УДК 517.9

В.В. Рогачёв[1]

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЙ С ЗАДАННЫМ ЧИСЛОМ НУЛЕЙ У РЕГУЛЯРНОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА ЭМДЕНА – ФАУЛЕРА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ[2]

Рассматривается уравнение типа Эмдена — Фаулера третьего порядка. Доказывается существование решения с заданным числом нулей на заданном отрезке. Этот результат расширяет результат, относящийся к уравнению Эмдена — Фаулера с постоянным коэффициентом, на случай переменного коэффициента.

Ключевые слова: уравнение типа Эмдена — Фаулера, переменный коэффициент, знакопеременные решения, число нулей решения уравнения.

Введение

Вопрос существования решений с заданным числом нулей на заданном интервале — один из важных вопросов в качественной теории дифференциальных уравнений. Исследованию существования таких решений посвящено много работ, среди которых можно выделить хорошо известные работы Штурма для линейных уравнений второго порядка, которые были продолжены в работах В.А. Кондратьева для уравнений 3-го, 4-го и более высокого порядка [4–6]. Исследование асимптотического поведения знакопеременных решений нелинейных уравнений содержится в работах И.Т. Кигурадзе и Т.А. Чантурия [7], И.В. Асташовой [1]. В частности, уравнения третьего порядка изучаются в работах [1, гл. 6, 7; 8]. В работах [2] исследовался вопрос о существовании решений с заданным числом нулей на заданном интервале для уравнения типа Эмдена — Фаулера третьего и четвертого порядков с регулярной и сингулярной нелинейностью и постоянным коэффициентом.

1. Основные результаты

Рассматривается уравнение

$$y''' = p(x, y, y', y'')|y|^k \operatorname{sgn} y, \quad k \in (1, \infty), \quad 0 < m \leqslant p(x, y_0, y_1, y_2) \leqslant M < \infty, \qquad (1.1)$$

Рогачёв Владимир Викторович (valdakhar@gmail.com), кафедра дифференциальных уравнений, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, 119991, Российская Федерация, г. Москва, ул. Ленинские горы, 1.

[2]Статья подготовлена по докладу конференции "СамДиф-2015".

функция $p(x, y_0, y_1, y_2)$ непрерывна, дифференцируема по своим аргументам и удовлетворяет условию Липшица по y_0, y_1, y_2. Для этого уравнения изучается вопрос о существовании решения с заданным числом нулей на отрезке. Доказывается следующая

Теорема 2.1. Для любых $k \in (1, \infty)$, $-\infty < a < b < +\infty$ и целого $j \geqslant 2$ уравнение (1.1) имеет решение, определенное на отрезке $[a, b]$, равное нулю в точках a, b и имеющее на этом отрезке ровно j нулей.

Замечание. Заменой $x \mapsto -x$ уравнение (1.1) приводится к уравнению вида

$$y''' + \tilde{p}(x, y, y', y'')|y|^k \operatorname{sgn} y = 0, \;\; k \in (1, \infty), \;\; 0 < m \leqslant \tilde{p}(x, y_0, y_1, y_2) \leqslant M < \infty, \quad (1.2)$$

решения которого — зеркально отражённые относительно оси Oy решения уравнения (1.1).

При доказательстве теоремы используются следующие леммы из [1].

Лемма 2.1 (лемма 7.1 из [1]). Пусть $y(x)$ — решение (1.2). Пусть в некоторой точке x_0 выполнены неравенства

$$y(x_0) \geqslant 0, \quad y'(x_0) > 0, \quad y''(x_0) \geqslant 0.$$

Тогда решение достигнет локального максимума в некоторой точке $x_0' > x_0$, причём

$$x_0' - x_0 \leqslant (\mu y'(x_0))^{-\frac{k-1}{k+2}},$$
$$y(x_0') > (\mu y'(x_0))^{\frac{3}{k+2}},$$
$$y''(x_0') < -(\mu y'(x_0))^{\frac{2k+1}{k+2}},$$

где $\mu > 0$ — константа, зависящая только от k, m, M.

Лемма 2.2 (лемма 7.2 из [1]). Пусть $y(x)$ — решение (1.2). Пусть в некоторой точке x_0' выполнены неравенства

$$y(x_0') > 0, \quad y'(x_0') \leqslant 0, \quad y''(x_0') \leqslant 0.$$

Тогда решение обратится в ноль в некоторой точке $x_0 > x_0'$, причём

$$x_0 - x_0' \leqslant (\mu y(x_0'))^{-\frac{k-1}{3}},$$
$$y'(x_0) < -(\mu y(x_0'))^{\frac{k+2}{3}},$$
$$y''(x_0) < -(\mu y(x_0))^{\frac{2k+1}{3}},$$

где $\mu > 0$ — константа, зависящая только от k, m, M.

Лемма 2.3 (лемма 7.3 из [1]). В условиях лемм 2.1, 2.2 для любого $x_1 > x_0$, при котором $y(x_0) = 0$, $y(x_1) = 0$, верно неравенство

$$|y'(x_1)| > Q|y'(x_0)|,$$

где $Q > 1$ — константа, зависящая только от k, m, M.

Доказательство теоремы 2.1. Проведём замену $x \mapsto -x$ и впредь будем рассматривать уравнение (1.2). Пусть $y(x)$ — решение уравнения (1.2). Из трёх приведённых лемм следует, что если в некоторой точке x_0 выполняется

$$y(x_0) \geqslant 0, \quad y'(x_0) > 0, \quad y''(x_0) \geqslant 0,$$

то правее x_0 существует точка x_1 такая, что

$$x_1 - x_0 \leqslant (\mu' y'(x_0))^{-\frac{k-1}{k+2}},$$

$$y(x_1) = 0, \quad y'(x_1) < -Qy'(x_0), \quad y''(x_1) < 0,$$

где $\mu' > 0$ и $Q > 1$ — константы, зависящие только от k, m и M.

Заметим, что при домножении $y(x)$ на -1 вид уравнения не изменится, поэтому справедливы аналогичные леммы и в случае, когда $y(x_0) \leqslant 0$, $y'(x_0) < 0$, $y''(x_0) \leqslant 0$.

Из оценок следует, что если в точке x_0 выполняется $y(x_0) \geqslant 0$, $y'(x_0) > 0$, $y''(x_0) \geqslant 0$, то решение будет колеблющимся, т. е. иметь возрастающую бесконечную последовательность нулей правее x_0.

Пусть $y(x, a, y_1, y_2)$ — зависящее от начальных данных семейство решений, т. е. при фиксированных a, y_1, y_2 функция $y(x) = y(x, a, y_1, y_2)$ является решением уравнения (1.2), удовлетворяющим начальным условиям $y(a) = 0$, $y'(a) = y_1$, $y''(a) = y_2$. Пусть для этого решения при фиксированных начальных данных x_i — i-й ноль решения, x'_i — i-й локальный экстремум, $L_i = x_i - x_{i-1}$ — расстояние между двумя соседними нулями.

Чтобы доказать, что для заданного отрезка $[a, b]$ есть решение, имеющее на отрезке ровно j нулей, рассмотрим $L = \sum_{i=1}^{j-1} L_i$ — расстояние от x_0 до $(j-1)$-го нуля. Пусть $x_0 = a$, $y(a) = 0$.

Если можно подобрать такие $y'(a) > 0$, $y''(a) > 0$, что $L = b - a$, то теорема верна, так как решение $y(x)$ в таком случае имеет ровно j нулей на отрезке $[a, b]$, причём $y(a) = y(b) = 0$. Будем рассматривать L как функцию, зависящую от $y'(a), y''(a)$.

Оценим L сверху. Уже доказано, что $L_1 \leqslant (\mu' y'(a))^{-\frac{k-1}{k+2}}$. Из леммы 2.3 следует, что в каждом следующем нуле модуль производной возрастает более чем в Q раз, поэтому

$$|y'(x_i)| \geqslant Q^i |y'(a)|.$$

Можно оценить L_i. Так как $-\frac{k-1}{k+2} < 0$, то верна оценка

$$L_i \leqslant (\mu' Q^{i-1} y'(a))^{-\frac{k-1}{k+2}} = \left(Q^{-\frac{k-1}{k+2}}\right)^{i-1} (\mu' y'(a))^{-\frac{k-1}{k+2}}.$$

Пусть $\tilde{Q} = Q^{-\frac{k-1}{k+2}}$. Так как $Q > 1, -\frac{k-1}{k+2} < 0$, то $0 < \tilde{Q} < 1$ и L_i оцениваются сверху членами убывающей геометрической прогрессии. Следовательно, L сверху можно оценить так:

$$L = L_1 + L_2 + \ldots + L_{j-1} \leqslant \frac{1 - \tilde{Q}^j}{1 - \tilde{Q}} (\mu' y'(a))^{-\frac{k-1}{k+2}} = c_1 (y'(a))^{-\frac{k-1}{k+2}},$$

$$L < c_1 (y'(a))^{-\frac{k-1}{k+2}}, \tag{1.3}$$

где c_1 — константа, зависящая только от k, m, M и j.

Оценим L снизу. Для этого достаточно оценить L_1 снизу. Рассмотрим $y(x)$ на отрезке $[a, a + L_1]$, где $y(x) \geqslant 0$, причем $y(a) = y(a + L_1) = 0$. Используя это, получаем:

$$0 < \int_a^{a+L_1} p(x, y, y', y'') y^{k+1} dx = -\int_a^{a+L_1} y y''' dx = \int_a^{a+L_1} y' dy' =$$

$$= \frac{(y'(a + L))^2 - (y'(a))^2}{2} = \int_a^{a+L_1} p(x, y, y', y'') y^{k+1} dx < L_1 M y(x'_0)^{k+1},$$

где x_0' — точка максимума решения на отрезке. Из этого неравенства и леммы 2.3 следует

$$L_1 > \frac{(\tilde{Q}^2-1)(y'(a))^2}{2My(x_0')^{k+1}}.$$

Для завершения оценки необходимо оценить $y(x_0')$ сверху. Рассматривая промежуток знакопостоянства, интегрируем уравнение $y''' = -p(x, y, y', y'')|y|^k$,

$$y(x) = y(a) + y'(a)|x-a| + y''(a)\frac{|x-a|^2}{2} - \int_a^x \int_a^x \int_a^x p(x, y, y', y'')y^k dx^3,$$

поэтому

$$y(x_0') < |x_0'-a|y'(a) + \frac{|x_0'-a|^2}{2}y''(a).$$

Из леммы 2.1 следует, что $|x_0'-a| < \tilde{\mu}(y'(a))^{-\frac{k-1}{k+2}}$, где $\tilde{\mu}$ — некоторая константа. Мы можем произвольно менять значения $y'(a)$, $y''(a)$, поэтому пусть $y''(a) = y'(a)^{1+\frac{k-1}{k+2}}$. Теперь L зависит от одного переменного значения — $y'(a)$. С этими изменениями верна следующая оценка:

$$y(x_0') < \tilde{\mu}(y'(a))^{-\frac{k-1}{k+2}}y'(a) + \frac{\tilde{\mu}^2}{2}(y'(a))^{-2\frac{k-1}{k+2}}y''(a) = \tilde{\mu}(y'(a))^{1-\frac{k-1}{k+2}} + \frac{\tilde{\mu}^2}{2}(y'(a))^{1+\frac{k-1}{k+2}-2\frac{k-1}{k+2}},$$

или

$$y(x_0') < c_2(y'(a))^{\frac{3}{k+2}},$$

где $c_2 > 0$ — константа, зависящая только от k, m, M.

Используя эту оценку, получаем

$$L > \frac{(\tilde{Q}^2-1)(y'(a))^2}{2My(x_0')^{k+1}} > c_3(y'(a))^{2-(k+1)\frac{3}{k+2}} = c_3(y'(a))^{-\frac{k-1}{k+2}}.$$

Вместе с выражением (1.3) получаем такую оценку на L:

$$c_3(y'(a))^{-\frac{k-1}{k+2}} < L < c_1(y'(a))^{-\frac{k-1}{k+2}}, \tag{1.4}$$

где c_1, c_3 — положительные константы, зависящие только от k, m, M и j.

Теперь докажем непрерывную зависимость L от $y'(a)$. Для этого сначала докажем непрерывность функции, показывающей расстояние до первого нуля решения $y(x)$. Решение уравнения непрерывно изменяется при непрерывной модификации начальных данных, но ноль произвольной функции при её непрерывном изменении может не меняться непрерывно. Покажем, что в нашем случае непрерывность есть.

Обозначим $y(x, a, y_1, y_2)$ — семейство решений (1.2), то есть при зафиксированных a, y', y'' $y(x)$ — решение, и $y(a) = 0, y'(a) = y_1, y''(a) = y_2$. Из лемм 2.1, 2.2 известно, что если $y_1 > 0$, $y_2 > 0$, то существует точка x_1, правее a, такая, что $y(x_1) = 0$, и до неё других нулей не будет. Если мы напишем функцию $L_1(a, y_1, y_2)$, описывающую расстояние от a до первого нуля решения $y(x, a, y_1, y_2)$, при $y_1 > 0$, $y_2 > 0$ она будет определена, положительна, но, возможно, разрывна.

Выпишем выражение

$$y(x, a, y_1, y_2) = 0.$$

В точке x_1 это равенство выполняется. Функция $y(x, a, y_1, y_2)$ гладкая по теореме о дифференцируемости решения по параметру. Производная $\frac{dy}{dx}(x, a, y_1, y_2)$ в точке x_1 не равна нулю, это следует из лемм. Тогда по теореме о неявной функции получаем, что в некоторой окрестности точки x_1 верно

$$y(x, a, y_1, y_2) = 0 \Leftrightarrow x = f(a, y_1, y_2)$$

и f — некоторая непрерывная функция. Если мы докажем, что в каждой окрестности $f(a, y_1, y_2)$ состоит только из первых нулей, мы докажем, что функция $L_1(a, y_1, y_2)$ непрерывна в каждой своей точке.

Для простоты записи доказательства считаем, что $a = 0$. Пусть $F(v) = L_1(0, y_1, y_2)$ — расстояние до первого нуля, где $v = \{y_1, y_2\}$. Очевидно, что $F(v) > 0$. По теореме о неявной функции для любой точки $\{u, F(u)\}$ есть прямоугольная окрестность $U(u) \times V(F(u))$, в которой существует непрерывная функция $f_u(v) : U(u) \to V(F(u))$, значения которой — нули решения $y(x)$ (не обязательно первые), причём $f_u(u) = F(u)$, и в упомянутой окрестности кроме $f_u(v)$ нет других нулей. Если в любой точке u в некоторой окрестности $U(u)$ есть совпадение $f_u(v) = F(v)$, то непрерывность $F(v)$ доказана.

Предположим, что существует хотя бы одна точка u^* такая, что в любой её окрестности есть несовпадение $f_{u^*}(v)$ и $F(v)$. Пусть $\{\tilde{v}\}$ — множество аргументов v, в которых несовпадение произошло. По определению u^*, это множество имеет предельную точку u^*, и $u^* \notin \{\tilde{v}\}$. Получается, что множество $\{\tilde{v}\}$ имеет как минимум счётное число элементов. Из множества $\{\tilde{v}\}$ выделим последовательность $\{v_n\}$, стремящуюся к u^*. Рассмотрим последовательность $\{x_n\} = \{F(\mathbf{v}_n)\}$. Снизу $\{x_n\}$ ограничена нулем, а сверху — окрестностью $V(F(u^*))$, ведь лежать в этой окрестности x_n не может, так как тогда $x_n = f_{u^*}(v_n)$, а если x_n выше этой окрестности, то x_n не будет первым нулём — он будет лежать после нуля $x = f_{u^*}(v_n)$.

Из ограниченной последовательности $\{x_n\}$ извлечём подпоследовательность $\{x_{n_i}\}$, сходящуюся к x^* — нижнему пределу $\{x_n\}$. Последовательность $\{x_{n_i}, v_{n_i}\}$ стремится к точке $\{x^*, u^*\}$, причём $x^* < F(u^*)$.

Переобозначив, мы получим последовательность точек $\{x_n, y'_n, y''_n\}$, стремящуюся к $\{x^*, y'^*, y''^*\}$. Заметим, что семейство решений $y(x, a, y_1, y_2)$ непрерывно по всем аргументам, и поэтому

$$y(x_n, 0, y'_n, y''_n) = 0,$$

откуда

$$y(x^*, 0, y'^*, y''^*) = 0.$$

То есть точка x^* является нулём решения уравнения при $\mathbf{y} = \mathbf{y}^*$, причём $x^* < F(\mathbf{y})$. Получается противоречие с тем, что $F(\mathbf{y})$ — первый ноль решения при этих начальных данных. Непрерывность доказана.

Функция $L_1(a, y_1, y_2)$ непрерывна в каждой своей точке при $y_1 > 0, y_2 > 0$. Из непрерывности изменения положения нуля следует непрерывность изменения значений производных в этом нуле. Поэтому $L_2, L_3, \ldots, L_i$, как и L_1, непрерывно меняются при трансформации $y'(a) > 0$, $y''(a) > 0$. Следовательно, L тоже непрерывна как сумма конечного числа непрерывных функций.

Считаем, что $y'(a) > 0$, $y''(a) = y'(a)^{1+\frac{k-1}{k+2}}$. Тогда относительно $y'(a)$ функция L непрерывна, и верна оценка (1.4). Эта оценка показывает, что L может быть больше любого заданного положительного числа, также L может быть сколь угодно близка к нулю. В сочетании с непрерывностью L это значит, что область значений L — все положительные числа, поэтому существуют такие начальные данные решения, что $L = b - a$.

Литература

[1] Асташова И.В. Качественные свойства решений квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа / под ред. И.В. Асташовой. М.: ЮНИТИ–ДАНА, 2012. С. 22–288.

[2] Асташова И.В., Рогачёв В.В. О числе нулей осциллирующих решений уравнений третьего и четвертого порядков со степенной нелинейностью // Нелінійні коливання. 2014. Т. 17. № 1. С. 16–31.

[3] Асташова И.В., Рогачёв В.В. О существовании решений с заданным числом нулей для уравнений типа Эмдена — Фаулера третьего и четвертого порядков // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49. № 11. С. 1509–1510.

[4] Кондратьев В.А. О колеблемости решения линейных дифференциальных уравнений третьего и четвертого порядка // ДАН СССР. 1958. Т. 118. № 1. С. 22–24.

[5] Кондратьев В.А. О колеблемости решений линейных уравнений третьего и четвертого порядка // Труды ММО. 1959. Т. 8. С. 259–281.

[6] Кондратьев В.А. О колеблемости решений уравнения $y^n+p(x)y=0$ // Труды ММО. 1961. Т. 10. С. 419–436.

[7] Кигурадзе И.Т., Чантурия Т.А. Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1990. 432 с.

[8] Smirnov S. On Some Spectral Properties of Third Order Nonlinear Boundary Value Problems // Mathematical Modelling and Analysis. 2012. V. 17. № 1. P. 78–89.

References

[1] Astashova I.V. Qualitative properties of solutions to quasilinear differential equations in *Qualitative properties of solutions to differential equations and related topics of spectral analysis: scientific edition.* Astashova I.V. (Ed.) M., IuNITI-DANA, 2012, pp. 22–288 [in Russian].

[2] Astashova I.V., Rogachev V.V. On the number of zeros of oscillating solutions of third and fourth order equations with power nonlinearity. *Нелінійні коливання* [Nonlinear Oscillations], 2014, Vol. 17, no 1, pp. 16–31 [in Russian].

[3] Astashova I.V., Rogachev V.V. On the existence of solutions with prescribed number of zeros to Emden–Fowler type third- and fourth-order equations. *Differentsial'nye uravneniia* [Differential Equations], 2013, Vol. 49, no. 6, pp. 1509–1510 [in Russian].

[4] Kondratiev V.A. On oscillation of solutions to linear third- and fourth-order differential equations. *DAN USSR* [Proceedings of the Academy of Sciences of the USSR], 1958, Vol. 118, no 1, pp. 22–24 [in Russian].

[5] Kondratiev V.A. On the oscillation of solutions for third and fourth order linear differential equations. *Trudy MMO* [Transactions of the Moscow Mathematical Society], 1959, Vol. 8, pp. 259–282 [in Russian].

[6] Kondratiev V.A. On the oscillation of solutions for the equation $y^{(n)}+p(x)y=0$. *Trudy MMO* [Transactions of the Moscow Mathematical Society], 1961, Vol. 10, pp. 419–436 [in Russian].

[7] Kiguradze I.T., Chanturia T.A. Asymptotic properties of solutions of nonautonomous ordinary differential equations. M., Nauka, 1990, 432 p. [in Russian].

[8] Smirnov S. On Some Spectral Properties of Third Order Nonlinear Boundary Value Problems. *Mathematical Modelling and Analysis*, 2012, Vol. 17, № 1, pp. 78–89 [in Russian].

V. V. Rogachev[3]

ON THE EXISTENCE OF SOLUTIONS WITH PRESCRIBED NUMBER OF ZEROS TO REGULAR NONLINEAR EMDEN – FOWLER TYPE THIRD-ORDER EQUATION WITH VARIABLE COEFFICIENT

A third order Emden — Fowler type equation is considered. Existence of solution with given number of zeros on given interval is proved. This theorem extends previous results, related to Emden — Fowler type equation with constant coefficient, in case of variable coefficient.

Key words: Emden — Fowler type equation, variable coefficient, oscillating solutions, number of zeros of solution to equation.

Статья поступила в редакцию 18/ *VII*/2015.

The article received 18/ *VII*/2015.

[3] *Rogachev Vladimir Victorovich* (`valdakhar@gmail.com`), Department of Differential Equations, Lomonosov Moscow State University, 1, Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russian Federation.