УДК 517.9

Н.А. Манакова, К.В. Васючкова[1]

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОБОБЩЕННОЙ МОДЕЛИ ХОФФА[2]

Работа посвящена численному исследованию обобщенной модели Хоффа. Уравнение Хоффа моделирует динамику выпучивания двутавровой балки находящейся под постоянной нагрузкой. Показано существование единственного слабого обобщенного решения задачи Шоуолтера – Сидорова для исследуемой модели на основе модифицированного метода Галеркина – Петрова. Данное уравнение относится к полулинейным уравнениям соболевского типа. Уравнения соболевского типа составляют обширную область неклассических уравнений математической физики. На основе теоретических результатов разработан алгоритм численного решения задачи. Приведен результат вычислительного эксперимента.

Ключевые слова: уравнение Хоффа, численное моделирование, метод Галеркина, уравнения соболевского типа, задача Шоуолтера – Сидорова, слабое обобщенное решение, монотонные операторы, метод монотонности.

1. Обобщенная математическая модель Хоффа

В цилиндре $\Omega \times \mathbb{R}_+$ рассмотрим условие Дирихле

$$x(s,t) = 0, \quad (s,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_+ \tag{1.1}$$

и условие Шоуолтера – Сидорова

$$(\lambda + \Delta)(x(s,0) - x_0(s)) = 0, \quad s \in \Omega \tag{1.2}$$

для обобщенного уравнения Хоффа

$$(-\lambda - \Delta)x_t + \alpha x + \alpha_1 x^3 + \alpha_2 x^5 + ... + \alpha_{k-1} x^{2k-1} + \alpha_k x^{2k+1} = y, \tag{1.3}$$

которое моделирует динамику выпучивания двутавровой балки. Функция $x = x(s,t)$ характеризует отклонения балки от положения равновесия. Параметр $\lambda \in \mathbb{R}$ характеризует нагрузку, а параметры $\alpha, \alpha_i \in \mathbb{R}_+,\ i = 1, ...k$, характеризуют

Манакова Наталья Александровна (manakovana@susu.ac.ru), *Васючкова Ксения Владимировна* (vasiu4kova@yandex.ru), кафедра уравнений математической физики, Южно-Уральский государственный университет, 454080, Российская Федерация, г. Челябинск, пр. Ленина, 76.
[2]Статья подготовлена по докладу конференции "СамДиф-2015".

свойства материала балки, $y = y(s,t)$ – внешнее (боковое, в случае $n = 1$) воздейтвие. Уравнение (1.3) получено Н.Дж. Хоффом [1] в случае $n = 1$. Впервые однозначная разрешимость задачи Коши для модели (1.1), (1.3) была установлена Г.А. Свиридюком [2]. Впервые метод Галеркина для полулинейных уравнений соболеского типа был рассмотрен в работе Г.А. Свиридюка, Т.Г. Сукачевой [3]. В случае вырожденных полулинейных уравнений для нахождения приближенных решений наиболее подходящим является метод Галеркина [4; 5].

Будем искать приближенные решения задачи (1.1)–(1.3) в виде

$$x_m(s,t) = \sum_{k=1}^{m} a_i(t)\varphi_i(s), \quad m > \dim\ \ker(-\lambda - \Delta), \tag{1.4}$$

где $\{\varphi_k\}$ – последовательность собственных функций однородной задачи Дирихле для оператора $(-\Delta)$ в области Ω, а $\{\lambda_k\}$ – соответствующая им последовательность собственных значений, занумерованная по неубыванию с учетом кратности. Построим множество

$$\operatorname{coim}(-\lambda - \Delta) = \{x \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega): \quad < x, \varphi >= 0 \quad \forall \varphi \in \ker(-\lambda - \Delta),\ \ \varphi \neq 0\}.$$

Пусть $\mathfrak{X} = \{x \mid x \in L_\infty(0,T; \operatorname{coim}(-\lambda - \Delta)) \ \cap\ L_{2k+2}(0,T; L_{2k+2}(\Omega)),$
$\dfrac{dx}{dt} \in L_2(0,T; \operatorname{coim}(-\lambda - \Delta))\}.$

Определение 1. Слабым обобщенным решением уравнения (1.3) назовем вектор-функцию $x \in \mathfrak{X}$, удовлетворяющую условию

$$\int_0^T \varphi(t) \left[\int_\Omega \big(-\lambda x_t w + \nabla x_t \cdot \nabla w + (\alpha x + \alpha_1 x^3 + \alpha_2 x^5 + ... + \alpha_{k-1} x^{2k-1} + \right.$$

$$\left. + \alpha_k x^{2k+1}) w\big)\, ds\right] dt = \int_0^T \left[\varphi(t) \int_\Omega y w ds \right] dt \ \ \forall w \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega), \forall \varphi \in L_2(0,T).$$

Решение уравнения (1.3) назовем решением задачи Шоуолтера – Сидорова, если оно удовлетворяет (1.2).

Теорема 1 [6]. Пусть $k = 1$ при $n = 4$ или $k = 1,2$ при $n = 3$ или $k \in \mathbb{N}$ при $n = 1,2$ и $\lambda \leqslant \lambda_1, \alpha, \alpha_j \in \mathbb{R}_+$. Тогда при любых $x_0 \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ и $y \in L_{\frac{2k+2}{2k+1}}(0,T; L_{\frac{2k+2}{2k+1}}(\Omega))$ существует единственное решение $x \in \mathfrak{X}$ задачи (1.1)–(1.3).

Теорема 1 устанавливает сходимость приближенного решения (1.4) к точному.

2. Численный алгоритм исследования обобщенной модели Хоффа

На основе теоретических результатов и модифицированного метода Галеркина – Петрова был разработан и реализован в среде Maple 18.0 алгоритм численного решения задачи (1.1) – (1.3) на отрезке. Приведем алгоритм нахождения приближенного решения задачи (1.1) – (1.3), описывающий работу программы.

1 этап. Ввод параметров обобщенного уравнения Хоффа, начальных и краевых условий, а также число галеркинских приближений m.

2 этап. При помощи цикла от 1 до m формируется приближенное решение в виде галеркинской суммы (1.4) и подставляется в обобщенное уравнение Хоффа

$$(-\lambda-\Delta)\tfrac{d}{dt}\left(\sum_{k=1}^{m}a_k(t)\varphi_k(s)\right)+\alpha\sum_{k=1}^{m}a_k(t)\varphi_k(s)+\alpha_1\left(\sum_{k=1}^{m}a_k(t)\varphi_k(s)\right)^3+$$
$$+\alpha_2\left(\sum_{k=1}^{m}a_k(t)\varphi_k(s)\right)^5+...+\alpha_{k-1}\left(\sum_{k=1}^{m}a_k(t)\varphi_k(s)\right)^{2k-1}+$$
$$+\alpha_k\left(\sum_{k=1}^{m}a_k(t)\varphi_k(s)\right)^{2k+1}=\sum_{k=1}^{m}y(t)\varphi_k(s).$$

3 этап. Скалярно умножив уравнение, полученное на предыдущем шаге, на собственные функции $\varphi_k(s)$, $k=1,...,m$, генерируется система алгебро-дифференциальных уравнений. Формируются начальные условия путем разложения функции $x_0(s)$ в ряд Фурье.

4 этап. Численно решается система алгебро-дифференциальных уравнений с начальными условиями методом Рунге – Кутты 4-го порядка.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий работу программы.

Пример 1. Рассмотрим задачу (1.1) – (1.3) при следующих условиях: $\Omega = (0,\pi)$, $x_0(s)=4\sin(s)+\sin(2s)+\sin(3s)-\sin(4s)$, $\lambda=1$, $\alpha=2$, $\alpha_1=2$, $\alpha_2=4$, $\alpha_3=3$, $m=4$, $T=2$.

Решение задачи Шоуолтера – Сидорова (1.1) – (1.3) будем искать в виде галеркинской суммы (1.4), где $\{\varphi_k\}$ – множество всех решений краевой задачи на собственные значения $X''(x)=\lambda X(x)$, $\quad X(0)=X(\pi)=0$. Известно, что $\varphi_k = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(ks)$, а $\lambda_k=-k^2$.

Результат численного решения системы алгебро-дифференциальных уравнений с учетом начальных условий представлен в таблице (с точностью до 10^{-6}) и на рисунке.

Таблица

Численное решение задачи (1.1)–(1.3)

t	$a_1(t)$	$a_2(t)$	$a_3(t)$	$a_4(t)$
0	2.828427	0.707106	0.707104	-0.707102
0.2	0.279891	0.257962	0.611614	-0.568994
0.4	0.220456	0.254195	0.587466	-0.543493
0.6	0.214987	0.249891	0.569783	-0.522189
0.8	0.222214	0.245174	0.555535	-0.503132
1.0	0.233325	0.240224	0.543575	-0.485608
1.2	0.245917	0.235111	0.533270	-0.469222
1.4	0.259214	0.229864	0.524211	-0.453716
1.6	0.272918	0.224495	0.516113	-0.438912
1.8	0.286893	0.219008	0.508768	-0.424678
2.0	0.301056	0.213409	0.502019	-0.410917

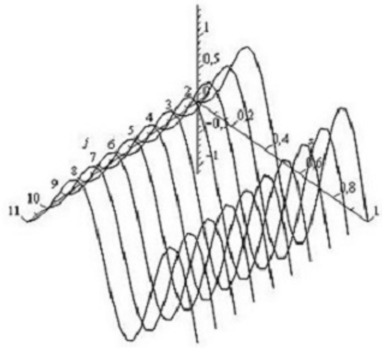

Рис. Численное решение задачи (1.1)–(1.3)

Литература

[1] Hoff N.J. Creep Buckling // Journal of the Aeronautical Sciences. 1956. № 7. P. 1–20.

[2] Свиридюк Г.А. Квазистационарные траектории полулинейных динамических уравнений типа Соболева // Известия АН СССР. Сер.: Математическая. 1993. Т. 57. № 3. С. 192–207.

[3] Свиридюк Г.А., Сукачева Т.Г. О галеркинских приближениях сингулярных нелинейных уравнений типа Соболева // Известия вузов. Сер.: Математика. 1989. № 10. С. 44–47.

[4] Манакова Н.А. Об одной модели оптимального управления уравнением Осколкова // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. 2008. № 27(127). Вып. 2. С. 63–70.

[5] Bayazitova A.A. Hoff's Model on a Geometric Graph. Simulations // Вестник ЮУрГУ. Сер.: Математическое моделирование и программирование. 2015. Т. 7. № 3. С. 84–93.

[6] Свиридюк Г.А., Манакова Н.А. Задача оптимального управления для уравнения Хоффа // Сибирский журнал индустриальной математики. 2005. Т. 8. № 2. С. 144–151.

References

[1] Hoff N.J. Creep Buckling. *Journal of Aeronautical Sciences*, 1956, № 7, pp. 1–20 [in English].

[2] Sviridyuk G.A. Quasistationary trajectories of semilinear dynamical equations of Sobolev type. *Izvestiia AN SSSR. Seriia matematicheskaia* [Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Series Mathematics], 1993, Vol. 57, №. 3, pp. 192–207 [in Russian].

[3] Sviridyuk G.A., Sukacheva T.G. Galerkin approximations of singular nonlinear equations of Sobolev type. *Izvestiia vuzov. Matematika.* [News of Higher Educational Institutions. Mathematics], 1989, №. 10, pp. 44–47 [in Russian].

[4] Manakova N.A. On a model of optimal control of the Oskolkov equation. *Vestnik IuUrGU. Seriia: Matematicheskoe modelirovanie i programmirovanie* [Vestnik of South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software], 2008, № 27(127), Issue 2, pp. 63–70 [in Russian].

[5] Bayazitova A.A. Hoff's Model on a Geometric Graph. Simulations. *Vestnik IuUrGU. Seriia: Matematicheskoe modelirovanie i programmirovanie* [Vestnik of South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software], 2015, Vol. 7, № 3, pp. 84–93 [in Russian].

[6] Sviridyuk G.A., Manakova N.A. An optimal control problem for the Hoff equation. *Sibirskii zhurnal industrial'noi matematiki* [Journal of Applied and Industrial Mathematics], 2005, Vol. 8, № 2, pp. 144–151

N.A. Manakova, K.V. Vasyuchkova[3]

NUMERICAL INVESTIGATION OF THE GENERALIZED HOFF MODEL

The work is devoted to the numerical investigation of the generalized Hoff model. Hoff equation models the dynamics of buckling construction of I-beams under a constant load. Result of existence and uniqueness of solution to the Showalter – Sidorov problem for the investigated model is formulated. This equation is a semilinear Sobolev type equation. Sobolev type equations constitute a vast area of non-classical equations of mathematical physics. Based on the theoretical results there was developed the algorithm of numerical solution of the problem.

Key words: Hoff equation, numerical modelling, Galerkin's method, Sobolev type equations, Showalter – Sidorov problem, weak generalized solution, monotone operators, monotone method.

Статья поступила в редакцию 18/*VI*/2015.

The article received 18/*VI*/2015.

[3] *Manakova Natalia Aleksandrovna* (manakovana@susu.ac.ru), *Vasyuchkova Ksenia Vladimirovna* (vasiu4kova@yandex.ru), Department of Equations of Mathematical Physics, South Ural State University, 76, Prospekt Lenina, Chelyabinsk, 454080, Russian Federation.