УДК 517.923

***И.В. Филимонова, Т.С. Хачлаев***[1]

# ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ ОПРЕДЕЛЕННЫХ НА ПОЛУОСИ РЕШЕНИЙ ОДНОГО ПОЛУЛИНЕЙНОГО ОДУ[2]

В статье рассматриваются решения обыкновенного дифференциального полулинейного уравнения, коэффициенты которого зависят от нескольких вещественных параметров. Если коэффициент выбрать так, что уравнение не будет содержать производной первого порядка от неизвестной функции, то это будет случай уравнения Эмдена — Фаулера. Асимптотическое поведение решений уравнения Эмдена — Фаулера при неограниченно больших значениях переменного описано в книге Ричарда Беллмана. Рассматриваемые в статье уравнения, содержащие первую производную от неизвестной функции, встречаются в некоторых задачах для эллиптических уравнений с частными производными в неограниченных областях. От того, с каким знаком первая производная входит в уравнение, существенно зависит описание решений. Частично результат этой статьи может быть получен из работ И.Т. Кигурадзе. Для описания асимптотического поведения решений нелинейного уравнения используются леммы о поведении решений линейных уравнений с достаточно сильно (слабо) растущим потенциалом.

**Ключевые слова:** обыкновенные дифференциальные уравнения, нелинейные уравнения, полулинейные уравнения, уравнения Эмдена — Фаулера, асимптотика решений, положительные решения, существование решений, принцип максимума.

В работе рассматриваются решения уравнения

$$z'' + kz' - x^p|z|^{\sigma-1}z = 0, \tag{1}$$

где $\sigma > 1$, $k, p$ — произвольные постоянные. Изучается асимптотическое поведение при $x \to +\infty$ решений этого уравнения, определенных при $x > x_0 > 0$. Знак параметра $k$, и величина параметра $p$ существенным образом влияют на поведение решений.

Так как коэффициент перед нелинейным членом в уравнении (1) отрицательный, то решения не могут иметь положительных максимумов и отрицательных минимумов, значит, при больших $x$ решение уравнения (1) есть монотонная функция. Поэтому можно ограничиться рассмотрением положительных решений, и нелинейный член писать коротко $x^p z^\sigma$.

[1]© Филимонова И.В., Хачлаев Т.С., 2015

*Филимонова Ирина Владимировна* (filimi@yandex.ru), кафедра дифференциальных уравнений, МГУ имени М.В. Ломоносова, 119991, Российская Федерация, г. Москва, Ленинские горы, 1.

*Хачлаев Тимур Султанович* (khachlaev@mirea.ru), кафедра высшей математики, МИРЭА, 119454, Российская Федерация, г. Москва, пр. Вернадского, 78.

[2]Статья подготовлена по докладу конференции "СамДиф-2015".

Случай $k = 0$ полностью рассмотрен в книге [4], в главе 7 посвященной асимптотическим свойствам решений уравнения Эмдена — Фаулера. Для случая $k \neq 0$ результат нашей работы сформулирован в теореме 1.

Отметим, что при $k < 0$ уравнение (1) заменой $s = e^{kx}$ преобразуется в: $z_{ss} = (\ln s)^p s^{-2} z^\sigma$. Решениям, определенным при больших $x$, будут отвечать решения, определенные при больших $s$. Решения уравнения $z_{ss} = a(s) z^\sigma$ рассматривались в работе [6], но только один наш результат для случая $k < 0$, $p < -1$ может быть получен как следствие теорем работы [6], а именно это теорема 4 [6] при $a(s) = (\ln s)^p s^{-2}$.

Некоторые свойства решений уравнения (1) при $k \neq 0$ были приведены в работе [1]. В случае $p = 0$, $k < 0$ в работе [2] получено асимптотическое разложение решения в ряд. В этих работах рассмотрение уравнения (1) носило вспомогательный характер для изучения решений полулинейного дивергентого эллиптического уравнения в цилиндрических областях [1] и решений недивергентного эллиптического уравнения во внешней к компакту области [2].

Асимптотическое поведение решений уравнений с частными производными не всегда соответствует поведению решений предполагаемого обыкновенного уравнения [3]. По совету проф. И.В. Асташовой мы изучаем свойства решений уравнения (1) и надеемся это поможет и в некоторых других задачах из уравнений с частными производными.

Нетривиальное решение $z(x)$ уравнения (1), определенное при больших $x$, не может очень быстро расти.

**Лемма 1.** Существует $M(p, \sigma)$, что любое решение $z(x)$ уравнения (1), определенное при $x > x_0$ для всех $x > x_1$, оценивается как

$$|z| < M x^{-\frac{p}{\sigma - 1}}.$$

Приведем схему доказательства леммы 1. Сначала доказывается, что уравнение

$$z'' + kz' - z^\sigma = 0 \tag{2}$$

имеет решение $z_0(x)$ с двумя асимптотами. Пусть это $x = 0$, $x = l$. Введем обозначения $M_0$, $l_0$: $M_0 = \min_{x \in (0,l)} z_0(x) = z(l_0)$. Тогда для решения $z(x)$, уравнения (2), определенного на отрезке $[0, l]$, будет выполнено $z(l_0) \leqslant M_0$. Отсюда выводится, что если на отрезке $[0, l]$ определено решение $y(x)$ уравнения $y'' + ky' - B(x) y^\sigma = 0$, где $B(x) > B_0$, то выполнено $y(l_0) < M_0 B_0^{-\frac{p}{\sigma - 1}}$. Оценка решения $z(x)$ уравнения (1), определенного при $x > x_0$, в точке $x$ такой, что $x > x_0 + l_0$, получится, если рассмотреть $z(x)$ как решение линейного уравнения на отрезке $[x - l_0, x + l - l_0]$.

Сформулируем основной результат работы:

**Теорема 1.** Нетривиальное решение $z(x)$ уравнения (1), определенное при больших $x$, имеет при $x \to \infty$ вид:
**если** $k < 0$, $p > -1$, **то** $z(x) = \pm \left(k \frac{1+p}{1-\sigma}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}} x^{-(1+p)/(1-\sigma)} (1 + o(1))$,
**если** $k < 0$, $p = -1$, **то** $z(x) = \pm \left(\frac{k}{1-\sigma}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}} \ln^{-1/(\sigma-1)} x (1 + o(1))$,
**если** $k > 0$ , $p \geqslant -1$, **то** $z(x) = C(e^{-kx} + O(e^{-\alpha x}))$, где $C \neq 0$, $\alpha \in (k, k\sigma)$ можно выбрать произвольно,
**если** $k > 0$, $p < -1$, **то есть три вида решений** :
$z(x) = C(1 + O(x^{p+1}))$, где $C \neq 0$,
$z(x) = C(e^{-kx} + O(e^{-\alpha x}))$, где $C \neq 0$, $\alpha \in (k, k\sigma)$ можно выбрать произвольно,
$z(x) = \pm \left(\frac{k(p+1)}{1-\sigma}\right)^{1/(\sigma-1)} x^{(p+1)/(1-\sigma)} (1 + o(1))$,

**если** $k < 0$ **,** $p < -1$**, то** $z(x) = C(1 + O(x^{p+1}))$, где $C \neq 0$.
Более того, такого вида решения действительно существуют.

Асимптотические формулы для решений, стремящихся к ненулевой константе и экспоненциально убывающих, получаются из формул для представления решения линейного уравнения с асимптотически мало отличающимися от постоянных коэффициентами.

Доказательство формул в случае степенной асимптотики требует более тонких методов.

**Лемма 2.** Пусть $Q(x) \to \infty$ при $x \to \infty$. Тогда для $z(x)$ решения уравнения

$$z'' + kz' - \frac{Q(x)}{x} z = 0 \qquad (3)$$

такого, что при $x \to \infty$ выполнено $z(x) \to \infty$, для любых $\beta = \mathtt{const} > 0$, $C = \mathtt{const} > 0$ найдется $x_1$, что при $x > x_1$ выполняется неравенство $z(x) > Cx^{\beta}$.

**Лемма 3.** Пусть $Q(x) \to 0$ при $x \to \infty$, $Q(x) > 0$, $k > 0$. Тогда для $z(x)$ решения уравнения (3), для любых $\beta = \mathtt{const} > 0$, $C = \mathtt{const} > 0$ найдется $x_1$, что при $x > x_1$ выполняется неравенство $z(x) < Cx^{\beta}$.

**Замечание.** Доказать отсутствие неограниченного решения в условиях леммы 3 невозможно, так как функция $z(x) = \ln x$ имеет решение уравнения (3) с функцией $Q(x) = (k - x^{-1}) \ln^{-1} x$.

В данной статье обоснуем асимптотические формулы в наиболее сложном случае $k > 0$, $p < -1$.

$\lhd$ Так как $z(x)$ монотонна при $x > x_0$, то есть три возможности $\lim_{x\to\infty} z(x) = \infty$, $\lim_{x\to\infty} z(x) = C > 0$, $\lim_{x\to\infty} z(x) = 0$.

В двух последних случаях функция $z(x)$ ограничена при $x > x_0$, поэтому

$$z'' + kz' - a(x)z = 0,$$

где $a(x) = x^p z^{\sigma-1} = O(x^p)$ при $x \to \infty$, так как $p < -1$, то

$$z(x) = C_1(1 + O(x^{p+1})) + C_2 e^{-kx}(1 + O(x^{p+1})) \qquad \text{при} \qquad x \to \infty,$$

т. е. либо $z \to C_1 \neq 0$, либо $z \sim C_2 e^{-kx}$ при $x \to \infty$.

Пусть теперь $\lim_{x\to\infty} z(x) = \infty$. Покажем, что уравнение (1) имеет верхнее и нижнее решение вида $Cx^{\alpha}$, $\alpha = (p+1)/(1-\sigma)$. Действительно подставляя это выражение в левую часть уравнения (1), найдем

$$Cx^{\alpha-1}\Big(k\alpha - C^{\sigma-1}\frac{\alpha(\alpha-1)}{x}\Big).$$

Поэтому, если $C^{\sigma-1} > k\alpha$, то при $x > \max(0, \frac{\alpha(\alpha-1)}{C^{\sigma-1}-k\alpha})$ эта функция верхнее решение, если $C^{\sigma-1} < k\alpha$ при $x > \max(0, \frac{\alpha(1-\alpha)}{k\alpha - C^{\sigma-1}})$ эта функция нижнее решение.

Покажем теперь, что если $z(x) \to \infty$ при $x \to \infty$, то $z(x)/x^{\alpha} = R(x)$ имеет конечный ненулевой предел.

Допустим, что предела не существует, тогда найдутся числа $C_1 > C_2$, что $R(x)$ принимает значения большие $C_1$ и меньшие $C_2$ на любом интервале $(\tau, \infty)$. Выберем из интервала $(C_1, C_2)$ число $C$ так, чтобы $C^{\sigma-1} \neq k\alpha$. Тогда как отмечено выше, функция $Cx^{\alpha}$ на интервале $(x_1, \infty)$ будет верхним (или нижним) решением уравнения (1), график которого пересекается с графиком рассматриваемого решения $z(x)$, бесконечное число раз на интервале $(x_1, \infty)$, что противоречит определению верхнего (нижнего) решения.

Поэтому отношение $R(x)$ имеет предел. Допустим, что это бесконечный предел. Отметим, что $x^p z^{\sigma-1} = R^{\sigma-1} x^{-1}$. Поэтому по лемме 2 $z(x)$ растет быстрее $x^\beta$ при любом $\beta$, что противоречит оценке $z < Mx^{p/(1-\sigma)}$ леммы 1.

Допустим теперь, что предел $R(x)$ при $x \to \infty$ равен нулю. Тогда $x^p z^{\sigma-1} = R^{\sigma-1} x^{-1}$. Поэтому по лемме 3 $z(x)$ растет медленнее $x^\beta$ при любом $\beta > 0$. Выбрав $\beta < \alpha$, найдем, что $x^p z^{\sigma-1} = O(x^{-1-(\alpha-\beta)(\sigma-1)})$ при $x \to \infty$. И тогда получим, что

$$z(x) = C_1(1 + o(1)) + C_2 e^{-kx}(1 + o(1)) \qquad \text{при} \qquad x \to \infty,$$

что противоречит неограниченности функции $z(x)$.

Таким образом, доказано, что $R(x) = z(x)/x^\alpha \to C \neq 0$ при $x \to \infty$. Ясно, что $C^{\sigma-1} = k\alpha$. $\square$

Существование экспоненциально убывающих решений проводится с помощью теоремы Лерэ — Шаудера о существовании неподвижной точки отображения выпуклого множества в свое предкомпактное подмножество. Построение решений, стремящихся к ненулевой константе, проводится с помощью итерационного процесса, подобно работе [5].

# Литература

[1] Хачлаев Т.С. Асимптотическое поведение решений полулинейного эллиптического уравнения с растущим коэффициентом в цилиндрической области // Успехи математических наук. 2004. Т. 59. Вып. 2. С. 185–186.

[2] Сурначев М.Д. Асимптотическое поведение положительных решений уравнений Эмдена — Фаулера // Проблемы математического анализа. 2011. № 1. С. 129–176.

[3] Филимонова И.В. О поведении решений полулинейного параболического или эллиптического уравнения, удовлетворяющих нелинейному краевому условию, в цилиндрической области // Труды семинара им. И.Г. Петровского. 2007. Вып. 26. С. 369–390.

[4] Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. М.: Иностр. лит., 1954.

[5] Atkinson F.V. On second-order non-linear oscillations // Pacific Journal of Mathematics. 1955. V. 5(1). P. 643–647.

[6] Кигурадзе И.Т. Асимптотические свойства решений одного нелинейного дифференциального уравнения типа Эмдена — Фаулера // Изв. АН СССР. Сер.: Математика. 1965. Т. 29. Вып. 5. С. 965–986.

# References

[1] Khachlaev T.S. Asymptotic behavior of solutions of a semilinear elliptic equation with increasing coefficient in a cylindrical domain. *Uspekhi matematicheskikh nauk* [Russian Mathematical Surveys], 2004, Vol. 59. Issue 2, pp. 185–186 [in Russian].

[2] Surnachev M.D. Asymptotic behavior of positive solutions to Emden-Fowler type equations. [Problems of Mathematical Analysis], 2011, no. 1, pp. 129–176 [in Russian].

[3] Filimonova I.V. On the behavior of solutions of a semilinear parabolic or elliptic equation satisfying a nonlinear boundary condition in a cylindrical domain. *Trudy seminara im. I.G. Petrovskogo* [Proceedings of the seminar named after I.G. Petrovsky], 2007, Issue 26, pp. 369–390 [in Russian].

[4] Bellman R. Stability theory of solutions of differential equations. M., IL, 1954 [in Russian].

[5] Atkinson F.V. On second-order non-linear oscillations. *Pacific Journal of Mathematics*, 1955, Vol. 5(1), pp. 643-647 [in English].

[6] Kiguradze I.T. Asymptotic properties of solutions of a nonlinear differential equation of Emden-Fowler type. *Izv. AN SSSR. Seriia: Matematika* [Proceedings of the Academy of Sciences of the USSR. Series: Mathematics], 1965, Vol. 29, Issue 5, pp. 965–986 [in Russian].

***I.V. Filimonova, T.S. Khachlaev***[3]

# ON ASYMPTOTIC PROPERTIES OF SOLUTIONS, DEFINED ON THE HALF OF AXIS OF ONE SEMILINEAR ODE

The paper deals with the solutions of ordinary differential semi-linear equation, the coefficients of which depend on several real parameters. If the coefficient is chosen so that the equation does not contain the first-order derivative of the unknown function, it will be the case of Emden — Fowler equation. Asymptotic behavior of Emden — Fowler equation solutions at infinity is described in the book of Richard Bellman. The equations with the first-order derivative, considered in this work, erase in some problems for elliptic partial differential equations in unbounded domains. The sign of the coefficient in first-order derivative term essentially influences on the description of solutions. Partly the result of this paper can be obtained from the works of I.T. Kiguradze. In present work we use lemmas about the behavior of solutions of the linear equations with a strongly (weakly) increasing potential.

**Key words:** ordinary differential equations, nonlinear equations, semilinear equations, Emden — Fowler equation, asymptotic behavior of solutions, positive solutions, existence of solutions, maximum principle.

Статья поступила в редакцию 4/ *VI*/2015.

The article received 4/ *VI*/2015.

[3] *Filimonova Irina Vladimirovna* (filimi@yandex.ru), Department of Differential Equations, Lomonosov Moscow State University, 1, Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russian Federation.

*Khachlaev Timur Sultanovich* (khachlaev@mirea.ru), Department of Mathematics, Moscow State Institute of Radio Engineering, Electronics and Automation, 78, Vernadskogo Street, Moscow, 119454, Russian Federation.