*МАТЕМАТИКА*

УДК 517.95, 624.07

***А.Б. Бейлин, Л.С. Пулькина***[1]

# ЗАДАЧА О КОЛЕБАНИЯХ СТЕРЖНЯ С НЕЛИНЕЙНЫМ ЗАТУХАНИЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В статье рассматривается начально-краевая задача с динамическим нелинейным граничным условием для псевдогиперболического уравнения. Она представляет собой математическую модель одномерных продольных колебаний короткого толстого стержня, называемую стержнем Рэлея, с нелинейным затуханием второго порядка. Доказаны существование и единственность обобщенного решения. Доказательство базируется на полученных в работе априорных оценках и методе Галеркина. Предложенный способ доказательства существования решения позволяет построить приближенные решения задачи в форме, удобной для практического применения.

**Ключевые слова:** динамические граничные условия, нелинейное затухание, псевдогиперболическое уравнение, обобщенное решение, стержень Рэлея.

## Введение

Математическое моделирование процессов колебания играет важную роль в технике. Колебательные процессы, возникающие в механической системе машин и механизмов, могут порождаться многими причинами и приводить к различным последствиям, не всегда желательным. Наличие в механизме источников колебательных процессов может привести к нарушению режима его работы, а в некоторых случаях и к разрушению. Одним из способов уменьшить нежелательные эффекты колебаний является демпфирование, которое конструктивно может быть выполнено разными способами.

Проблемы, связанные с нарушением работоспособности механических систем в результате вибрации некоторых их элементов, приводят к необходимости теоретического изучения процессов колебания этих элементов. Описание распространения волн в относительно длинных и тонких твердых стержнях базируется на математической модели, в основе которой лежит волновое уравнение второго порядка. Краевые задачи для одномерного волнового уравнения хорошо изучены и давно


*Бейлин Александр Борисович* (abeilin@mail.ru), кафедра АСиИС, Самарский государственный технический университет, 443010, Российская Федерация, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 133.

*Пулькина Людмила Степановна* (louise@samdiff.ru), кафедра уравнений математической физики, Самарский государственный университет, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

стали классикой [1]. Однако многие детали реальных механизмов можно интерпретировать именно как короткий и толстый стержень, а как показано Рэлеем [2, т. I, с. 273–274], эта модель, в основе которой лежит волновое уравнение второго порядка, недостаточно эффективна при изучении продольных колебаний толстого и короткого стержня, так как не учитывает некоторых специфических особенностей этого процесса. Для более точного анализа продольных колебаний в этом случае следует учитывать деформации стержня и в поперечном направлении. Математическая модель продольных колебаний толстого короткого стержня, в которой учтены эффекты поперечного движения стержня, называется стержнем Рэлея и базируется на псевдогиперболическом уравнении четвертого порядка. Исследования начально-краевых задач для псевдогиперболического уравнения в связи с изучением колебаний стержня проводились рядом авторов. В [3] рассмотрена задача для псевдогиперболического уравнения с динамическими граничными условиями, возникающими вследствие закрепления концов стержня при помощи распределенных масс и пружин, и изучены важные частные случаи с особым вниманием к свойствам собственных функций. В [4] эта задача исследована в общем случае и получены условия однозначной разрешимости. В обеих статьях была рассмотрена линейная модель.

Для более детального исследования процесса колебаний толстого короткого стержня следует учесть возможность возникновения внутренних сил, действия которых могут сказываться на величине смещения в точках внешней границы. Будем также считать, что один конец стержня жестко закреплен, а другой закреплен при помощи демпферного устройства.

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим продольные колебания толстого короткого стержня, представляющего собой тело вращения относительно оси $Ox$, которые возбуждаются распределенной силой $f(x,t)$ и прикреплены к неподвижным стенкам упруго. Будем считать, что левый конец жестко закреплен, а правый конец закреплен упруго и испытывает сопротивление среды вследствие наличия демпферного устройства.

Продольные смещения, подлежащие определению, обозначим $u(x,t)$. Введем еще некоторые обозначения: $A(x)$ — площадь поперечного сечения, $\rho(x)$ — массовая плотность стержня, $E(x)$ — модуль Юнга, $\nu(x)$ — коэффициент Пуассона, $I_p(x)$ — полярный момент инерции.

В монографии [5, с. 158–184] построен Лагранжиан модели стержня Рэлея, применение к которому вариационного принципа Гамильтона приводит после элементарных преобразований к уравнению

$$\sigma(x)\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(a(x)\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(b(x)\frac{\partial^3\tilde{u}}{\partial t^2\partial x}\right) = f(x,t), \tag{1.1}$$

где обозначено

$$\sigma(x) = \rho(x)A(x), \quad a(x) = A(x)E(x), \quad b(x) = \rho(x)\nu^2(x)I_p(x).$$

Краевая задача для этого уравнения в случае закрепления концов стержня при помощи сосредоточенных масс и пружин рассмотрена в [3] и [4]. Такой способ закрепления в предположении линейности можно математически описать граничными условиями

$$a(0)\tilde{u}_x(0,t) + b(0)\tilde{u}_{xxt}(0,t) - K_1\tilde{u}(0,t) - M_1\tilde{u}_{tt}(0,t) = 0,$$

$$a(l)\tilde{u}_x(l,t) + b(l)\tilde{u}_{xxt}(l,t) + K_2\tilde{u}(l,t) + M_2\tilde{u}_{tt}(l,t) = 0.$$

Мы откажемся от предположения линейности, а также будем допускать возможность возникновения внутренних сил, влияющих на поведение стержня в точках правой границы.

Пусть начальное отклонение и начальная скорость колебания стержня известны:

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x). \tag{1.2}$$

Граничные условия будут иметь вид

$$\begin{aligned} &u(0,t) = 0,\\ &a(l)\tilde{u}_x(l,t) + b(l)\tilde{u}_{xxt}(l,t) + H(u(l,t))u_{tt}(l,t) + |u_t(l,t)|^p u_t(l,t) = 0. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Наличие слагаемого $H(u)u_{tt}$ в (1.3) отражает действие внутренних сил, а слагаемое $|u_t(l,t)|^p u_t(l,t)$ — действие демпфирующего устройства [6]. Тогда мы приходим к начально-краевой задаче с динамическим нелинейным граничным условием для определения продольных смещений стержня:

найти в $Q_T = (0,l)\times(0,T)$, где $T \in (0,\infty)$, решение уравнения (1.1), удовлетворяющее начальным данным (1.2) и граничным условиям (1.3)

## 2. Разрешимость задачи

Прежде всего введем понятие решения задачи. Из технических соображений будем считать начальные условия однородными, что не ограничивает общности, но упрощает многие преобразования.

Обозначим

$$W(Q_T) = \{u: \ u \in W_2^1(Q_T), \ u_t \in W_2^1(Q_T) \cap L_{p+2}(\Gamma_l), u_{tt} \in L_2(Q_T) \cap L_2(\Gamma_l),$$
$$u_{xtt} \in L_2(Q_T), u(0,t) = 0\},$$

где $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_l$, $\Gamma_0, \Gamma_l$—боковые границы $Q_T: x = 0$ и $x = l$ соответственно.

$$\hat{W}(Q_T) = \{v: \ v \in W(Q_T), \ v(x,T) = 0\}.$$

Нормы в этих пространствах определим естественным образом

$$||u||_W^2 = ||u||^2_{W_2^1(Q_T)} + ||u_t||^2_{W_2^1(Q_T)} + ||u_{xt}||^2_{L_2(Q_T)} + ||u||^2_{W_2^2(\Gamma)}.$$

Следуя известной процедуре [7, с. 92, 210], получим равенство, в котором $u \in W(Q_T)$, $v \in \hat{W}(Q_T)$:

$$\begin{aligned} &\int_0^T\int_0^l (\sigma(x)u_{tt}v + a(x)u_xv_x - bu_{xt}v_{xt})\,dxdt +\\ &+\int_0^T v(l,t)[H(u)u_{tt}(l,t) + |u_t(l,t)|^p u_t(l,t)]dt = \int_0^T\int_0^l fv dxdt. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Заметим, что все интегралы, входящие в (2.1), существуют и для функций $u \in W(Q_T$, $v \in \hat{W}(Q_T)$, поэтому его можно использовать для определения обобщенного решения задачи (1.1)—(1.3).

**Определение.** Обобщенным решением задачи (1.1)—(1.3) будем называть функцию $u \in W(Q_T)$, удовлетворяющую начальным данным $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 0$ и тождеству (2.1) для любой функции $v \in \hat{W}(Q_T)$.

**Теорема.** Если $f \in L_2(Q_T)$, $f_t \in L_2(Q_T)$, $a, b, \sigma \in C[0,l] \cap C^1(0,l)$, $H(u) \in \in C^1(R^n)$ и удовлетворяет условиям

$$0 < h_0 \leqslant H(u) \leqslant C(1 + |u|^p), \quad |H'(u)|^{\frac{p}{p-1}} \leqslant C(1 + H(u)), \tag{2.2}$$

то для любого $p > 1$ существует единственное обобщенное решение задачи (1.1)—(1.3).

**Доказательство.** Доказательство теоремы проведем в несколько этапов, придерживаясь следующей схемы: построим приближенные решения задачи; получим априорные оценки; покажем возможность предельного перехода к обобщенному решению; докажем единственность решения.

*Существование.* Пусть $w_k \in C^2[0,l]$ линейно независимы и образуют полную систему в $W_2^1(0,l)$. Будем искать приближенное решение задачи в виде

$$u^m(x,t) = \sum_{k=1}^{m} c_k(t) w_k(x)$$

из соотношений

$$\int_0^l \left(\sigma u_{tt}^m w_j + a u_x^m w_j' + b u_{xtt}^m w_j'\right) dx +$$

$$+[H(u^m) u_{tt}^m(l,t) + |u_t^m(l,t)|^p u_t^m(l,t)] w_j(l) = \int_0^l f w_j dx, \tag{2.3}$$

которые для каждого $m$ представляют собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно $c_k(t)$ :

$$\sum_{k=1}^{m} c_k''(t) \int_0^l [\sigma(x) w_i w_j + b(x) w_i' w_j'] dx + H(u^m) \sum_{k=1}^{m} c_k''(t) w_k w_j +$$

$$+|u_t^m(l,t)|^p \sum_{k=1}^{m} c_k'(t) w_k(l) w_j(l) = f_j(t), \tag{2.4}$$

где $f_j(t) = \int\limits_0^l f(x,t) w_j(x) dx$. Добавив начальные условия

$$c_k(0) = 0, \quad c_k'(0) = 0, \tag{2.5}$$

получаем задачу Коши для системы (2.4).

Покажем, что система (2.4) разрешима. Для этого рассмотрим матрицу $\mathcal{A} = = (A_{kj})_{k,j=1}^m$, определенную равенством

$$(\mathcal{A} c''(t))_j = \sum_{k=1}^{m} c_k''(t) \int_0^l [\sigma(x) w_i w_j + b(x) w_i' w_j'] dx + H(u^m) \sum_{k=1}^{m} c_k''(t) w_k(l) w_j(l), \tag{2.6}$$

и покажем, что она имеет обратную. Умножим (2.6) на $c_j''(t)$ и, суммируя по $j$, получим квадратичную форму

$$q = \sum_{k,j=1}^{m} c_k''(t) c_j''(t) \int_0^l (\sigma w_k w_j + b w_k' w_j') dx +$$

$$+\sum_{j=1}^{m} H(u^m) c_j''(t) \sum_{k=1}^{m} c_k''(t) w_k(l) w_j(l) =$$

$$= \int\limits_0^l \sigma(x)(u_{tt}^m)^2 dx + \int\limits_0^l b(x)(u_{ttx}^m)^2 dx + H(u^m(l,t))(u_{tt}^m(l,t))^2.$$

Из физического смысла коэффициентов уравнения (1.1) $\sigma(x) \geqslant \sigma_0 > 0$, $b(x) \geqslant$ $\geqslant b_0 > 0$. Тогда, учитывая первое из условий (2.2) теоремы, $q > 0$, следовательно, все собственные значения матрицы $\mathcal{A}$ положительны, что влечет за собой существование обратной ей матрицы. Это означает, что система (2.4) может быть сведена к нормальной, и, стало быть, задача Коши для нее имеет решения $c_j(t) \in$ $\in W_2^3(0, t_m)$, $j = 1, ..., m$. Таким образом, последовательность приближенных решений $\{u^m(x,t)\}$ построена на $(0, t_m)$. Покажем, что $t_m = T$. Для этого получим ряд оценок.

*Первая априорная оценка.*

Умножим (2.3) на $c_j'(t)$, просуммируем от $j = 1$ до $j = m$, а затем проинтегрируем полученное равенство от $t = 0$ до $t = \tau$, в результате чего получим:

$$\int\limits_0^\tau \int\limits_0^l (\sigma(x) u_{tt}^m u_t^m + a u_x^m u_{xt}^m + b u_{xtt}^m u_{xt}^m)\, dxdt + \int\limits_0^\tau |u_t^m(l,t)|^{p+2} dt +$$

$$+ \int\limits_0^\tau H(u^m(l,t)) u_t^m(l,t) u_{tt}^m(l,t) dt = \int\limits_0^\tau \int\limits_0^l f u_t^m dxdt. \tag{2.7}$$

Интегрируя по частям первое слагаемое левой части и учитывая однородность начальных условий, приходим к равенству

$$\int\limits_0^\tau \int\limits_0^l (\sigma u_{tt}^m u_t^m + a u_x^m u_{xt}^m + b u_{xtt}^m u_{xt}^m)\, dxdt = \int\limits_0^l [\sigma(u_t^m)^2 + a(u_x^m)^2 + b(u_{xt}^m)^2]_{t=\tau} dx.$$

Для преобразования третьего слагаемого левой части заметим, что справедливо представление

$$H(u^m) u_t^m u_{tt}^m = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(H(u^m)(u_t^m)^2\right) - \frac{1}{2} H'(u^m)(u^m)^3.$$

Тогда (2.7) принимает вид

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^l [\sigma(u_t^m)^2 + a(u_x^m)^2 + b(u_{xt}^m)^2]_{t=\tau} dx + \int\limits_0^\tau |u_t^m(l,t)|^{p+2} dt + \frac{1}{2} H(u^m(l,\tau))(u_t^m(l,\tau))^2 -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_0^\tau H'(u^m(l,t))(u_t^m(l,t))^3 dt = \int\limits_0^\tau \int\limits_0^l f u_t^m dxdt. \tag{2.8}$$

В силу неравенства Юнга

$$|H'(u^m) u_t^m| \leqslant \frac{1}{p}|u_t^m|^p + \frac{p-1}{p}|H'(u^m)|^{\frac{p}{p-1}}.$$

Тогда

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^\tau [|u_t^m(l,t)|^{p+2} - H'(u^m)(u_t^m(l,t))^3] dt \geqslant$$

$$\geqslant \frac{p-1}{2p}\int\limits_0^\tau (u_t^m(l,t))^2\left(|u_t^m(l,t)|^p - |H'(u^m)|^{\frac{p}{p-1}}\right)dt.$$

Так как по условию теоремы $|H'(u^m)|^{\frac{p}{p-1}} \leqslant C(1+H(u^m))$, то мы получаем неравенство

$$\int\limits_0^l [\sigma(u_t^m)^2 + a(u_x^m)^2 + b(u_{xt}^m)^2]_{t=\tau}dx + \int\limits_0^\tau |u_t^m(l,t)|^{p+2}dt + H(u^m(l,\tau))(u_t^m(l,\tau))^2 \leqslant$$

$$\leqslant C\int\limits_0^\tau (u_t^m)^2(1+H(u^m))dt + \int\limits_0^\tau\int\limits_0^l (u_t^m)^2dxdt + \int\limits_0^\tau\int\limits_0^l f^2dxdt. \qquad (2.9)$$

Заметим, что из представления

$$u_t^m = \int\limits_x^l u_{xt}^m dx + u_t^m(x,t)$$

следует неравенство

$$(u_t^m(l,t))^2 \leqslant 2l\int\limits_0^l (u_{xt}^m)^2dx + \frac{2}{l}\int\limits_0^l (u_t^m)^2dx,$$

с учетом которого

$$\int\limits_0^\tau (u_t^m(l,t))(1+H(u^m))dt \leqslant 2l\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l (u_{xt}^m)^2dxdt + \frac{2}{l}\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l (u_t^m)^2dxdt + \int\limits_0^\tau (u_t^m(l,t))^2H(u^m)dt.$$

Тогда из (2.9)

$$\int\limits_0^l [\sigma(u_t^m)^2 + a(u_x^m)^2 + b(u_{xt}^m)^2]_{t=\tau}dx + \int\limits_0^\tau |u_t^m(l,t)|^{p+2}dt + H(u^m(l,\tau))(u_t^m(l,\tau))^2 \leqslant$$

$$\leqslant C\left(\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l [(u_t^m)^2 + (u_{xt}^m)^2]dxdt + \int\limits_0^\tau H(u^m)(u_t^m(l,t))^2dt\right) + \int\limits_0^\tau\int\limits_0^l f^2dxdt.$$

Здесь и всюду в статье под $C$ мы понимаем любую положительную константу, не зависящую от $m$.

Применив лемму Гронуолла, получаем *первую априорную оценку*

$$\begin{array}{l} ||u^m||_{W_2^1(Q_T)} \leqslant C_1, \\ ||u_{xt}^m||_{L_2(Q_T)} \leqslant C_1, \\ ||u_t^m||_{L_{p+2}(\Gamma_l)} \leqslant C_1, \\ ||H^{1/2}(u^m)u_t^m||_{L_2(\Gamma_l)} \leqslant C_1, \end{array} \qquad (2.10)$$

где $C_1 > 0$ и не зависит от $m$.

**Вторая априорная оценка**

Для вывода второй априорной оценки предварительно получим важное неравенство. Умножим (2.3) на $c_j''(0)$, просуммируем по $j = 1, ..., m$ и положим $t = 0$. Учитывая начальные условия, получим

$$\int\limits_0^l (\sigma(x)(u_{tt}^m(x,0))^2 + b(x)(u_{ttx}^m(x,0))^2)dx + H(u^m(l,0))(u_{tt}^m(l,0))^2 =$$

$$= \int\limits_0^l f(x,0) u_{tt}^m(x,0)dx.$$

Отсюда вытекает неравенство

$$||u_{tt}^m(x,0)||^2_{L_2(0,l)} + ||u_{ttx}^m(x,0)||^2_{L_2(0,l)} + \gamma_0^{-1} H(0)(u_{tt}^m(l,0))^2 \leqslant$$
$$\leqslant \gamma_0^{-1} ||f(x,0)||_{L_2(0,l)} ||u^m(x,0)||_{L_2(0,l)},$$

где $\gamma_0 = \min\{\sigma_0, b_0\}$, и тем более

$$||u_{tt}^m(x,0)||^2_{L_2(0,l)} \leqslant \gamma_0^{-1} ||f(x,0)||_{L_2(0,l)} ||u^m(x,0)||_{L_2(0,l)},$$

откуда

$$\begin{aligned} &||u_{tt}^m(x,0)||_{L_2(0,l)} \leqslant \gamma_0^{-1/2} ||f(x,0)||_{L_2(0,l)}, \\ &||u_{ttx}^m(x,0)||_{L_2(0,l)} \leqslant \gamma_0^{-1/2} ||f(x,0)||_{L_2(0,l)}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Теперь продифференцируем (2.3) по $t$, затем умножим на $c_j''(t)$ просуммируем по $j = 1, ..., m$ и проинтегрируем по $t$ от 0 до $\tau$. Учитывая, что

$$\frac{d}{dt}(|u_t^m(l,t)|^p u_t^m(l,t)) = (p+1)|u_t^m(l,t)|^p u_{tt}^m,$$

$$H(u^m) u_{ttt}^m u_{tt}^m = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(H(u^m)(u_{tt}^m)^2\right) - \frac{1}{2} H'(u^m) u_t^m (u_{tt}^m)^2,$$

после несложных преобразований получим

$$\int\limits_0^l [\sigma(u_{tt}^m)^2 + a(u_{xt}^m)^2 + b(u_{ttx}^m)^2]_{t=\tau} + 2(1+p)\int\limits_0^\tau |u_t^m(l,t)|^p (u_{tt}^m(l,t))^2 dt +$$

$$+ \int\limits_0^\tau H'(u^m)(u_{tt}^m)^2 u_t^m dt + H(u^m(l,\tau))(u_{tt}^m(l,\tau))^2 = H(0)(u_{tt}^m(l,0))^2 +$$

$$+ \int\limits_0^l [\sigma(u_{tt}^m(x,0))^2 + b(u_{ttx}^m(x,0))^2]dx + 2\int\limits_0^\tau \int\limits_0^l f_t u_{tt}^m dx dt. \tag{2.12}$$

Сделаем некоторые оценки. В силу неравенства Юнга

$$\Big| \int\limits_0^\tau H'(u^m) u_t^m(l,t)(u_{tt}^m(l,t))^2 dt \Big| \leqslant \frac{1}{p}\int\limits_0^\tau |u_t^m(l,t)|^p (u_{tt}^m(l,t))^2 dt +$$

$$+ \frac{p-1}{p}\int\limits_0^\tau |H'(u^m)|^{\frac{p}{p-1}} (u_{tt}^m(l,t))^2 dt.$$

Так как по условию теоремы

$$|H'(u^m)|^{\frac{p}{p-1}} \leqslant C(1 + H(u^m)),$$

то после некоторых преобразований приходим к неравенству

$$\int\limits_0^l [\sigma(u_{tt}^m)^2 + a(u_{xt}^m)^2 + b(u_{ttx}^m)^2]_{t=\tau} dx + \frac{2}{p}\int\limits_0^\tau |u_t^m(l,t)|^p (u_{tt}^m(l,t))^2 dt +$$

$$+H(u^m)(u^m_{tt}(l,t))^2 \leqslant \int\limits_0^l [\sigma(u^m_{tt})^2 + a(u^m_{xt})^2 + b(u^m_{ttx})^2]_{t=0}dx + H(0)(u^m_{tt}(l,0))^2+$$

$$+C\int\limits_0^\tau (1+H(u^m))(u^m_{tt}(l,t))^2dt + \int\limits_0^\tau\int\limits_0^l (u^m_{tt}(x,t))^2dxdt + \int\limits_0^\tau\int\limits_0^l f_t^2dxdt.$$

Применение первой априорной оценки и леммы Гронуолла позволяет получить *вторую априорную оценку*

$$\begin{array}{l} ||u^m_{tt}||_{L_2(Q_T)} \leqslant C_2, \\ ||u^m_{tt}(l,t)||_{L_2(0,T)} \leqslant C_2, \\ ||u^m_{ttx}||_{L_2(Q_T)} \leqslant C_2, \\ \int\limits_0^\tau |u^m_t(l,t)|^p(u^m_{tt}(l,t))^2dt \leqslant C_2, \\ ||H^{1/2}(u^m)u^m_{tt}(l,t)||_{C(0,T)} \leqslant C_2. \end{array} \qquad (2.13)$$

Полученные оценки позволяют выделить из построенной последовательности $\{u^m(x,t)\}$ подпоследовательность $\{u^\mu\}$, обладающую свойствами:
$u^\mu \to u$ слабо в $W^1_2(Q_T)$,
$u^\mu_t \to u_t$ слабо в $W^1_2(Q_T)\cap L_{p+2}(\Gamma_l)$,
$u^\mu_{tt} \to u_{tt}$ слабо в $W^1_2(Q_T)\cap L_2(\Gamma_l)$,
$u^\mu_{xt} \to u_{xt}$ слабо в $L_2(Q_T)$.

Кроме того, в силу теорем вложения [8] и лемм 6.2, 6.3 [9, с. 530–531] $u^\mu \to u$, $u^\mu_t \to u_t$ сильно в $L_2(Q_T)$. Поэтому можно считать, что уже выделена подпоследовательность, обладающая свойством
$u^\mu \to u,\quad u^\mu_t \to u_t$ п.в. на $\Gamma_l$.

Тогда $|u^\mu_t(l,t)|^pu^\mu_t(l,t) \in L_q(\Gamma_l)$, $\quad q=\frac{p+2}{p+1}$, $\quad 1<q<2$, и $|u^\mu_t(l,t)|^pu^\mu_t(l,t) \to |u_t(l,t)|^pu_t(l,t)$ п.в. на $\Gamma_l$ [10, с. 25]. Учитывая условия теоремы, можно сделать вывод о том, что [10] $H(u^\mu)u^\mu_{tt} \in L_q(\Gamma_l)$ и $H(u^\mu)u^\mu_{tt} \to H(u)u_{tt}$ п.в. на $\Gamma_l$.

Установленные свойства выделенной подпоследовательности позволяют перейти к заключительному этапу доказательства существования решения. Умножим (2.3) с $u^m=u^\mu$ на $d_j\in C^1[0,T]$, $d(T)=0$, просуммируем по $j=1,...,m$, а затем проинтегрируем по $t$ от 0 до $T$. Получим

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^l (\sigma(x)u^\mu_{tt})\eta + a(x)u^\mu_x\eta_x - b(x)u^\mu_{xt}\eta_{xt})dxdt+$$

$$+\int\limits_0^T [|u^\mu_t(l,t)|^pu^\mu_t(l,t)\eta(l,t) + H(u^\mu)u^\mu_{tt}(l,t)]dt = \int\limits_0^T\int\limits_0^l f\eta dxdt, \qquad (2.14)$$

где $\eta(x,t)=\sum\limits_{j=1}^m d_j(t)w_j(x)$. Переходя в (2.14) к пределу при $\mu\to\infty$ и принимая во внимание плотность множества всех функций вида $\eta(x,t)=\sum\limits_{j=1}^m d_j(t)w_j(x)$ в $W^1_2(Q_T)\cap L_{p+2}(\Gamma_l)$, убеждаемся в том, что $u=\lim\limits_{\mu\to\infty}u^\mu$ удовлетворяет тождеству (2.1) для любых функций $v\in\hat{W}(Q_T)$ и, стало быть, является искомым обобщенным решением задачи (1)—(3).

*Единственность*. Предположим, что существует два различных обобщенных решения задачи (2.1)—(2.3), $u_1$ и $u_2$. Тогда их разность, $u=u_1-u_2$, удовлетворяет условиям $u(x,0)=0$, $u_t(x,0)=0$ и тождеству

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^l (\sigma u_{tt}v + a u_x v_x + b u_{xtt} v_x)\,dxdt +$$

$$+\int\limits_0^T v(l,t)[H(u_1)u_{1tt} - H(u_2)u_{2tt} + |u_{1t}|^p u_{1t} - |u_{2t}|^p u_{2t}]dt = 0. \qquad (2.15)$$

для любой функции $v \in \hat{W}$. Пусть $v(x,t)=\Phi(t)\omega(x)$, $\Phi(t)\in C^2[0,T]$, $\omega \in W_2^1(0,l)$. Тогда из (2.15) следует справедливость тождества

$$\int\limits_0^l (\sigma u_{tt}\omega + a u_x \omega_x + b u_{xtt}\omega_x)\,dx +$$

$$+\omega(l)[H(u_1)u_{1tt} - H(u_2)u_{2tt} + |u_{1t}|^p u_{1t} - |u_{2t}|^p u_{2t}] = 0 \qquad (2.16)$$

для любого $t \in [0,T]$. Зафиксируем $t$ и положим $\omega(x) = u_t(x,t)$. Элементарные преобразования в (2.16) приводят к тождеству

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_0^l [\sigma u_t^2 + a u_x^2 + b u_{xt}^2]dx + u_t(l,t)[H(u_1) - H(u_2)]u_{1tt} +$$

$$+H(u_2)u_{tt}u_t\left(|u_{1t}(l,t)|^p u_{1t}(l,t) - |u_{2t}(l,t)|^p u_{2t}(l,t)\right)(u_{1t}-u_{2t}) = 0. \qquad (2.17)$$

Заметим, что

$$H(u_2)u_t u_{tt} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(H(u_2)u_t^2) - \frac{1}{2}u_t^2 H'(u_2)u_{2t},$$

а оператор $|u_t|^p u_t$ монотонный, в силу чего

$$(|u_{1t}|^p u_{1t} - |u_{2t}|^p u_{2t})(u_1 - u_2) \geqslant 0.$$

Тогда из (2.17) после интегрирования по $t$ от 0 до $\tau \in [0,T]$ получим

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^l [\sigma u_t^2 + a u_x^2 + b u_{xt}^2]_{t=\tau}dx + \frac{1}{2}H(u_2(l,\tau))u_t^2(l,\tau) \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^\tau [H(u_2) - H(u_1)]u_{1tt}u_{1t}dt + \frac{1}{2}\int\limits_0^\tau H'(u_2)u_t^2 u_{2t}dt. \qquad (2.18)$$

Сделаем некоторые оценки.

$$\Big|\int\limits_0^\tau [H(u_2) - H(u_1)]u_{1tt}u_{1t}dt\Big| \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_0^\tau u_t^2(l,t)dt + \frac{1}{2}\int\limits_0^\tau [H(u_2) - H(u_1)]^2 u_{itt}^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\int\limits_0^\tau u_t^2(l,t)dt + \max|H(u_1) - H(u_2)|^2 \int\limits_0^\tau u_{1tt}^2 dt;$$

$$\Big|\int\limits_0^\tau u_t^2 u_{2t} H'(u_2)dt \leqslant C\max(1 + H(u_2))^{\frac{p-1}{p}}|u_{2t}|\int\limits_0^\tau u_t^2 dt.$$

С учетом этих неравенств и свойств функции $H(u)$ получим из (2.18):

$$\int_0^l [\sigma u_t^2 + a u_x^2 + b u_{xt}^2]_{t=\tau} dx + H(u_2(l,\tau))u_t^2(l,\tau) \leqslant$$

$$\leqslant C\int_0^\tau u_t^2(l,t)dt + ||u||^2_{C[0,T]}\int_0^\tau u_{1tt}^2 dt. \qquad (2.19)$$

Как было показано,

$$u^2(l,\tau) \leqslant 2l\int_0^l u_x^2(x,\tau)dx + \frac{2}{l}\int_0^l u^2(x,\tau)dx.$$

Воспользуемся представлениями

$$u(x,\tau) = \int_0^\tau u_t(x,t)dt; \quad u_x(x,\tau) = \int_0^\tau u_{xt}(x,t)dt.$$

Теперь нетрудно получить неравенство

$$u^2(l,\tau) \leqslant 2l\tau\int_0^\tau\int_0^l u_{xt}^2 dxdt + \frac{2\tau}{l}\int_0^\tau\int_0^l u_t^2 dxdt \quad \forall\tau\in[0,T],$$

учитывая которое из (2.19) получаем

$$\int_0^l [\sigma u_t^2 + a u_x^2 + b u_{xt}^2]_{t=\tau} dx + H(u_2(l,\tau))u_t^2(l,\tau) \leqslant$$

$$\leqslant C\int_0^\tau\int_0^l (u_t^2 + u_{xt}^2)dxdt + C\int_0^\tau u_t^2(l,t)dt. \qquad (2.20)$$

Из (2.20), учитывая, что $H(u) \geqslant h_0$, и выбирая $m = \min\{1, \sigma_0, a_0, b_0, h_0\}$, получим неравенство

$$\int_0^l [u_t^2 + u_x^2 + u_{xt}^2]_{t=\tau} dx + u_t^2(l,\tau) \leqslant C\left(\int_0^\tau\int_0^l (u_t^2 + u_x^2 + u_{xt}^2)dxdt + \int_0^\tau u_t^2(l,t)dt\right),$$

применяя к которому лемму Гронуолла убеждаемся в том, что, в силу произвольности $\tau$, $u(x,t) \equiv 0$. Отсюда сразу следует, что $u_1 = u_2$, стало быть, единственность решения доказана.

Теперь теорема полностью доказана.

## Литература

[1] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 2004. 798 с.

[2] Стретт Дж. В. Теория звука. М.: ГИТТЛ, 1955. Т. I.

[3] Федотов И.А., Полянин А.Д., Шаталов М.Ю. Теория свободных и вынужденных колебаний твердого стержня, основанная на модели Рэлея // ДАН. 2007. Т. 417. № 1. С. 56–61.

[4] Бейлин А.Б., Пулькина Л.С. Задача о продольных колебаниях стержня с динамическими граничными условиями // Вестник СамГУ. 2014. № 3(114). С. 9–19.

[5] Rao J.S. Advanced Theory of Vibration. N.Y.: Wiley, 1992.

[6] Doronin G.G., Lar'kin N.A., Souza A.J. A Hyperbolic Problem with Nonlinear Second-order Boundary damping // EJDE. 1998. № 28.

[7] Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.

[8] Соболев С.Л. Избранные вопросы теории функциональных пространств и обобщенных функций. М.: Наука, 1989.

[9] Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.

[10] Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.


# References


[1] Tikhonov A.N., Samarskii A.A. Equations of mathematical physics. M., Nauka, 2004 [in Russian].

[2] Rayleigh J.W.S. Theory of sound. M., GITTL, 1955. Vol. 1 [in Russian].

[3] Fedotov I.A., Polyanin A.D., Shatalov M.Yu. Theory of free and forced vibrations of rigid rod based on Rayleigh model. *DAN*, 2007. Vol. 417, pp. 56-61 [in Russian].

[4] Beylin A.B., Pulkina L.S. A problem on longitudinal vibration in a short thick bar with dynamical boundary conditions. *Vestnik SamGU* [Vestnik of Samara State University], 2014, no. 3(114), pp. 9–19 [in Russian].

[5] Rao J.S. Advanced Theory of Vibration. N.Y., Wiley, 1992 [in Russian].

[6] Doronin G.G., Lar'kin N.A., Souza A.J. A Hyperbolic Problem with Nonlinear Second-order Boundary damping. *EJDE*, 1998, no. 28 [in Russian].

[7] Ladyzhenskaya O.A. Boundary value problems of mathematical physics. M., Nauka, 1973 [in Russian].

[8] Sobolev S.L. Selected questions of the theory of functional spaces and generalized functions. I., Nauka, 1989, 254 p. [in Russian].

[9] Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Uraltzeva N.N. Linear and quasilinear parabolic equations. M., Nauka, 1967 [in Russian].

[10] Lions J.L. Some methods of solving nonlinear boundary problems. M., Mir, 1972, 587 p. [in Russian].

***A.B. Beylin, L.S. Pulkina***[2]

# PROBLEM ON VIBRATION OF A BAR WITH NONLINEAR SECOND-ORDER BOUNDARY DAMPING

In this paper, we study the initial-boundary problem with nonlinear dynamical boundary condition for the pseudohyperbolic equation. This problem represents a mathematical model of longitudinal vibration in a thick short bar with dynamic nonlinear second-order boundary damping. The existence and uniqueness of a generalized solution are proved. The proof is based on a priori estimates and Galerkin procedure. This approach allows to construct approximation in the suitable for practical application form.

**Key words:** dynamic boundary conditions, nonlinear damping, pseudohyperbolic equation, generalized solution, Rayleigh's model.

Статья поступила в редакцию 8/*II*/2015.

The article received 8/*II*/2015.

[2]*Beylin Alexander Borisovich* (abeilin@mail.ru), Department of Automated Machine-Tool and Tooling Systems, Samara State Technical University, 133, Molodogvardeyskaya Street, Samara, 443010, Russian Federation.

*Pulkina Ludmila Stepanovna* (louise@samdiff.ru), Department of Equations of Mathematical Systems, Samara State University, 1, Acad. Pavlov Street, Samara, 443011, Russian Federation.