УДК 517, 621.391

С.Я. Новиков, М.Е. Федина[1]

ПРИНЦИПЫ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ НА ГРУППАХ И ВОССТАНОВЛЕНИЕ СИГНАЛОВ[2]

Показано, как принципы неопределенности гармонического анализа переносятся на конечные абелевы группы. Выделены недавние результаты Т. Тао и его соавторов о циклических группах простого порядка. Найдены аналоги гауссовых функций на конечных абелевых группах, индикаторные функции подгрупп. Доказан конечномерный вариант формулы суммирования Пуассона. Намечены возможности применения полученных результатов для восстановления дискретных сигналов по неполному набору коэффициентов. Сформулирован принцип частичной изометрии, в соответствии с которым можно определить минимальное количество измерений для устойчивого восстановления сигнала.

Ключевые слова: принципы неопределенности, циклические конечные группы, восстановление, разреженный сигнал, индикаторные функции, формула Пуассона.

Принцип неопределенности в гармоническом анализе утверждает: если функция $f : G \to \mathbb{C}$ на абелевой группе G сконцентрирована на маленьком множестве, то ее преобразование Фурье $\hat{f} : \hat{G} \to \mathbb{C}$ имеет "достаточно большой" носитель. Известно много результатов, точно выражающих этот принцип.

Например, для вещественной прямой $G = \mathbb{R}$ и стандартного преобразования Фурье $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi ix\xi}dx$ справедлив [1]

Принцип неопределенности Гейзенберга. Если $\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1$ и $x_0, \xi_0 \in \mathbb{R}$, то

$$\|(x - x_0)f\|_{L^2(\mathbb{R})}\|(\xi - \xi_0)\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R})} \geqslant \frac{1}{4\pi}.$$

Лаконичная запись этого принципа имеет следующий вид:$(\Delta_f x)(\Delta_f \xi) \geqslant \frac{1}{4\pi}$.

Равенство достигается на центрированных гауссовых функциях

$$f(x) = ce^{-\pi Ax^2}; \quad \hat{f} = \frac{c}{\sqrt{A}}e^{-\pi\xi^2/A}$$

при $x_0 = \xi_0 = 0$.

Новиков Сергей Яковлевич (nvks@samsu.ru), кафедра теории вероятностей и математической статистики, Самарский государственный университет, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

Федина Мария Ефимовна (phedina75@gmail.com), кафедра безопасности информационных систем, Самарский государственный университет, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

[2]Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках базовой части государственного задания, проект № 204.

Для конечной (абелевой) аддитивной группы $(G,+)$ пусть $\#G$ обозначает мощность G. Нормированная мера Хаара на этой группе — это нормированная считающая мера

$$\int_G f(x)dx := \frac{1}{\#G}\sum_{x\in G} f(x).$$

Получаем конечномерное гильбертово пространство $L^2(G)$ функций $f : G \to \mathbb{C}$ со скалярным или внутренним произведением

$$\langle f, g\rangle_{L^2(G)} := \int_G f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Так как группа G конечна, все нормы эквивалентны, так что $L^2(G) = L^1(G) = L^\infty(G)$. Каждый элемент группы $y \in G$ порождает оператор сдвига $\mathrm{Trans}_y : L^2(G) \to L^2(G)$, определенный соотношением

$$\mathrm{Trans}_y f(x) := f(x-y).$$

Каждый такой оператор является унитарным на $L^2(G)$, кроме того, отображение $y \mapsto \mathrm{Trans}_y$ является гомоморфизмом:

$$\mathrm{Trans}_y\mathrm{Trans}_z = \mathrm{Trans}_{y+z}. \tag{1}$$

Другими словами, отображение $y \mapsto \mathrm{Trans}_y$ является *унитарным представлением* группы G, действующей на гильбертовом пространстве, это $L^2(G)$, т. н. *регулярное представление*. Одно из следствий (1) состоит в том, что все сдвиги коммутируют между собой.

Свертка функций $f, g \in L^2(G)$ обозначается $f * g$, $f * g \in L^2(G)$ и определяется формулой

$$f * g := \int_G f(y)g(x-y)\,dy.$$

Свертка определяет билинейную, ассоциативную и коммутативную операцию (последнее только для абелевой группы). Существует единичный элемент $\delta \in L^2(G)$, определяемый в виде $\delta(x) := (\#G)1_{\{0\}}$, таким образом, $f * \delta = \delta * f = 1$.

Для фиксированной функции $g \in L^2(G)$ можно определить оператор свертки $T_g : L^2(G) \to L^2(G)$ следующим образом: $T_g f := g * f$ или в интегральной форме

$$T_g = \int_G g(y)\mathrm{Trans}_y dy.$$

Таким образом, операторы свертки оказываются линейными комбинациями операторов сдвига. Операторы свертки коммутируют между собой и инвариантны относительно сдвига. И обратно каждый инвариантный относительно сдвига оператор является оператором свертки (отображение $g \mapsto T_g$ можно рассматривать как представление сверточной алгебры $L^2(G)$ на себя).

Определим подпространство $V \subset L^2(G)$, инвариантное относительно сдвига, как подпространство V, инвариантное относительно всех сдвигов Trans_y, т. е. $\mathrm{Trans}_y V = V$ для всех y. Каждое такое подпространство есть компонента регулярного представления G. Эквивалентно V сохраняется при действии всех операторов свертки T_g. Кроме тривиальных примеров $\{0\}$, $L^2(G)$, простыми примерами являются подпространства констант $\{c : c \in G\}$ и подпространство $\{f \in L^2(G) : \int_G f = 0\}$ функций с нулевым средним. Другая важная пара примеров: ядро $\{f \in L^2(G) : T_g f = 0\}$ и образ $\{T_g f : f \in L^2(G)\}$ оператора свертки T_g (основано на том, что операторы свертки коммутируют со сдвигами). Векторная сумма и пересечение двух инвариантных относительно сдвига подпространств

инвариантно относительно сдвига. Так как операторы сдвига унитарны, ортогональное дополнение подпространства, инвариантного относительно сдвига, также инвариантно относительно сдвига.

Пример 1. Циклическая группа $G = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. Для данного $\xi \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ можно построить одномерное инвариантное относительно сдвига подпространство V_ξ, порожденное характером $e_\xi : x \mapsto e^{2\pi i x\xi/N}$. Подпространство инвариантно относительно сдвига, тогда оно является прямой суммой некоторых из этих подпространств V_ξ, или имеет вид $\{f \in L^2(G) : \hat{f}|_E = 0\}$ для некоторого фиксированного множества частот $E \subset \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$.

Так как $T_g\delta = g$ для всех $g \in L^2(G)$, получаем, что инвариантное относительно сдвига подпространство, содержащее сверточную единицу δ, будет совпадать со всем пространством $L^2(G)$, т. е. инвариантное относительно сдвига подпространство является собственным тогда, когда оно не содержит δ.

Из перечисленных выше фактов следует: (а) каждое собственное инвариантное относительно сдвига подпространство содержится в максимальном инвариантном относительно сдвига подпространстве; (б) каждое инвариантное относительно сдвига подпространство может быть представлено (возможно, разными способами) в виде прямой суммы *неприводимых* инвариантных относительно сдвига подпространств, т. е. ненулевых подпространств, которые не могут быть нетривиальным образом разбиты на сумму двух меньших инвариантных относительно сдвига подпространств. Можно показать, что инвариантное относительно сдвига подпространство неприводимо тогда, когда его ортогональное дополнение максимально.

Замечание 1. Ортогональная проекция на инвариантное относительно сдвига подпространство является оператором, инвариантным относительно сдвига, и поэтому является сверткой с некоторой функцией μ, в частности, $\mu * \mu = \mu$. Такие функции называются *идемпотентными мерами*. Они играли значительную роль в развитии гармонического анализа.

Предложение 1 (частный случай теоремы Гельфанда — Мазура [2]). Все максимальные инвариантные относительно сдвига подпространства являются гиперплоскостями (т. е. имеют коразмерность один).

Предложение 2. Все неприводимые инвариантные относительно сдвига подпространства одномерны.

Доказательство. Приведенные выше два предложения эквивалентны друг другу.

Пусть V — неприводимое инвариантное относительно сдвига подпространство, т. е. одномерное. Это означает, что каждый оператор сдвига Trans_y действует на V как умножение на комплексную константу $\chi_V(y)$. Так как Trans_y унитарный, получаем, что $|\chi_V(y)| = 1$. Также из (1) видим, что $\chi_V(y)$ гомоморфизм: $\chi_V(y + z) = \chi_V(y)\chi_V(z)$. Другими словами, $\chi_V : G \to S^1$ является *мультипликативным характером* G; обратно каждый мультипликативный характер $\chi : G \to S^1$ порождает одномерное подпространство, неприводимое, инвариантное относительно сдвига. Таким образом, неприводимые инвариантные относительно сдвига подпространства находятся во взаимно-однозначном соответствии с мультипликативными характерами. Используя экспоненциальную функцию $e : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to S^1$, $e(x) := e^{2\pi i x}$, можно записать каждый мультипликативный характер χ как $\chi = e(\xi)$,

где $\xi : G \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ — *аддитивный характер*, т. е. аддитивный гомоморфизм из G в $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Таким образом, неприводимые инвариантные относительно сдвига подпространства находятся также во взаимно-однозначном соответствии с аддитивными характерами. □

Замечание 2. Как следствие, имеем, что каждое максимальное инвариантное относительно сдвига подпространство является ортогональным дополнением мультипликативного характера χ.

Определим группу $\hat{G}$, дуальную к G (по Понтрягину), как пространство всех аддитивных характеров G; $\hat{G}$ образует аддитивную группу. Будем пользоваться обозначением $\xi \cdot x$ для $\xi(x) \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $x \in G, \xi \in \hat{G}$. Элементы будем называть частотами. Для фиксированной частоты ξ соответствующее неприводимое инвариантное относительно сдвига подпространство V_ξ является линейной оболочкой мультипликативного характера $e_\xi : x \mapsto e(\xi \cdot x)$.

Лемма (ортогональность). Если ξ, η — две различные частоты, то соотвествующие инвариантные относительно сдвига подпространства V_ξ и V_η ортогональны.

Доказательство. Достаточно показать, что e_ξ и e_η ортогональны, другими словами, надо показать, что выражение

$$I := \int_G e(\xi \cdot x) e(-\eta \cdot x)\, dx$$

равно нулю. Сдвигая x на y, видно, что

$$I = e(\xi \cdot y) e(-\eta \cdot y) I$$

для всех $y \in G$. Но так как ξ, η различны, то существует y такой, что $\xi \cdot y \neq \eta \cdot y$, и, следовательно, $I = 0$. □

Разбивая регулярные представления на неприводимые (а также ортогональные) компоненты, получаем

Следствие 1 (теорема Петера — Вейля [3], случай конечной абелевой группы). Имеет место равенство $L^2(G) = \bigoplus_{\xi \in \hat{G}} V_\xi$, из которого следует, что $\#G = \#\hat{G}$. Пространство $\{e_\xi : \xi \in \hat{G}\}$ мультипликативных характеров образует ортонормированный базис в $L^2(G)$.

Заметим, если $f \in L^2(G)$ и $\xi \in \hat{G}$, проекция f на V_ξ задается как $\hat{f}(\xi) e_\xi$, где $\hat{f}(\xi) = \langle f, e_\xi \rangle_{L^2(G)} = \int_G f(x) e(-\xi \cdot x) dx$. Таким образом, получаем

Следствие 2 (формула обращения Фурье). Для каждого $f \in L^2(G)$ имеем $f = \sum_{\xi \in \hat{G}} \hat{f}(\xi) e_\xi$.

Как еще одно следствие получается т. н. *тождество Планшереля*

$$\|f\|_{L^2(G)} = \|\hat{f}\|_{l^2(\hat{G})}$$

и более общее *тождество Парсеваля*

$$\langle f, g \rangle_{L^2(G)} = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle_{l^2(\hat{G})}.$$

Имеем тождество свертки

$$\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$$

и дуальное тождество

$$\widehat{fg} = \hat{f} * \hat{g},$$

где $*$ справа означает дискретную свертку (использующую считающую меру на $\hat{G}$ вместо нормированной считающей меры на G).

Заметим, что каждый $x \in G$ может рассматриваться как характер $x \mapsto \xi \cdot x$ на $\hat{G}$, таким образом получается каноническое отображение из G в $\hat{\hat{G}}$. Это отображение инъективно. Действительно, предположим, что x принадлежит ядру этого отображения, тогда $\xi \cdot x = 0$ для всех $\xi \in \hat{G}$, или эквивалентно Trans_x оставляет неподвижным каждый из характеров e_ξ. В силу формулы обращения Фурье Trans_x оставляет неподвижными все функции. Из теоремы Петера — Вейля известно, что мощности G и $\hat{\hat{G}}$ совпадают. Таким образом, отображение биективно. Другими словами дуальная по Понтрягину к $\hat{G}$ канонически отождествляется с самой G.

Пример 2. *Если* $G = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, каждый $\xi \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ порождает характер по формуле $\xi \cdot x := \xi x/N$. Они образуют N различных характеров и, следовательно, по теореме Петера — Вейля, других характеров не существует. Таким образом, абстрактное преобразование Фурье совпадает с обычным конечным преобразованием Фурье на $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$.

Имеет место стандартное соотношение между сдвигом и модуляцией: для каждого $f \in L^2(G)$ и $y \in G$, $\xi \in \hat{G}$

$$\widehat{\mathrm{Trans}_y} f = \mathrm{Mod}_{-y}\hat{f}; \quad \widehat{\mathrm{Mod}_\xi} f = \mathrm{Trans}_\xi \hat{f},$$

где $\mathrm{Mod}_{-y}F(\xi) := e(-\xi \cdot y)F(\xi)$ и $\mathrm{Mod}_\xi f(x) := e(\xi \cdot x)f(x)$.

Аналогами гауссовых функций на конечных абелевых группах являются индикаторные функции подгрупп.

Если $H \subseteq G$ — подгруппа G, определим *ортогональное дополнение* $H^\perp \subseteq \hat{G}$ как

$$H^\perp := \{\xi \in \hat{G} : \xi \cdot x = 0 \text{ для всех } x \in H\}.$$

Имеет место формула суммирования Пуассона

$$\widehat{1_H} = \frac{|H|}{|G|} 1_{H^\perp}$$

(в частности, преобразованием Фурье единицы является функция Дирака и наоборот). Отсюда и из формулы Планшереля получаем основное тождество

$$|H| \times |H^\perp| = |G|.$$

Для конечной абелевой группы G **принцип неопределенности Донохо — Старка** [4] принимает вид: для любой ненулевой функции $f : G \to \mathbb{C}$ имеем $|\mathrm{supp}(f)|\,|\mathrm{supp}(\hat{f})| \geqslant |G|$.

Доказательство. Объединить теорему Планшереля с неравенством Гельдера

$$\|f\|_{L^1(G)} \leqslant |supp(f)|^{1/2}|G|^{-1/2}\|f\|_{L^2(G)};$$

$$\|\hat{f}\|_{\ell^2(\hat{G})} \leqslant |\mathrm{supp}(\hat{f})|^{1/2}\|\hat{f}\|_{\ell^\infty(\hat{G})}$$

и неравенство Римана — Лебега

$$\|\hat{f}\|_{\ell^\infty(\hat{G})} \leqslant \|f\|_{L^1(G)}.$$

□

Можно показать, что равенство достигается на индикаторах 1_H подгрупп с точностью до сдвига, модуляции и умножения на константы.

Функциональные аналоги: если $f \in L^2(\mathbb{R})$, $\mathrm{supp} f \subseteq T$ и $\hat{f} \subseteq \Omega$ то $|T||\Omega| \geqslant 1$.

Если $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\mathrm{supp} f \subseteq T$, $\mathrm{supp}\hat{f} \subseteq \Omega$ и $|T||\Omega| < \infty$, то $f = 0$.

Для произвольных групп G и произвольных функций f невозможно получить лучшие оценки, чем приведенные выше принципы неопределенности, об этом говорят примеры с $f = 1_H$, если H — подгруппа G.

С другой стороны, для групп и функций специального вида можно ожидать улучшенных оценок.

Например, для циклической группы $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ простого порядка, которая не имеет нетривиальных подгрупп, имеем

Принцип неопределенности для $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ [5]. Пусть p — простое число. Если $f : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ нетривиальна, то

$$|\mathrm{supp}(f)| + |\mathrm{supp}(\hat{f})| \geqslant p + 1.$$

Обратно, если A и B — непустые подмножества $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ такие, что $|A|+|B| \geqslant p+1$, то существует функция f с $\mathrm{supp}(f) = A$ и $\mathrm{supp}(\hat{f}) = B$.

В [5] найдены связи этого принципа с результатом Чеботарева о том, что все миноры матрицы Фурье $(e(x\xi/p))_{1\leqslant x,\xi\leqslant p}$ невырождены.

Этот принцип неопределенности имеет приложения к арифметической комбинаторике, например, он влечет неравенство Коши — Давенпорта

$$|A + B| \geqslant \min(|A| + |B| - 1, p)$$

для подмножеств A, B множества $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Доказательство. Применить принцип неопределенности к функциям вида $f * g$, где f расположена на A, g расположена на B, и $\mathrm{supp}(\hat{f}), \mathrm{supp}(\hat{g})$ выбираются так, чтобы они имели наименьшее пересечение.

□

Принцип неопределенности для $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ можно проинтерпретировать следующим образом:

Если сигнал f — S-разреженный (т. е. $|\mathrm{supp}(f)| \leqslant S$), а $|\Omega| \geqslant S$, то $\hat{f}$ имеет на Ω, по крайней мере, один ненулевой коэффициент.

С точки зрения цифровой обработки сигналов, произвольные S коэффициентов Фурье позволяют обнаружить присутствие S-разреженного сигнала.

Для составных p это неверно. Если, например, N является точным квадратом, то $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ содержит подгруппу из $\sqrt{N}$ элементов, и индикатор этой подгруппы (т. н. Дирак-комб сигнал), являясь $\sqrt{N}$-разреженным, имеет $N - \sqrt{N}$ нулевых коэффициентов Фурье.

Еще одно следствие принципа неопределенности: если f — неизвестный разреженный сигнал, и удалось измерить $2S$ коэффициентов Фурье, то сигнал может быть точно восстановлен. В противном случае, если два S-разреженных сигнала f и g имеют совпадающие коэффициенты на Ω, то $2S$-разреженная разность $f-g$ имеет нулевые коэффициенты на Ω, что невозможно.

Утверждения такого типа характерны для сжатого зондирования (compressed sensing): возможность восстановления разреженного или сжатого сигнала, используя небольшое количество измерений, не имея сведений о расположении носителя сигнала (в стандартной ситуации для восстановления сигнала требуются все p

коэффициентов Фурье, разреженные сигналы имеют меньшую энтропию и, как следствие, восстанавливаются значительно меньшим количеством измерений, чем общий сигнал).

Практически сформулированные выше результаты не могут считаться удовлетворительными по двум причинам:

1) теоретически сигнал восстанавливается по $2S$ коэффициентам Фурье, однако если сигнал имеет $S+1$ ненулевых компонент, то его уже не удается, вообще говоря, восстановить по $2S$ измерениям;

2) процедура восстановления не является робастной (устойчивой) к возмущениям: важна простота числа p, нет устойчивости и по отношению к малым возмущениям f.

Обе эти проблемы решаются, если множество частот Ω удовлетворяет т. н. "принципу частичной изометрии" с параметрами S и δ:

$$(1-\delta)\frac{|\Omega|}{N}\|f\|^2_{L^2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} \leqslant \|\hat{f}\|^2_{\ell^2(\Omega)} \leqslant (1+\delta)\frac{|\Omega|}{N}\|f\|^2_{L^2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}}$$

для всех S-разреженных сигналов f.

Заметим, что множитель $\frac{|\Omega|}{N}$ согласован с теоремой Планшереля. Он показывает, что Ω всегда схватывает "порядочную долю" энергии разреженного сигнала. Таким образом, Ω не только обнаруживает присутствие S-разреженного сигнала, но "вылавливает" большую его часть.

"Принцип частичной изометрии" полезен в сжатом зондировании.

Теорема [6]. Если $\Omega \subset \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ удовлетворяет "принципу частичной изометрии" с параметрами $4S$ и $\delta = 1/4$, то любой S-разреженный сигнал f является единственным решением $g : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ задачи $\hat{g} \mid_\Omega = \hat{f} \mid_\Omega$ с минимальной $\ell_1(G)$-нормой. В частности, сигнал f может быть восстановлен по коэффициентам Фурье $\hat{f} \mid_\Omega$ с помощью выпуклой оптимизации.

Литература

[1] Gröchenig K. Foundations of Time-Frequency Analysis. Boston; Basel; Berlin: Birkhäuser. 2000. 360 p.

[2] Рудин У. Функциональный анализ. М.: Мир, 1975. 443 с.

[3] Понтрягин Л.С. Непрерывные группы. М.: Наука: Физматлит. 1973. 527 с.

[4] Donoho D.L., Stark P.B., Edidin D. Uncertainty principles and signal recovery // Journal Applied Mathematics (SIAM). 1989. V. 49. I. 3. P. 906–931.

[5] Tao T. An uncertainty principle for cyclic groups of prime order // Mathematical Research Letters. 2005. V. 12. P. 121–127.

[6] Candes E.J., Romberg J., Tao T. Robust uncertainty principles: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information // IEEE Trans. Inform. Theory. 2004. V. 52. P. 489–509.

References

[1] Gröchenig K. Foundations of Time-Frequency Analysis. Boston-Basel-Berlin, Birkhäuser, 2000, 360 pp. [in English].

[2] Rudin U. Functional analysis. M., Mir, 1975, 443 p. [in Russian].

[3] Pontryagin L.S. Continuous groups. M., Nauka. Fizmatlit, 1973, 527 p. [in Russian].

[4] Donoho D.L., Stark P.B., Edidin D. Uncertainty principles and signal recovery. *SIAM Journal Applied Mathematics*, 1989, V. 49, I. 3, pp. 906–931 [in English].

[5] Tao T. An uncertainty principle for cyclic groups of prime order. *Mathematical Research Letters*, 2005, Vol. 12, pp. 121–127 [in Russian].

[6] Candes E.J., Romberg J., Tao T. Robust uncertainty principles: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 2004, Vol. 52, pp. 489–509 [in Russian].

S.Y. Novikov, M.E. Fedina[3]

UNCERTAINTY PRINCIPLES FOR GROUPS AND RECONSTRUCTION OF SIGNALS[4]

Uncertainty principles of harmonic analysis and their analogues for finite abelian groups are considered in the paper. Special attention is paid to the recent results of T. Tao and coauthors about cyclic groups of prime order. It is shown, that indicator functions of subgroups of finite Abelian groups are analogues of Gaussian functions. Finite-dimensional version of Poisson summation formula is proved. Opportunities of application of these results for reconstruction of discrete signals with incomplete number of coefficients are suggested. The principle of partial isometric whereby we can determine the minimum number of measurements for stable recovery of the signal are formulated.

Key words: uncertainty principles, cyclic finite groups, reconstruction, sparse signal, indicator functions, Poisson formula.

Статья поступила в редакцию 28/ *V*/2015.

The article received 28/ *V*/2015.

[3] *Novikov Sergey Yakovlevich* (nvks@samsu.ru), Department of Probability Theory and Mathematical Statistics, Samara State University, 1, Acad. Pavlov Street, Samara, 443011, Russian Federation.

Fedina Maria Efimovna (phedina75@gmail.com), Department of Security of Information Systems, Samara State University, 1, Acad. Pavlov Street, Samara, 443011, Russian Federation.

[4] The work was supported by the Russian Ministry of Education as part of the basic part of a state task, project № 204.