УДК 517.956.227, 517.984.5

***А.В. Филиновский***[1]

# ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРОМ[2]

Изучена краевая задача на собственные значения для оператора Лапласа с граничным условием Робена в ограниченной области с гладкой границей. Рассмотрен случай граничного условия, содержащего вещественный параметр. Доказано, что кратность собственного значения задачи Робена для всех значений параметра, больших некоторого числа, не превосходит кратности соответствующего собственного значения задачи Дирихле для оператора Лапласа. Для простого собственного значения задачи Дирихле доказана сходимость собственной функции задачи Робена к собственной функции задачи Дирихле при неограниченном возрастании параметра, а также получена формула для производной по параметру собственного значения задачи Робена. Эта формула использована для обоснования асимптотических разложений собственных значений задачи Робена при больших положительных значениях параметра.

**Ключевые слова:** краевая задача, граничное условие, параметр, собственные значения, асимптотические разложения.

## 1. Предварительные сведения

Пусть $\Omega \subset R^n$, $n \geqslant 2$ – ограниченная область с границей $\Gamma \in C^3$. Рассмотрим краевую задачу Робена на собственные значения

$$\Delta u + \lambda u = 0, \quad x \in \Omega, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha u = 0, \quad x \in \Gamma, \tag{1.2}$$

где $\nu$ – единичный вектор внешней нормали к $\Gamma$, $\alpha$ – вещественный параметр. Обозначим через $\{\lambda_k(\alpha)\}_{k=1}^{\infty}$ последовательность собственных значений задачи (1.1), (1.2) занумерованных в соответствии с их кратностями:

$$\lambda_k(\alpha) = \sup_{v_1,\ldots,v_{k-1} \in L_2(\Omega)} \inf_{\substack{v \in H^1(\Omega),\\ (v,v_j)=0,\\ j=1,\ldots,k-1}} \frac{\int_\Omega |\nabla v|^2 dx + \alpha \int_\Gamma v^2 ds}{\int_\Omega v^2 dx}, \tag{1.3}$$

$$k = 1, 2, \ldots .$$



*Филиновский Алексей Владиславович* (flnv@yandex.ru), кафедра высшей математики, Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, 105005, Российская Федерация, г. Москва, 2-я Бауманская ул., 5.

[2]Статья подготовлена по докладу конференции "СамДиф-2015".

Рассмотрим также последовательность собственных значений $\{\lambda_k^D\}_{k=1}^\infty$ задачи Дирихле

$$\Delta u + \lambda u = 0, \quad x \in \Omega, \tag{1.4}$$

$$u = 0, \quad x \in \Gamma, \tag{1.5}$$

определяемых равенствами:

$$\lambda_k^D = \sup_{v_1,\ldots,v_{k-1}\in L_2(\Omega)} \inf_{\substack{v\,\in \overset{o}{H}{}^1(\Omega)\\ (v,v_j)_{L_2(\Omega)}=0\\ j=1,\ldots,k-1}} \frac{\int_\Omega |\nabla v|^2 dx}{\int_\Omega v^2 dx}, \tag{1.6}$$

$$k = 1,2,\ldots.$$

Известно [1], что собственные значения задач (1.1), (1.2) и (1.4), (1.5) образуют неубывающие последовательности такие, что $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k(\alpha) = \lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k^D = +\infty$. При этом первые собственные значения $\lambda_1(\alpha)$ и $\lambda_1^D$ являются простыми, соответствующие собственные функции можно выбрать неотрицательными и $\lambda_1^D > 0$.
Из (1.3), (1.6) следуют неравенства $\lambda_k(\alpha) \leqslant \lambda_k^D$, которые дают верхнюю грань для $\lambda_k(\alpha)$ при всех значениях $\alpha$. Как отметили Д. Гильберт и Р. Курант [1, ч. 6, § 2, п. 1], при $n=2$ в случае гладкой границы $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} \lambda_k(\alpha) = \lambda_k^D$, $k=1,2,\ldots$.
В [2] для первого собственного значения $\lambda_1(\alpha)$ при $n=2$ были получены следующие оценки:

$$\lambda_1^D \left(1 + \frac{\lambda_1^D}{\alpha q_1}\right)^{-1} \leqslant \lambda_1(\alpha) \leqslant \lambda_1^D \left(1 + \frac{4\pi}{\alpha|\Gamma|}\right)^{-1}, \quad \alpha > 0, \tag{1.7}$$

где $q_1$ – первое собственное значение задачи Стеклова

$$\Delta^2 u = 0, \quad x \in \Omega,$$

$$u = 0, \quad \Delta u - q\tfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \Gamma.$$

В работах [3; 4] установлены оценки всех собственных значений задачи (1.1), (1.2):

$$\lambda_k^D - C_1 \frac{\left(\lambda_k^D\right)^2}{\sqrt{\alpha}} \leqslant \lambda_k(\alpha) \leqslant \lambda_k^D, \quad \alpha > \alpha_1 > 0, \quad k = 1,2,\ldots. \tag{1.8}$$

Оценки (1.8) были улучшены в [5], а именно было показано, что собственные значения $\lambda_k(\alpha)$, $k=1,2,\ldots$ удовлетворяют неравенствам

$$\lambda_k^D - C_1 \frac{\left(\lambda_k^D\right)^2}{\alpha} \leqslant \lambda_k(\alpha) \leqslant \lambda_k^D, \quad \alpha > \alpha_1 > 0, \tag{1.9}$$

с постоянными $C_1$ и $\alpha_1$, не зависящими от $k$.
В [6; 7] для $n \geqslant 2$ было получено асимптотическое разложение:

$$\lambda_1(\alpha) = \lambda_1^D - \frac{\int_\Gamma \left(\frac{\partial u_1^D}{\partial \nu}\right)^2 ds}{\int_\Omega \left(u_1^D\right)^2 dx}\, \alpha^{-1} + o\left(\alpha^{-1}\right), \quad \alpha \to +\infty, \tag{1.10}$$

где $u_1^D$ – первая собственная функция задачи Дирихле (1.4), (1.5). Заметим, что в силу свойств собственной функции $u_1^D$

$$\int_\Gamma \left(\frac{\partial u_1^D}{\partial \nu}\right)^2 ds > 0. \tag{1.11}$$

Из соотношений (1.10), (1.11) следует, что оценки (1.9) являются неулучшаемыми по параметру: первую степень $\alpha$ в знаменателе (1.9) нельзя заменить на $\alpha^{1+\delta}$ с произвольным $\delta > 0$.

## 2. Основные результаты

**Теорема 1.** *Пусть $\lambda_k^D$ – простое собственное значение. Тогда существует число $\alpha_k \in R$ такое, что при всех $\alpha > \alpha_k$ собственное значение $\lambda_k(\alpha)$ также простое и справедливо равенство*

$$\lambda_k'(\alpha) = \frac{\int_\Gamma u_{k,\alpha}^2 ds}{\int_\Omega u_{k,\alpha}^2 dx} > 0, \tag{2.1}$$

*где $u_{k,\alpha}(x)$ – соответствующая $\lambda_k(\alpha)$ собственная функция задачи (1.1), (1.2).*

**Теорема 2.** *Пусть $\lambda_k^D$ – простое собственное значение. Тогда справедливо асимптотическое разложение*

$$\lambda_k(\alpha) = \lambda_k^D - \frac{\int_\Gamma \left(\frac{\partial u_k^D}{\partial \nu}\right)^2 ds}{\int_\Omega (u_k^D)^2\, dx}\, \alpha^{-1} + o\left(\alpha^{-1}\right), \quad \alpha \to +\infty, \tag{2.2}$$

*где $u_k^D(x)$ – соответствующая $\lambda_k^D$ собственная функция задачи (1.4), (1.5).*

Для $k = 1$ доказательство разложения (2.2) содержится в работе [7].

## 3. Доказательства

**Лемма 1.** *Пусть $\lambda_k^D$ – собственное значение задачи (1.4), (1.5) кратности $m$. Тогда существует число $\alpha_k \in R$ такое, что при всех $\alpha > \alpha_k$ кратность собственного значения $\lambda_k(\alpha)$ также не превосходит $m$.*

**Доказательство леммы 1.** Пусть $\lambda_k^D$ – собственное значение кратности $m$. Будем считать, что

$$\lambda_{k-1}^D < \lambda_k^D = \lambda_{k+1}^D = \ldots = \lambda_{k+m-1}^D < \lambda_{k+m}^D. \tag{3.1}$$

Рассмотрим теперь собственные значения $\lambda_j(\alpha)$, $j = k, k+1, \ldots, k+m-1$ как функции переменной $\alpha$. В силу (1.9) и (3.1) для любого $\varepsilon > 0$ существует $\alpha_k \in R$ такое, что при всех $\alpha > \alpha_k$ выполнены неравенства

$$\lambda_j(\alpha) \;<\; \lambda_{k-1}^D + \varepsilon, \quad j = 1, 2, \ldots, k-1, \tag{3.2}$$

$$\lambda_j(\alpha) \;>\; \lambda_{k+m}^D - \varepsilon, \quad j = k+m, k+m+1, \ldots. \tag{3.3}$$

Положим $\varepsilon = \min\{|\lambda_k^D - \lambda_{k-1}^D|, |\lambda_{k+m}^D - \lambda_k^D|\}/2$. Тогда в силу (3.1), (3.2) при $\alpha > \alpha_k$ на интервале $(\lambda_k^D - \varepsilon, \lambda_k^D + \varepsilon)$ находятся только собственные значения $\lambda_j(\alpha)$, $j = k, \ldots, k+m-1$. Остальные собственные значения задачи (1.1), (1.2) лежат вне указанного интервала. Следовательно, при каждом $\alpha > \alpha_k$ могут принимать одинаковые значения только функции $\lambda_j(\alpha)$, $j = k, \ldots, k+m-1$, а количество таких функций не превышает $m$. Лемма 1 доказана.

Пусть $u_{k,\alpha}$ – $k$-я собственная функция задачи (1.1), (1.2). Для произвольных $\alpha, \alpha' \in R$ будем рассматривать такие собственные функции, что $\|u_{k,\alpha}\|_{L_2(\Omega)} = \|u_{k,\alpha'}\|_{L_2(\Omega)} = 1$ и $\int\limits_\Omega u_{k,\alpha} u_{k,\alpha'}\, dx \geqslant 0$.

**Лемма 2.** *Пусть $\lambda_k^D$ – простое собственное значение. Тогда существует число $\alpha_k \in R$ такое, что при всех $\alpha > \alpha_k$ собственное значение $\lambda_k(\alpha)$ также простое и имеет место сходимость*

$$\lim_{\alpha' \to \alpha} \|u_{k,\alpha'} - u_{k,\alpha}\|_{H^2(\Omega)} = 0. \tag{3.4}$$

**Доказательство теоремы 1.** Используя теорему о собственных значениях голоморфных семейств операторов [8, гл. 7, § 1, теорема 1.8] и леммы 1, 2, можно установить дифференцируемость по $\alpha$ простых собственных значений и соответствующих собственных функций. Производная $\frac{d}{d\alpha}u_k(\alpha)$ является решением краевой задачи

$$\Delta\frac{d}{d\alpha}u_{k,\alpha}+\lambda_k(\alpha)\frac{d}{d\alpha}u_{k,\alpha}=-\lambda_k'(\alpha)u_{k,\alpha},\quad x\in\Omega, \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{d}{d\alpha}u_{k,\alpha}+\alpha\frac{d}{d\alpha}u_{k,\alpha}=-u_{k,\alpha},\quad x\in\Gamma. \tag{3.6}$$

Умножая обе части уравнения (3.5) на $u_{k,\alpha}$ и интегрируя по $\Omega$, с учетом граничных условий (1.2), (3.6) получаем равенство

$$\lambda_k'(\alpha)\int_\Omega u_{k,\alpha}^2dx=\int_\Gamma u_{k,\alpha}^2ds, \tag{3.7}$$

из которого следует соотношение (2.1). Лемма 2 доказана.

Пусть $u_k^D$ – $k$-я собственная функция задачи (1.4), (1.5). Для произвольного $\alpha\in R$ будем полагать $\|u_{k,\alpha}\|_{L_2(\Omega)}=\|u_k^D\|_{L_2(\Omega)}=1$ и $\int\limits_\Omega u_{k,\alpha}u_k^D\,dx\geqslant 0$.

**Лемма 3.** *Пусть $\lambda_k^D$ – простое собственное значение. Тогда существует число $\alpha_k\in R$ такое, что при всех $\alpha>\alpha_k$ собственное значение $\lambda_k(\alpha)$ также простое и справедливо равенство*

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\|u_{k,\alpha}-u_k^D\|_{H^2(\Omega)}=0. \tag{3.8}$$

**Доказательство теоремы 2.** Для нормированной (в $L_2(\Omega)$) собственной функции $u_k^D$ соотношение (2.2) эквивалентно равенству

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{\lambda_k(\alpha)-\lambda_k^D}{\frac{1}{\alpha}}=-\int_\Gamma\Big(\frac{\partial u_k^D}{\partial\nu}\Big)^2ds. \tag{3.9}$$

Числитель $\lambda_k(\alpha)-\lambda_k^D$ в дроби (3.9) в силу (1.9) стремится к нулю при $\alpha\to+\infty$. В силу формулы (2.2) и граничного условия (1.2) мы имеем

$$\lambda_k'(\alpha)=\int_\Gamma u_{k,\alpha}^2ds=\frac{1}{\alpha^2}\int_\Gamma\Big(\frac{\partial u_{k,\alpha}}{\partial\nu}\Big)^2ds, \tag{3.10}$$

где $u_{k,\alpha}$ – $k$-я нормированная собственная функция задачи (1.1), (1.2). Таким образом,

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{\lambda_k'(\alpha)}{-\frac{1}{\alpha^2}}=-\lim_{\alpha\to+\infty}\int_\Gamma\Big(\frac{\partial u_{k,\alpha}}{\partial\nu}\Big)^2ds. \tag{3.11}$$

Докажем, что

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\int_\Gamma\Big(\frac{\partial u_{k,\alpha}}{\partial\nu}\Big)^2ds=\int_\Gamma\Big(\frac{\partial u_k^D}{\partial\nu}\Big)^2ds. \tag{3.12}$$

В силу (3.8) и теорем вложения для пространств С.Л. Соболева [9, гл. 3, § 5, форм. 19] имеем

$$\begin{gathered}\textstyle\int_\Gamma\Big(\frac{\partial u_k^D}{\partial\nu}-\frac{\partial u_{k,\alpha}}{\partial\nu}\Big)^2ds\leqslant\\ \leqslant\textstyle\int_\Gamma|\nabla(u_k^D-u_{k,\alpha})|^2ds\leqslant\\ \leqslant C\Big(\big\|\nabla^2(u_k^D-u_{k,\alpha})\big\|^2_{L_2(\Omega)}+\big\|\nabla(u_k^D-u_{k,\alpha})\big\|^2_{L_2(\Omega)}\Big)\leqslant\\ \leqslant C\|u_k^D-u_{k,\alpha}\|_{H^2(\Omega)}\to 0,\quad\alpha\to+\infty.\end{gathered} \tag{3.13}$$

Используя (3.13), мы получаем равенство (3.12). По теореме Лопиталя равенство (3.9) следует из (3.11). Доказательство теоремы 2 завершено.

## Литература

[1] Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. М.: ГТТИ, 1951. Т. I. 476 с.

[2] Sperb R. Untere und obere schranken für den tiefsten eigenwert elastisch gestützen membran // Z. Angew. Math. Phys. 1972. V. 23. № 2. P. 231–244.

[3] Filinovskiy A.V. On the eigenvalues of a Robin problem with a large parameter // Math. Bohem. 2014. V. 139. № 2. P. 341–352.

[4] Filinovskiy A.V. Estimates of eigenvalues of a boundary value problem with a parameter // Math. Commun. 2014. V. 19. № 3. P. 531–543.

[5] Filinovskiy A.V. On the estimates of eigenvalues of the boundary value problem with large parameter // Tatra Mt. Math. Publ. 2015. V. 63. P. 1–13.

[6] Филиновский А.В. Асимптотическое поведение первого собственного значения задачи Робена // Дифф. уравнения. 2011. Т. 47. № 11. С. 1659–1660.

[7] Filinovskiy A.V. On the asymptotic behaviour of the first eigenvalue of Robin problem with large parameter // J. Elliptic and Parabolic Equ. 2015. V. 1. № 1. P. 123–135.

[8] Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972. 740 с.

[9] Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1983. 424 с.

## References

[1] Courant R., Hilbert D. Methods of mathematical physics. Vol. I. M., GTTI, 1951, 476 p. [in Russian].

[2] Sperb R. Untere und obere schranken für den tiefsten eigenwert elastisch gestützen membran. *Z.Angew. Math. Phys.*, 1972, Vol. 23, no. 2, pp. 231–244 [in German].

[3] Filinovskiy A.V. On the eigenvalues of a Robin problem with a large parameter. *Math. Bohem.*, 2014, Vol. 139, no. 2, pp. 341–352 [in English].

[4] Filinovskiy A.V. Estimates of eigenvalues of a boundary value problem with a parameter. *Math. Commun.*, 2014, Vol. 19, no. 3, pp. 531–543 [in English].

[5] Filinovskiy A.V. On the estimates of eigenvalues of the boundary value problem with large parameter. *Tatra Mt. Math. Publ.*, 2015, Vol. 63, pp. 1–13 [in English].

[6] Filinovskiy A.V. Asymptotic behaviour of the first eigenvalue of the Robin problem. *Diff. uravneniia* [Differential equations], 2011, Vol. 47, no. 11, pp. 1659–1660 [in Russian].

[7] Filinovskiy A.V. On the asymptotic behaviour of the first eigenvalue of Robin problem with large parameter. *J. Elliptic and Parabolic Equ.*, 2015, Vol. 1, no. 1, pp. 123–135 [in English].

[8] Kato T. Perturbation theory for linear operators. M., Mir, 1972, 740 p. [in Russian].

[9] Mikhailov V.P. Partial differential equations. M., Nauka, 1983, 424 p. [in Russian].

***A.V. Filinovskiy***[3]

# ON THE ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF EIGENVALUES OF THE BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH A PARAMETER

The paper presents the investigation of an eigenvalue problem for the Laplace operator with Robin boundary condition in a bounded domain with smooth boundary. The case of boundary condition containing a real parameter is considered. It is proved that multiplicity of the eigenvalue to the Robin problem for all values of the parameter greater than some number does not exceed the multiplicity of the corresponding eigenvalue to the Dirichlet problem for the Laplace operator. For simple eigenvalue of the Dirichlet problem the convergence of eigenfunction of the Robin problem to the eigenfunction of the Dirichlet problem for unlimited increase of the parameter is proved. The formula for derivative on the parameter for eigenvalues of the Robin problem is established. This formula is used to justify the asymptotic expansions of eigenvalues of the Robin problem for large positive values of the parameter.

**Key words:** boundary value problem, boundary condition, parameter, eigenvalues, asymptotic expansions.

Статья поступила в редакцию 28/ $V$/2015.

The article received 28/ $V$/2015.

[3]*Filinovskiy Alexey Vladislavovich* (`flnv@yandex.ru`), Department of Higher Mathematics, Bauman Moscow State Technical University, 5, Baumanskaya 2-ya Street, Moscow, 105005, Russian Federation.