиальным, или промежуточным. Оказалось, что таких многообразий ровно два. Одно из них порождено известной йордановой алгеброй Шестакова (см. [4, пример 2, с. 104]). Второе коммутативное метабелево почти нильпотентное многообразие порождено однопорожденной алгеброй с образующей a и следующими определяющими соотношениями: $uv = 0$, $ua = au$ где u, v – неассоциативные слова данной алгебры, длины больше единицы.

Отметим, что подробную информацию о почти нильпотентных многообразиях в различных классах линейных алгебр можно найти в обзоре [5].

1. Предварительные сведения

Основное поле обозначим Φ и будем предполагать, что его характеристика равна нулю. Все неопределяемые понятия можно найти в монографии [6]. Пусть $\mathbf{V}$ — некоторое многообразие линейных алгебр, а $P_n(\mathbf{V})$ — множество полилинейных элементов относительно свободной алгебры этого многообразия степени n от свободных образующих $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Хорошо известно, что в случае нулевой характеристики основного поля любое тождество эквивалентно некоторой системе полилинейных тождеств, поэтому исследование строения полилинейных частей относительно свободной алгебры многообразия дает полную информацию о многообразии. Множество $P_n(\mathbf{V})$ можно превратить в модуль групповой алгебры симметрической группы ΦS_n, действуя перестановками на индексах образующих. Строение модуля $P_n(\mathbf{V})$ можно представить на "языке характеров"

$$\chi_n(\mathbf{V}) = \chi(P_n(\mathbf{V})) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda(\mathbf{V})\chi_\lambda,$$

где $m_\lambda(\mathbf{V})$ — кратность неприводимого характера χ_λ, отвечающего разбиению $\lambda \vdash n$.

Коразмерностью степени n многообразия $\mathbf{V}$ называют размерность $c_n(\mathbf{V}) = \dim(P_n(\mathbf{V}))$ пространства $P_n(\mathbf{V})$. Если последовательность $c_n(\mathbf{V})$ мажорируется экспонентой a^n для подходящего действительного числа a, то существуют пределы

$$\underline{\mathrm{EXP}}(\mathbf{V}) = \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(\mathbf{V})}, \qquad \overline{\mathrm{EXP}}(\mathbf{V}) = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(\mathbf{V})},$$

которые называют нижней и верхней экспонентой многообразия $\mathbf{V}$. Если $\underline{\mathrm{EXP}}(\mathbf{V}) = \overline{\mathrm{EXP}}(\mathbf{V}) = \alpha$, то число α называют экспонентой многообразия $\mathbf{V}$ и обозначают EXP($\mathbf{V}$). Рост многообразия определяется ростом последовательности коразмерностей (c_n), $n = 1, 2, \ldots$. Говорят, что рост многообразия не выше полиномиального, если существуют неотрицательные числа α, β, что для любого n выполняется неравенство $c_n(\mathbf{V}) < \alpha n^\beta$. В случае существования таких чисел $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, \beta_1 > 1, \beta_2 > 1$, что для всех натуральных n выполняются неравенства

$$\alpha_1 \beta_1^n < c_n(\mathbf{V}) < \alpha_2 \beta_2^n,$$

говорят, что рост многообразия является экспоненциальным. В случае, когда последовательность чисел $c_n(\mathbf{V})$ нельзя ограничить никаким полиномом, но можно ограничить любой экспонентой, то есть для любого $\beta > 1$ существует такое число N, что для любого $n \geqslant N$ выполняется неравенство $c_n(\mathbf{V}) < \beta^n$, то говорят, что рост многообразия $\mathbf{V}$ является промежуточным между полиномиальным и экспоненциальным. Назовем рост многообразия $\mathbf{V}$ подэкспоненциальным, если выполняется только последнее условие, то есть для любого $\beta > 1$ существует такое число N, что для любого $n \geqslant N$ выполняется неравенство $c_n(\mathbf{V}) < \beta^n$.

По аналогии со случаем алгебр Ли будем называть алгебру метабелевой, если в ней выполнено тождество

$$(x_1x_2)(x_3x_4) \equiv 0. \tag{1}$$

Обратим ваше внимание, что мы используем вместо обыкновенного равенства тройной знак равенства в случае записи тождественных соотношений.

Так как ассоциативность не предполагается, то в произведениях необходимо следить за расстановками скобок. Договоримся опускать скобки в случае их левонормированной расстановки, то есть, например, писать просто $abcd$ вместо $((ab)c)d$. Обозначим через R_a оператор умножения справа на элемент a и будем писать $bR_a = ba$. Это обозначение оказывается удобным, можно записывать ассоциативные слова от линейных операторов правого умножения. Например, левонормированное произведение $ba \ldots a$ степени $k+1$ нельзя записать как ba^k, но можно записать как bR_a^k. В случае правого умножения на образующую относительно свободной алгебры многообразия будем использовать для обозначения соответствующего оператора также просто заглавные буквы, например $X_i = R_{x_i}$.

2. Конструкции алгебр и основные результаты

В статье [1] для любого натурального $m \geqslant 2$ определена неассоциативная линейная алгебра A_m, которая порождается образующими $\{z, a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ и удовлетворяет следующим определяющим соотношениям:

$$a_i a_j = a_i z = 0, \ 1 \leqslant i, j \leqslant m;$$

$$(zw(R_{a_1}, \ldots, R_{a_m}))(zw'(R_{a_1}, \ldots, R_{a_m})) = 0$$

для всех, включая пустые, ассоциативных слов w, w' от операторов R_{a_i};

$$z(R_{a_1} \ldots R_{a_m})^k a_{i_1} \ldots a_{i_s} a_{i_{s+1}} \ldots a_{i_t} + z(R_{a_1} \ldots R_{a_m})^k a_{i_1} \ldots a_{i_{s+1}} a_{i_s} \ldots a_{i_t} = 0$$

для всех $k \geqslant 0$ и $1 \leqslant s < t \leqslant m$, $1 \leqslant i_1, \ldots, i_t \leqslant m$.

Следуя упомянутой статье, многообразие, порожденное ею, обозначим $\mathbf{U_m}$. Пусть $Q_n(\mathbf{U_m}) = \mathrm{span}\{x_0 x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)} | \sigma \in S_n\}$ — пространство полилинейных левонормированных элементов относительно свободной алгебры многообразия $\mathbf{U_m}$. Симметрическая группа S_n действует на $Q_n(\mathbf{U_m})$ перестановкой образующих

$x_1, \ldots, x_n$, оставляя на месте образующую x_0, задавая структуру S_n-модуля. Соответствующий характер раскладывается на неприводимые S_n-характеры

$$\chi_n^Q((\mathbf{U_m})) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda^Q(\mathbf{U_m})\chi_\lambda, \tag{2}$$

где $m_\lambda^Q(\mathbf{U_m})$ кратность неприводимого характера χ_λ в $\chi_n^Q(\mathbf{U_m})$, а сумма берется по разбиениям λ числа n.

Сформулируем некоторые результаты, полученные в [1] (см. предложения 1 и 3), в виде одного утверждения.

Предложение. *Алгебра A_m удовлетворяет тождествам $x_1(x_2x_3) \equiv 0$ и $x_0xxx \equiv 0$, а также тождеству $x_0xxz_1 \cdots z_syy \equiv 0$, в котором остаток при делении s на m отличен от $m-2$. Если в (2) $m_\lambda^Q(\mathbf{U_m}) \neq 0$, то выполняется неравенство $n - m \cdot \lambda_m < 4m$. Кроме того, существует константа C, не зависящая от n, что для кратностей в сумме (2) выполняется неравенство $m_\lambda^Q(\mathbf{U_m}) \leqslant C$.*

Модифицируем определение алгебры с целью, чтобы она была коммутативной и в ней вместо тождества левой нильпотентности ступени два $x(yz) \equiv 0$ выполнялось тождество метабелевости (1). Будем использовать те же самые обозначения для образующих, чтобы подчеркнуть сходство свойств алгебр. Обозначим B_m, $m \geqslant 2$, алгебру, порожденную образующими $\{z, a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ и удовлетворяющую следующим определяющим соотношениям:

$$a_ia_j = a_iz = za_i = 0,\ 1 \leqslant i,j \leqslant m;\ \ z^2z = zz^2 = 0;$$

$$(z^2w(R_{a_1}, \ldots, R_{a_m}))(z^2w'(R_{a_1}, \ldots, R_{a_m})) = 0,$$

для всех, включая пустых, слов w, w' от операторов правого умножения R_{a_i}. Кроме того, $ua_k = a_ku$, $1 \leqslant k \leqslant m$, для любого элемента $u \in B_m$ степени по образующим не менее двух и

$$z^2(R_{a_1} \ldots R_{a_m})^k a_{i_1} \ldots a_{i_s}a_{i_{s+1}} \ldots a_{i_t} + z^2(R_{a_1} \ldots R_{a_m})^k a_{i_1} \ldots a_{i_{s+1}}a_{i_s} \ldots a_{i_t} = 0$$

для всех $k \geqslant 0$ и $1 \leqslant s < t \leqslant m$, $1 \leqslant i_1, \ldots, i_t \leqslant m$.

Отметим, что единственным ненулевым элементом степени два относительно образующих является z^2. Алгебра B_m удовлетворяет тождеству коммутативности и тождеству метабелевости (1). Из этих тождеств получаем, что любой элемент относительно свободной алгебры может быть записан как линейная комбинация левонормированных мономов, причем слева расположен z^2, а далее слева направо a_i, $1 \leqslant i \leqslant m$. В алгебре B_m выполняются следующие тождественные соотношения:

$$y_1y_2xxx \equiv 0, \quad y_1y_2xxz_1 \cdots z_syy \equiv 0,$$

где натуральное число s имеет остаток при делении на m отличный от $m-2$. Доказательство проводится непосредственными вычислениями и практически дословно повторяет доказательство предложения 1 работы [1], надо только вместо образующей x_0 подставить пару y_1y_2. Частичная линеаризация, примененная к выписанным тождествам, позволяет получить такие следствия:

$$y_1y_2x_1xx_1 \equiv -y_1y_2x_1x_1x - y_1y_2xx_1x_1; \tag{3}$$

$$y_1y_2x_1xwyy_1 \equiv -y_1y_2xx_1wyy_1 - y_1y_2x_1xwy_1y - y_1y_2xx_1wy_1y, \tag{4}$$

где $w = Z_1 \ldots Z_s$ и остаток при делении s на m отличен от $m-2$. Кроме того следствиями из полученных тождеств являются также еще и такие тождества

$$y_1y_2X^2wyy_1 \equiv -y_1y_2X^2wy_1y, \ \ y_1y_2x_1xwY^2 \equiv -y_1y_2xx_1wY^2. \tag{5}$$

Пусть $\mathbf{V_m}$ – многообразие, порожденное алгеброй B_m, а $T_n(\mathbf{V_m}) = \operatorname{span}\{y_1y_2x_{\sigma(1)}\cdots x_{\sigma(n)}|\sigma \in S_n\}$ — пространство полилинейных левонормированных элементов относительно свободной алгебры многообразия $\mathbf{V_m}$. Как всегда симметрическая группа S_n действует на $T_n(\mathbf{V_m})$ перестановкой образующих $x_1,\ldots,x_n$, оставляя на месте образующие y_1 и y_2, задавая структуру S_n-модуля. Соответствующий характер раскладывается на неприводимые S_n-характеры

$$\chi_n^T((\mathbf{V_m})) = \sum_{\lambda\vdash n} m_\lambda^T(\mathbf{V_m})\chi_\lambda, \tag{6}$$

где $m_\lambda^T(\mathbf{V_m})$ — кратность неприводимого характера χ_λ в $\chi_n^T(\mathbf{V_m})$, а сумма берется по разбиениям λ числа n.

Из определение алгебр A_m и B_m видно, что модули $Q_n(\mathbf{U_m})$ и $T_n(\mathbf{V_m})$ изоморфны, поэтому из сформулированного предложения получаем следующую теорему.

Теорема 1. Если в (6) $m_\lambda^T(\mathbf{V_m}) \neq 0$, то выполняется неравенство

$$n - m\cdot\lambda_m < 4m.$$

Существует константа C, не зависящая от n, что для кратностей в сумме (6) выполняется неравенство $m_\lambda^T(\mathbf{V_m}) \leqslant C$.

Поясним основные моменты доказательства, опуская технические детали, которые можно восстановить из работы [1], заменяя образующую x_0 на пару y_1y_2. Пусть $w = w(X_1,\ldots,X_m)$ ассоциативный одночлен, для которого выполняется следующее условие:

$$\deg\ \ w - min\{\deg_{X_1} w,\ldots,\deg_{X_m} w\}\cdot m \geqslant 4m.$$

Оказывается, что тогда $y_1y_2w(X_1,\ldots,X_m)\equiv 0$ является тождеством алгебры B_m. Сначала утверждение доказывается в частном случае, когда слово w зависит не от всех X_i, причем в этом случае достаточно, чтобы выполнялось неравенство $\deg\ \ w \geqslant 2m$. В случае, если слово w зависит от всех m образующих, то тождества (3), (4), (5) позволяют переписать любой элемент в виде, когда один из операторов X_s входит в квадрате, а далее в виде

$$x_0w'(X_1X_2\ldots X_m)^{r_1}(X_1\ldots\widehat{X_s}\ldots X_mX_s^2X_1\ldots\widehat{X_s}\ldots X_m)(X_1X_2\ldots X_m)^{r_2}w'',$$

где домиком обозначены отсутствующие сомножители, причем слова w', w'' не содержат все m букв, а следовательно либо $\deg w' \geqslant 2m$, либо $\deg w'' \geqslant 2m$. Поэтому равенство нулю получается в силу рассмотренного частного случая.

Сформулируем основной результат работы.

Теорема 2. В случае нулевой характеристики основного поля для любого целого m, $m\geqslant 2$, существует почти нильпотентное коммутативное метабелево многообразие экспоненты m.

Доказательство. Из теоремы 1 следует, что в разложении характера $\chi_n^T(\mathbf{V_m})$ с ненулевыми кратностями присутствуют только неприводимые характеры χ_λ, соответствующие диаграммам Юнга, у которых вне прямоугольника размером $m\times$ $\times\,\lambda_m$ расположено менее $4m$ клеток. Так как модуль $P_{n+2}(\mathbf{V_m})$ индуцирован с ΦS_n-модуля $Q_n(\mathbf{V_m})$, в котором образующие y_1, y_2 заменим на x_{n+1}, x_{n+2} соответственно, то из теории представлений симметрической группы следует, что все неприводимые его подмодули соответствуют диаграммам Юнга, у которых вне прямоугольника размером $m\times\lambda_m$ расположено не более $4m+1$ клеток. Понятно, что такое же утверждение верно и для любого ненильпотентного подмногообразия многообразия $\mathbf{V_m}$. Хорошо известно и несложно доказать, использую формулу крюков и формулу Стирлинга, что размерности d_λ таких неприводимых модулей удовлетворяют неравенствам

$$\frac{1}{a(n)} \cdot m^n \leqslant d_\lambda \leqslant b(n) \cdot m^n,$$

где $a(t)$ и $b(t)$ — фиксированные многочлены. Напомним, что кратности ограничены константой, не зависящей от n. Поясним также, что число ненулевых кратностей также ограничено константой, так как вне фиксированного прямоугольника у соответствующих диаграмм Юнга расположено не более $4m+1$ клеток. Поэтому, используя элементарные соображения математического анализа, получаем, что экспонента самого многообразия $\mathbf{V_m}$, а также любого его собственного ненильпотентного подмногообразия равна m. Осталось заметить, что согласно результату работы [7] в любом ненильпотентном многообразии существует почти нильпотентное подмногообразие.

Теорема 2 доказана.

В дополнении к представленному доказательству приведем еще такие соображения. Рассмотрим пространство $P_{n+2}(\mathbf{V_m})$, элементы которого будем записывать в виде левонормированных произведений. Тогда его подпространство $W_{i,j}$, которое порождается полилинейными левонормированными элементами вида $x_i x_j x_{k_1} \dots x_{k_n}$, изоморфно пространству $T_n(\mathbf{V_m})$. Пространство $P_{n+2}(\mathbf{V_m})$ равно сумме своих подпространств $W_{i,j}$ для всевозможных i, j, причем из-за коммутативности мы можем предполагать, что $i > j$. В силу сказанного получаем следующие неравенства:

$$\dim T_n(\mathbf{V_m}) \leqslant \dim P_{n+2}(\mathbf{V_m}) \leqslant \frac{(n+2)(n+1)}{2} \dim T_n(\mathbf{V_m}),$$

где множитель в правой части равен числу сочетаний $\binom{n+2}{2}$ и обусловлен выбором двух индексов i, j из множества $\{1, 2, \dots, n+2\}$. Более того, подстановка элемента $z \in B_m$ вместо левых двух образующих в рассматриваемую линейную комбинацию левонормированных элементов пространства $P_{n+2}(\mathbf{V_m})$ позволяет доказать, что сумма является прямой. Таким образом, получаем следующее равенство:

$$\dim P_{n+2}(\mathbf{V_m}) = \frac{(n+2)(n+1)}{2} \dim T_n(\mathbf{V_m}).$$

В заключение отметим, что аналогичные результаты могут быть получены также в классе антикоммутативных алгебр. Например, описание антикоммутативных метабелевых почти нильпотентных многообразий, рост которых является подэкспоненциальным, анонсировано авторами в [8].

Литература

[1] Мищенко С.П., Шулежко О.В. Почти нильпотентные многообразия любой целой экспоненты // Вестник Московского университета. Сер.: 1. Математика. Механика. 2015. № 2. С. 53–57.

[2] Мищенко С.С. О росте многообразий коммутативных линейных алгебр // Фундаментальная и прикладная математика. 2008. Т. 14. № 5. С. 165–170.

[3] Чанг Н.Т.К, Фролова Ю.Ю. Почти нильпотентные коммутативные метабелевы многообразия рост которых не выше экспоненциального // Мальцевские чтения: тез. докладов междунар. конф. (Новосибирск, 10-13 ноября 2014 г.) Новосибирск. 2014. С. 113. URL: http://www.math.nsc.ru/conference/malmeet/14/Malmeet2014.pdf (дата обращения: 09.03.2015)

[4] Кольца, близкие к ассоциативным / А.И. Ширшов [и др.]. М.: Наука, 1978. 432 с.

[5] Шулежко О. В. О почти нильпотентных многообразиях в различных классах линейных алгебр // Чебышевский сборник. 2015. Т. 16. № 1(53). С. 67–88.

[6] Giambruno A., Zaicev M.V. Polynomail identities and Asymptotic Methods // American Mathematical Society, Providence, RI: Mathematical Surveys and Monographs. 2005. V. 122. P. 352.

[7] Mishchenko S., Valenti A. An almost nilpotent variety of exponent 2 // Israel Journal of Mathematics. 2014. V. 199. № 1. P. 241–257.

[8] Мищенко С.П., Шулежко О.В. Описание почти нильпотентных антикоммутативных метабелевых многообразий с подэкспоненциальным ростом // Мальцевские чтения: тез. докладов междунар. конф. (Новосибирск, 10-13 ноября 2014 г.) Новосибирск. 2014. С. 110. URL: http://www.math.nsc.ru/conference/malmeet/14/Malmeet2014.pdf (дата обращения: 09.03.2015)

References

[1] Mishchenko S.P., Shulezhko O.V. An almost nilpotent variety of any integer exponent. *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seriia 1. Matematika. Mekhanika* [Vestnik of Moscow University. Series 1. Mathematics. Mechanics], 2015, no. 2, pp. 53–57 [in Russian].

[2] Mishchenko S.S. On growth of varieties of commutative linear algebras. *Fundamental'naia i prikladnaia matematika* [Fundamental and Applied Mathematics], 2008, Vol. 14, no. 5, pp. 165–170 [in Russian].

[3] Chang N.T.K., Frolova Yu.Yu. Almost commutative metabelian nilpotent varieties growth not higher than exponential. *Mezhdunarodnaia konferentsiia Mal'tsevskie chteniia: tezisy dokladov. (Novosibirsk, 10-13 noiabria 2014 g.)* [International Conference Mal'tsev Readings: scientific conference abstracts (Novosibirsk, 10-13 November, 2014)]. Novosibirsk, 2014, p. 119. Retrieved from: http://www.math.nsc.ru/conference/malmeet/14/Malmeet2014.pdf [in Russian].

[4] Shirshov A.I.(et al.). Rings that are nearly associative. M., Nauka, 1978, 432 p. [in Russian].

[5] Shulezhko O.V. About almost nilpotent varieties in different classes of linear algebra. *Chebyshevskii sbornik* [Chebyshev collection], 2015, Vol. 16, no. 1(53), pp. 67–88 [in Russian].

[6] Giambruno A., Zaicev M.V. Polynomail identities and Asymptotic Methods. American Mathematical Society, Providence, RI: Mathematical Surveys and Monographs, 2005, Vol. 122, 352 p.

[7] Mishchenko S., Valenti A. An almost nilpotent variety of exponent 2. Israel Journal of Mathematics, 2014, Vol. 199, no. 1, pp. 241–257.

[8] Mishchenko S.P., Shulezhko O.V. Description almost nilpotent anticommutative metabelian varieties with subexponential growth. *Mezhdunarodnaia konferentsiia Mal'tsevskie chteniia: tezisy dokladov. (Novosibirsk, 10-13 noiabria 2014 g.)* [International Conference Mal'tsev Readings: scientific conference abstracts (Novosibirsk, 10-13 November, 2014)]. Novosibirsk, 2014, p. 110. Retrieved from: http://www.math.nsc.ru/conference/malmeet/14/Malmeet2014.pdf [in Russian].

S.P. Mishchenko, O.V. Shulezhko[2]

ON ALMOST NILPOTENT VARIETIES IN THE CLASS OF COMMUTATIVE METABELIAN ALGEBRAS

A well founded way of researching the linear algebra is the study of it using the identities, consequences of which is the identity of nilpotent. We know the Nagata-Higman's theorem that says that associative algebra with nil condition of limited index over a field of zero characteristic is nilpotent. It is well known the result of E.I.Zel'manov about nilpotent algebra with Engel identity. A set of linear algebras where a fixed set of identities takes place, following A.I. Maltsev, is called a variety. The variety is called almost nilpotent if it is not nilpotent, but each its own subvariety is nilpotent. Here in the case of the main field with zero characteristic, we proved that for any positive integer m there exist commutative metabelian almost nilpotent variety of exponent is equal to m.

Key words: linear algebra, variety of algebras, almost nilpotent variety.

Статья поступила в редакцию 11/*III*/2015.

The article received 11/*III*/2015.

[2] *Mishchenko Sergey Petrovich* (mishchenkosp@mail.ru), Department of Algebraic and Geometric Computations, Ulyanovsk State University, 42, Lev Tolstoy Street, Ulyanovsk, 432017, Russian Federation.

Shulezhko Olesia Vladimirovna (ol.shulezhko@gmail.com), Department of Informatics, Ulyanovsk State Pedagogical University named after I.N. Ulyanov, 4, Square of 100 from the date of birth of V.I. Lenin, Ulyanovsk, 432700, Russian Federation.