УДК 517.9

А.А. Замышляева, С.В. Суровцев[1]

НАХОЖДЕНИЕ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ – ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БУССИНЕСКА – ЛЯВА МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ[2]

Статья посвящена численному исследованию математической модели Буссинеска — Лява. На основе метода фазового пространства и применения метода конечных разностей построен алгоритм нахождения численного решения задачи Коши — Дирихле для уравнения Буссинеска — Лява, моделирующей продольные колебания в тонком упругом стержне с учетом поперечной инерции. Данная задача может быть редуцирована к задаче Коши для уравнения соболевского типа второго порядка, которая, как известно, разрешима не при всех начальных значениях. Разработанный алгоритм содержит предварительную проверку принадлежности начальных данных фазовому пространству. Алгоритм реализован в виде программы в среде Matlab. Приведены результаты вычислительных экспериментов в регулярном и вырожденном случаях. Представлены графики полученных решений.

Ключевые слова: уравнение Буссинеска — Лява, задача Коши — Дирихле, метод конечных разностей, уравнение соболевского типа, фазовое пространство, условия согласования, система разностных уравнений, метод прогонки.

Рассмотрим уравнение Буссинеска – Лява

$$(\lambda - \Delta)u_{tt} = \alpha(\lambda' - \Delta)u_t + \beta(\lambda'' - \Delta)u, \qquad 0 < x < \pi, \quad t > 0 \tag{1}$$

с начальными

$$\begin{aligned} u(x,0) = \varphi(x), \qquad 0 < x < \pi \\ u_t(x,0) = \psi(x), \qquad 0 < x < \pi \end{aligned} \tag{2}$$

и краевыми

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \qquad t > 0 \tag{3}$$

условиями. Здесь $u = u(x,t)$ – неизвестная функция, φ, ψ – заданные функции, они подлежат дальнейшему определению, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ – одномерный оператор Лапласа. Математическая модель (1)–(3) описывает продольные колебания в тонком упругом стержне с учетом поперечной инерции [1]. Задача (1)–(3) изучалась ранее А.А. Замышляевой [2] и ее учениками [3–5]. В работе [6] построен алгоритм численного решения задачи (1)–(3) на основе модифицированного метода Галеркина.

Замышляева Алена Александровна (alzama@mail.ru), *Суровцев Сергей Викторович* (ssw-92@ya.ru), кафедра уравнений математической физики, Южно-Уральский государственный университет, 454080, Российская Федерация, г. Челябинск, пр. Ленина, 76.

[2]Статья подготовлена по докладу конференции "СамДиф-2015".

Математическая модель (1)–(3) может быть редуцирована к задаче Коши

$$u(0) = \varphi, \quad \dot{u}(0) = \psi \tag{4}$$

для уравнения

$$A\ddot{u} = B_1\dot{u} + B_0 u. \tag{5}$$

Если оператор A является непрерывно обратимым, то уравнения вида (5) принято называть невырожденными или регулярными. В противном случае, в частности, когда $\ker A \neq \{0\}$, уравнение вида (5) будет уравнением соболевского типа. Известно, что задача Коши для уравнений соболевского типа принципиально не разрешима при произвольных начальных значениях. На наш взгляд, наиболее плодотворным (если считать уже имеющиеся приложения) подходом к изучению таких уравнений является метод фазового пространства, основы которого были заложены Г.А. Свиридюком и Т.Г. Сукачевой [7] при изучении полулинейного уравнения соболевского типа первого порядка.

В работе [6] рассмотрены три случая в зависимости от параметров $\lambda, \lambda', \lambda''$. В случаях, когда $\lambda \notin \sigma(\Delta)$ и $(\lambda \in \sigma(\Delta)) \wedge (\lambda = \lambda' \neq \lambda'')$, построено фазовое пространство уравнения (1), что подтверждает результаты [2]. В случае $(\lambda \in \sigma(\Delta)) \wedge (\lambda \neq \lambda')$, который был исключен в [2], получены необходимые условия однозначной разрешимости задачи (1)–(3) в виде соотношения между функциями $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, таким образом, показано, что фазовое пространство в смысле [2] не существует.

В данной работе приближенное решение задачи (1)–(3) строится с помощью метода конечных разностей. На прямоугольнике $(0, \pi) \times (0, T)$ построим сетку

$$x_i = h \cdot i, \ \ i = \overline{0, N}, \ \ h = \frac{\pi}{N}, \ \ t_j = \tau \cdot j, \ \ j = \overline{0, M}, \ \ \tau = \frac{T}{M}$$

и определим сеточную функцию

$$u_{i,j} = u(x_i, t_j), i = \overline{0, N}, j = \overline{0, M}.$$

Тогда

$$u_t(x_i, t_j) = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\tau}, \tag{6}$$

вторая производная по t:

$$u_{tt}(x_i, t_j) = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\tau^2}, \tag{7}$$

вторая производная по x:

$$u_{xx}(x_i, t_j) = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}, \tag{8}$$

$i = \overline{2, N-1}, j = \overline{2, M-1}$.

Подставив (6)–(8) в (1) и приведя подобные, получим:

$$\begin{gathered}
u_{i+1,j+1}\left(-\tfrac{1}{\tau^2 \cdot h^2} - \tfrac{\alpha}{2\tau \cdot h^2}\right) + u_{i,j+1}\left(\tfrac{\lambda}{\tau^2} + \tfrac{2}{\tau^2 \cdot h^2} + \tfrac{\alpha\lambda'}{2\tau} + \tfrac{2\alpha}{2\tau \cdot h^2}\right) + \\
+ u_{i-1,j+1}\left(-\tfrac{1}{\tau^2 \cdot h^2} - \tfrac{\alpha}{2\tau \cdot h^2}\right) + u_{i+1,j}\left(\tfrac{2}{\tau^2 \cdot h^2} - \tfrac{\beta}{h^2}\right) + \\
+ u_{i,j}\left(-\tfrac{2\lambda}{\tau^2} - \tfrac{4}{\tau^2 \cdot h^2} + \beta\lambda'' + \tfrac{2\beta}{h^2}\right) + u_{i-1,j}\left(\tfrac{2}{\tau^2 \cdot h^2} - \tfrac{\beta}{h^2}\right) + \\
+ u_{i+1,j-1}\left(-\tfrac{1}{\tau^2 \cdot h^2} + \tfrac{\alpha}{2\tau \cdot h^2}\right) + u_{i,j-1}\left(\tfrac{\lambda}{\tau^2} + \tfrac{2}{\tau^2 \cdot h^2} - \tfrac{\alpha\lambda'}{2\tau} - \tfrac{2\alpha}{2\tau \cdot h^2}\right) + \\
+ u_{i-1,j-1}\left(-\tfrac{1}{\tau^2 \cdot h^2} + \tfrac{\alpha}{2\tau \cdot h^2}\right) = 0,
\end{gathered}$$

где $i = \overline{2, N-1}, j = \overline{2, M-1}$. Далее фиксируем j и решаем полученную систему уравнений относительно $(j+1)$-го слоя по t методом прогонки. Блок-схема алгоритма программы представлена на рис. 1.

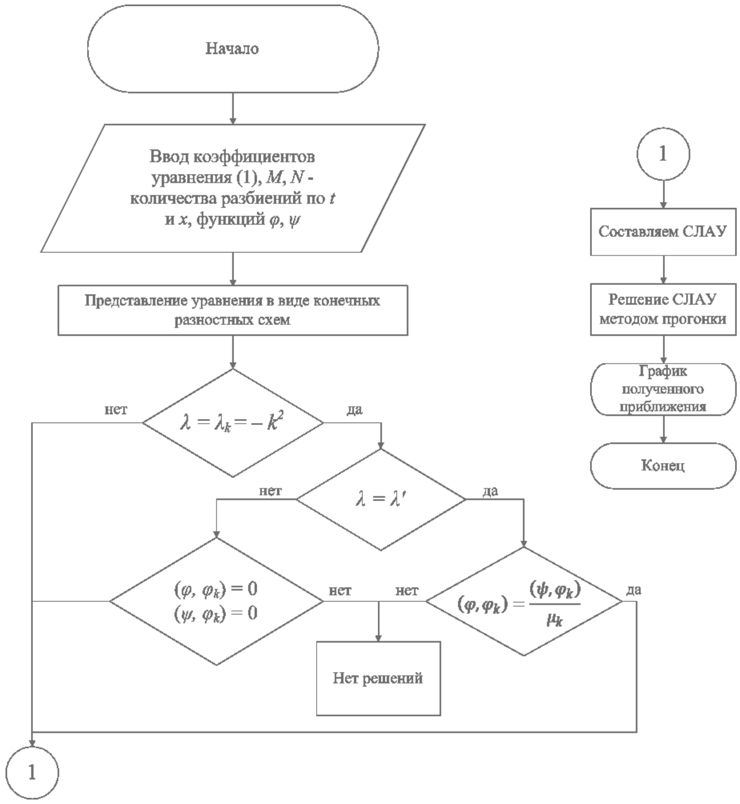

Рис. 1. Блок-схема алгоритма

Пример 1. Рассмотрим математическую модель

$$\begin{cases} (\lambda - \Delta)u_{tt} = \alpha(\Delta - \lambda')u_t + \beta(\Delta - \lambda'')u, \\ u(x,0) = \sin(x), \;\; u_t(x,0) = \sin(x) + \sin(2x), \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0. \end{cases}$$

с параметрами $\alpha = -1, \beta = -1, \; \lambda = 2, \lambda' = -1, \lambda'' = 3$, количеством шагов по x: $N = 40$, по t: $M = 60$. Данная математическая модель невырождена, следовательно, решение существует. На рис. 2 представлен график решения.

Пример 2. Рассмотрим математическую модель

$$\begin{cases} (\lambda - \Delta)u_{tt} = \alpha(\Delta - \lambda')u_t + \beta(\Delta - \lambda'')u, \\ u(x,0) = \sin(3x), \;\; u_t(x,0) = \sin(2x) + \sin(3x), \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \end{cases}$$

с параметрами $\alpha = -1, \beta = -1, \lambda = -1, \lambda' = -1, \lambda'' = 3$. Так как $\lambda = \lambda' = \lambda_1$ (совпадают с первым собственным значением оператора Лапласа), то для существования решения необходимо, чтобы начальные функции принадлежали фазовому пространству уравнения, т. е. были выполнены условия [6]:

$$\int_0^\pi \psi(x) \cdot \sin(x)dx = 0 \quad \text{и} \quad \int_0^\pi \varphi(x) \cdot \sin(x)dx = 0.$$

График решения представлен на рис. 3.

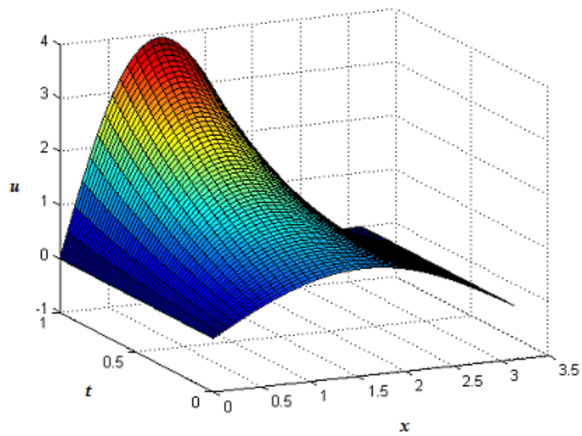

Рис. 2. График решения задачи из примера 1 при $\lambda = 2, \lambda' = -1, \lambda'' = 3$

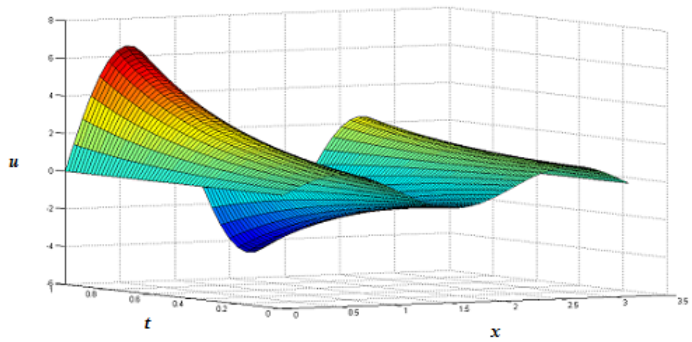

Рис. 3. График решения задачи из примера 2

Литература

[1] Ляв А. Математическая теория упругости / пер. с англ. Б.В. Булгакова, В.Я. Натанзона. М.; Л.: ОНТИ, 1935.

[2] Замышляева А.А. Математические модели соболевского типа высокого порядка // Вестник ЮУрГУ. Сер.: Математическое моделирование и программирование. 2014. Т. 7. № 2. С. 5–28.

[3] Замышляева А.А., Бычков Е.В. Фазовое пространство модифицированного уравнения Буссинеска // Вестник ЮУрГУ. Сер.: Математическое моделирование и программирование. 2012. № 18(277). Вып. 12. С. 13–19.

[4] Замышляева А.А., Юзеева А.В. Начально-конечная задача для уравнения Буссинеска — Лява // Вестник ЮУрГУ. Сер.: Математическое моделирование и программирование. 2010. № 16(192). Вып. 5. С. 23–31.

[5] Замышляева А.А., Цыпленкова О.Н. Оптимальное управление решениями начально-конечной задачи для уравнения Буссинеска — Лява // Вестник ЮУрГУ. Сер.: Математическое моделирование и программирование. 2012. № 5(264). Вып. 11. С. 13–24.

[6] Замышляева А.А., Муравьев А.С. Исследование математической модели Буссинеска — Лява // Вестник Магнитогорского государственного университета. Сер.: Математика. 2013. Вып. 15. С. 24–34.

[7] Свиридюк Г.А., Сукачева Т.Г. Фазовые пространства одного класса операторных полулинейных уравнений типа Соболева // Дифференц. уравн. 1990. Т. 26. № 2. С. 250–258.

References

[1] Lòve A. A treatise on the mathematical theory of elasticity. Translation from English by B.V. Bulgakov. M., L., ONTI, 1935 [in Russian].

[2] Zamyshlyaeva A.A. Higher-order Sobolev-type mathematical models. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Ser.: Mathematicheskoe modelirovanie i programmirovanie* [Vestnik of South Ural State University. Ser.: "Mathematical modelling and programming"], 2012, Vol. 7, no. 2, pp. 5–28 [in Russian].

[3] Zamyshlyaeva A.A., Bychkov E.V. Phase Space of the modified Boussinesq equation. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Ser.: Mathematicheskoe modelirovanie i programmirovanie* [Vestnik of South Ural State University. Ser.: "Mathematical modelling and programming"], 2012, no. 18(277), issue 12, pp. 13–19 [in Russian].

[4] Zamyshlyaeva A.A., Yuzeeva A.V. Initial-finite value problem for the Boussinesq-Love equation. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Ser.: Mathematicheskoe modelirovanie i programmirovanie* [Vestnik of South Ural State University. Ser.: "Mathematical Modelling and programming"], 2010, no. 16(192), issue 5, pp. 23–31 [in Russian].

[5] Zamyshlyaeva A.A., Tsyplenkova O.N. Optimal control over solutions of the initial-finite value problem for the Boussinesq-Love equation. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Ser.: Mathematicheskoe modelirovanie I programmirovanie* [Vestnik of South Ural State University. Ser.: "Mathematical modelling and programming"], 2012, no. 5(264), issue 11, pp. 13–24 [in Russian].

[6] Zamyshlyaeva A.A., Muravyev A.S. Study of mathematical model of Boussinesq-Love. *Vestnik Magnitogorskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser.: Mathematika* [Vestnik of Magnitogorsk State University. Ser.: "Mathematics"], 2013, issue 15, pp. 24–34 [in Russian].

[7] Sviridyuk G.A., Sukacheva T.G. Phase spaces of one class of semilinear equations of Sobolev type. *Differentsial'nyie uravneniia* [Differential equations], 1990, no. 2, pp. 250–258 [in Russian].

A.A. Zamyshlyaeva, S.V. Surovtsev[3]

FINDING OF A NUMERICAL SOLUTION TO THE CAUCHY – DIRICHLET PROBLEM FOR BOUSSINESQ – LÒVE EQUATION USING FINITE DIFFERENCES METHOD

The article is devoted to the numerical investigation of Boussinesq – Lòve mathematical model. Algorithm for finding numerical solution to the Cauchy – Dirichlet problem for Boussinesq – Lòve equation modeling longitudinal oscillations in a thin elastic rod with regard to transverse inertia was obtained on the basis of phase space method and by using finite differences method. This problem can be reduced to the Cauchy problem for Sobolev type equation of the second order, which is not solvable for arbitrary initial values. The constructed algorithm includes additional check if initial data belongs to the phase space. The algorithm is implemented as a program in Matlab. The results of numerical experiments are obtained both in regular and degenerate cases. The graphs of obtained solutions are presented in each case.

Key words: Boussinesq – Lòve equation, Cauchy – Dirichlet problem, finite differences method, Sobolev type equation, phase space, conditions of data consistency, system of difference equations, Thomas algorithm.

Статья поступила в редакцию 28/ V/2015.

The article received 28/ V/2015.

[3] *Zamyshlyaeva Alyona Aleksandrovna* (`alzama@mail.ru`), *Surovtsev Sergey Viktorovich* (`ssw-92@ya.ru`), Department of Equations of Mathematical Physics, South Ural State University, 76, prospekt Lenina Street, Chelyabinsk, 454080, Russian Federation.