УДК 517.95

А.Р. Зайнуллов[1]

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

На основании формулы решения первой начально-граничной задачи для неоднородного уравнения теплопроводности изучены обратные задачи по отысканию начального условия и правой части. Методом спектрального анализа установлен критерий единственности решения обратной задачи по отысканию начального условия. Правая часть уравнения теплопроводности представлена в виде произведения двух функций, одна из них зависит от пространственной координаты, другая — от времени. В одной задаче наряду с неизвестным решением ищется множитель правой части, зависящий от времени, а в другой — множитель, зависящий от пространственной координаты. Для этих задач доказаны теоремы единственности, существования и устойчивости решения.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, первая начально-граничная задача, обратные задачи, спектральный метод, интегральное уравнение, единственность, существование, устойчивость.

1. Постановка задач

Рассмотрим уравнение теплопроводности

$$Lu \equiv u_t - a^2 u_{xx} = F(x,t) = f(x)g(t) \tag{1.1}$$

в прямоугольной области

$$D = \{(x,t) \mid 0 < x < l,\ 0 < t < T\}$$

и следующую начально-граничную задачу.

Первая начально-граничная задача. Найти в области D функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую условиям:

$$u(x,t) \in C(\overline{D}) \cap C_x^1(\overline{D}) \cap C_{x,t}^{2,1}(D); \tag{1.2}$$

$$Lu \equiv F(x,t),\ (x,t) \in D; \tag{1.3}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{1.4}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{1.5}$$

где $\varphi(x)$ и $F(x,t)$ — заданные функции.

Зайнуллов Артур Раишович (`arturzayn@mail.ru`), кафедра математического анализа, Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, 453103, Российская Федерация, г. Стерлитамак, пр. Ленина, 49.

На основе этой прямой задачи для уравнения (1.1) рассмотрим следующие обратные задачи.

Обратная задача 1. Найти функции $u(x,t)$ и $\varphi(x)$, удовлетворяющие условиям (1.2)–(1.5) и, кроме того, дополнительному условию

$$u(x_0,t) = h(t), \;\; 0 < t_0 \leqslant t \leqslant t_1 \leqslant T, \tag{1.6}$$

где x_0 — заданная фиксированная точка отрезка $(0,l)$, t_0 и t_1 — заданные действительные числа, $F(x,t)$, $h(t)$ — заданные функции.

Отметим, что указанная обратная задача приведена в книгах [1, с. 119] и [2, с. 248] и для уравнения (1) при $F(x,t) = 0$, $u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0$, $0 \leqslant t \leqslant T$ доказана теорема ее единственности при $x_0 = 0$ и $x_0 = l/\pi$.

В данной работе установлен критерий единственности решения (1.2)–(1.6) для любой точки $x_0 \in (0,l)$.

Обратная задача 2. Найти функции $g(t)$ и $u(x,t)$, удовлетворяющие условиям (1.2)–(1.5) и, кроме того, дополнительному условию

$$u(x_0,t) = h(t), \;\; 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{1.7}$$

где x_0 — заданная фиксированная точка отрезка $[0,l]$, $\varphi(x)$, $h(t)$ и $f(x)$ — заданные достаточно гладкие функции, при этом $\varphi(x_0) = h(0)$.

Обратная задача 2 при $\varphi(x) \equiv 0$, $u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0$, $0 \leqslant t \leqslant T$ изучена в [1, с. 123; 2, с. 250] и доказана теорема ее единственности и существования при $f(x_0) \neq 0$.

Здесь получены новые достаточные условия единственности и существования решения обратной задачи 2.

Обратная задача 3. Найти функци $f(x)$ и $u(x,t)$, удовлетворяющие условиям (1.2)–(1.5) и, кроме того, дополнительному условию

$$u(x,t_0) = \psi(x), \;\; 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{1.8}$$

где t_0 — заданная фиксированная точка отрезка $(0,T]$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $g(t)$ — заданные функции.

В данной статье с введением дополнительного условия (1.8) получены теоремы единственности, существования и устойчивости решения обратной задачи 3.

2. Критерий единственности решения обратной задачи 1

Решение прямой задачи (1.2)–(1.5) может быть получено методом разделения переменных [3, с. 200]. Решение уравнения (1.1), удовлетворяющее условию (1.4), будем искать в виде $u(x,t) = X(x)T(t)$ как сумму решений неоднородного и однородного уравнений. Подставляя последнее в однородное уравнение (1.1), т. е. при $F(x,t) \equiv 0$, получим относительно $X(x)$ спектральную задачу:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \;\; \lambda = const,, \tag{2.1}$$

$$X(0) = X(l) = 0. \tag{2.2}$$

Как известно, задача (2.1)–(2.2) — это задача Штурма–Лиувилля, которая имеет счетное множество собственных значений $\lambda_k = (\pi k/l)^2$, $k \in \mathbb{N}$, и соответствующую систему собственных функций $X_k(x) = \sin \mu_k x$, $\mu_k = \pi k/l$. Эта система ортогональна и полна в пространстве $L_2[0,l]$ и поэтому образует в нем ортогональный базис.

Решение неоднородного уравнения (1.1) по системе собственных функций $X_k(x)$ сводится к решению дифференциального уравнения

$$T_k''(t) + \omega_k^2 T_k(t) = F_k(t), \ \ 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Тогда решение задачи (1.2)–(1.5) определяется в виде суммы ряда

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k e^{-\mu_k^2 a^2 t} \sin \mu_k x + \sum_{k=1}^{\infty} F_k(t) \sin \mu_k x, \tag{2.3}$$

где

$$\varphi_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) sin\mu_k \xi d\xi, \ \ F_k(t) = f_k \int_0^t g(\tau) e^{-\mu_k^2 a^2 (t-\tau)} d\tau, \tag{2.4}$$

$$f_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi) \sin \mu_k \xi d\xi, \ \ \mu_k = \frac{\pi k}{l}, \ \ k \in \mathbb{N}.$$

Следуя [3, с. 210; 4, с. 264], можно показать справедливость следующего утверждения.

Теорема 1. *Если* $\varphi(x) \in C^1[0,l]$, $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, $f(x) \in C^2[0,l]$, $f(0) = f(l) = 0$, $g(t) \in C[0,T]$, *то существует единственное решение задачи* (1.2)–(1.5), *и оно определяется в виде суммы ряда* (2.3), *где коэффициенты находятся по формулам* (2.4).

Рассмотрим обратную задачу (1.2)–(1.6), т. е. задачу 1. Полагая в формуле (2.3) $x = x_0$, с учетом условия (1.6) получим уравнение относительно неизвестной функции $\varphi(x)$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \mu_k \xi d\xi e^{-\mu_k^2 a^2 t} \sin \mu_k x_0 =$$

$$= h(t) - \sum_{k=1}^{\infty} F_k(t) \sin \mu_k x_0 = h_0(t), \ \ t_0 \leqslant t \leqslant t_1. \tag{2.5}$$

Теорема 2. *Если* $\sin \pi k \widetilde{x}_0 \neq 0$ *при всех* $k \in \mathbb{N}$, *где* $\widetilde{x}_0 = x_0/l$, *то решение интегрального уравнения* (2.5) *единственно в* $L_2[0,l]$.

Доказательство проведем, следуя [1, с. 119]. В силу линейности уравнения (2.5) достаточно показать, что оно имеет только нулевое решение при $h_0(t) = 0$. Положив в (2.5) $h(t) = 0$ и $F(x,t) \equiv 0$, имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ 2 \int_0^l \varphi(\xi) \sin \mu_k \xi d\xi e^{-\mu_k^2 a^2 t} \sin \pi k \widetilde{x}_0 = 0. \tag{2.6}$$

Рассмотрим в комплексной полуплоскости $Re\ z \geqslant \alpha$, где постоянная $\alpha \in (0, t_0)$, функцию комплексной переменной

$$\Phi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} 2\varphi_k e^{-\mu_k^2 a^2 z} \sin \mu_k \widetilde{x}_0. \tag{2.7}$$

Так как при $Re\ z \geqslant \alpha$

$$|\varphi_k \sin \pi k \widetilde{x}_0 e^{-\mu_k^2 a^2 z}| \leqslant C e^{-\mu_k^2 a^2 \alpha}, \tag{2.8}$$

здесь $C = const > 0$, то в этой полуплоскости ряд, стоящий в правой части соотношения (2.8), сходится равномерно. Учитывая то, что каждый член этого ряда является аналитической функцией при $Re\ z \geqslant \alpha$, и применяя теорему Вейерштрасса [5, с. 68], получаем, что функция $\Phi(z)$ является аналитической при $Re\ z \geqslant \alpha$.

Поскольку в силу (2.7) $\Phi(z) = 0$ на отрезке $[t_0, t_1]$ действительной оси t из области аналитичности $\Phi(z)$, но на основании теоремы единственности для аналитических функций следует $\Phi(z) \equiv 0$ при $Re\ z \geqslant \alpha$. Отсюда следует, что равенство (2.7) выполнено при всех $t \geqslant t_0$. Умножив равенство (2.7) на $e^{(\mu_1 a)^2 t}$ и в полученном равенстве переходя к пределу при $t \to +\infty$, найдем

$$\sin \pi \widetilde{x}_0 \int_0^l \varphi(\xi) \sin \mu_1 \xi d\xi = 0.$$

Последовательно повторяя аналогичные действия, получим

$$\sin \pi k \widetilde{x}_0 \int_0^l \varphi(\xi) \sin \mu_k \xi d\xi = 0, \;\; k \in \mathbb{N}.$$

Отсюда, поскольку $\sin \pi k \widetilde{x}_0 \neq 0$, при всех k следует, что

$$\int_0^l \varphi(\xi) \sin \mu_k \xi d\xi = 0, \;\; k = 1, 2, \ldots. \tag{2.9}$$

Из равенства (2.10), в силу полноты системы функций $\{\sin \mu_n x\}_{k \geqslant 1}$ в пространстве $L_2[0, l]$, следует, что $\varphi(x) = 0$ почти всюду на $[0, l]$. ■

Тогда из теорем 2 и 1 следует единственность решения обратной задачи 1.

Пусть при некоторых $\widetilde{x}_0$ и $k = p \in \mathbb{N}$ нарушено условие теоремы 2, т. е.

$$\sin \pi p \widetilde{x}_0 = 0. \tag{2.10}$$

Тогда обратная задача (1.2)–(1.6) при $h(t) = 0$ и $F(x,t) \equiv 0$ имеет ненулевое решение

$$u_p(x,t) = \sin \mu_p x e^{-(\mu_p a)^2 t}, \;\; \varphi_p(x) = u_p(x, 0) = \sin \mu_p x. \tag{2.11}$$

Из уравнения (2.10) найдем значения

$$\widetilde{x}_0 = \frac{x_0}{l} = \frac{n}{p}, \;\; n \in \mathbb{N}, \;\; n < p, \tag{2.12}$$

при которых нарушается условие теоремы 2, т. е. нарушается единственность решения задачи 1.

Следовательно, установлен следующий критерий единственности решения обратной задачи (1.2)–(1.6).

Теорема 3. *Условие* $\sin \pi k \widetilde{x}_0 \neq 0$ *при всех* $k \in \mathbb{N}$ *необходимо и достаточно для единственности решения обратной задачи* (1.2)–(1.6).

Из (2.12) следует, что когда $\widetilde{x}$ принимает рациональные значения вида $\frac{n}{p}$, $n < p$, $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$, то нарушается единственность решения обратной задачи. При остальных значениях $\widetilde{x}_0$ из (0,1), например, когда $\widetilde{x}_0$ принимает иррациональные значения, условие теоремы 3 выполнено при всех $k \in \mathbb{N}$, следовательно, для таких $\widetilde{x}_0$ обратная задача может иметь не более одного решения.

3. Обратная задача 2

При условии существования функции $g(t)$ решение задачи (1.2)–(1.5) определяется формулой (2.2). Полагая здесь $x = x_0$, поменяв местами порядок интегрирования и суммирования, получим для искомой функции $g(t)$ интегральное уравнение Вольтерра первого рода:

$$\int_0^t K(t,\tau) g(\tau) d\tau = \widetilde{h}(t), \;\; 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{3.1}$$

с ядром

$$K(t,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n e^{-(\mu_n a)^2(t-\tau)}\sin\mu_n x_0 \tag{3.2}$$

и правой частью

$$\widetilde{h}(t)=h(t)-\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k e^{-\mu_k^2 a^2 t}\sin\mu_k x_0.$$

Теорема 4. *Пусть* $\varphi(x)\in C^3[0,l]$, $\varphi(0)=\varphi(l)=0$, $\varphi''(0)=\varphi''(l)=0$, $f(x)\in C^3[0,l]$, $f(0)=f(l)=0$, $f''(0)=f''(l)=0$ *и* $\sin\pi n\widetilde{x}_0\neq 0$ *при всех* $n\in\mathbb{N}$, $\widetilde{x}_0=x/l\in(0,1)$. *Тогда, если* $f(x_0)\neq 0$ *и* $h(t)\in C^1[0,T]$, $h(0)=\varphi(x_0)$, *то уравнение* (2.22) *имеет единственное решение* $g(t)$ *в классе функций* $C[0,T]$.

Доказательство. Прежде всего найдем скорость убывания коэффициентов f_n при $n\to\infty$. В интеграле формулы (2.3), интегрируя по частям три раза, получим

$$f_n=-\frac{1}{\mu_n^3}\frac{2}{l}\int_0^l f'''(\xi)\cos\mu_n\xi d\xi=-\frac{f_n^{(3)}}{\mu_n^3}, \tag{3.3}$$

причем в силу неравенства Бесселя ряд из квадратов $\left|f_n^{(3)}\right|^2$ сходится, поэтому $f_n^{(3)}\to 0$ при $n\to\infty$. Отсюда будем иметь

$$|f_n|\leqslant\frac{\varepsilon_n}{\mu_n^3}, \tag{3.4}$$

где $\varepsilon_n>0$ и $\varepsilon_n\to 0$ при $n\to\infty$.

В силу оценки (3.4) ряд (3.2) сходится равномерно и допускает почленное дифференцирование по t при $0\leqslant\tau\leqslant t\leqslant T$. Поэтому функция $K_t'(t,\tau)$ непрерывна на указанном множестве. Дифференцируя уравнение (3.1) по t, имеем

$$K(t,t)g(t)+\int_0^t K_t(t,\tau)g(\tau)=\widetilde{h}'(t),\ \ 0\leqslant t\leqslant T. \tag{3.5}$$

Положив в (3.2) $\tau=t$, получим

$$K(t,t)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n\sin\mu_n x_0. \tag{3.6}$$

Правая часть равенства (3.6) представляет собой разложение в ряд функции $f(x)$ по системе $\sin\mu_n x$ в точке $x=x_0$. По условию $K(t,t)=f(x_0)\neq 0$. Поэтому уравнение (3.5) представляет собой интегральное уравнение Вольтерра второго рода с непрерывным ядром и непрерывной правой частью, следовательно, уравнение (3.1) имеет единственное решение $g(t)\in C[0,T]$. ■

Теперь покажем, что условие

$$\sin\pi n\widetilde{x}_0\neq 0,\ \ \forall n\in\mathbb{N} \tag{3.7}$$

является существенным. Пусть для некоторых $n=m$ и $\widetilde{x}_0\in[0,l]$ выражение $\sin\pi m\widetilde{x}_0=0$. Тогда для функции $f(x)=\sin\mu_m x$ и $h(t)\in C[0,T]$ существует ненулевое решение обратной задачи 2 (где $\varphi(x)\equiv 0$)

$$u(x,t)=\sin\mu_m x\int_0^t g(s)e^{-\mu_m^2 a^2(t-s)}ds. \tag{3.8}$$

Как видим, в этом примере нарушается и условие $f(x_0)=0$ теоремы 4.

Возникает вопрос о том, что если $f(x_0)=0$, то существует ли единственное решение обратной задачи (1.2)–(1.5), (1.7)?

Теорема 5. *Пусть* $\varphi(x) \in C^5[0,l]$, $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, $\varphi''(0) = \varphi''(l) = 0$, $\varphi^{(4)}(0) = \varphi^{(4)}(l) = 0$, $f(x) \in C^5[0,l]$, $f(0) = f(l) = 0$, $f''(0) = f''(l) = 0$, $f^{(4)}(0) = f^{(4)}(l) = 0$ *и* $\sin \pi n \widetilde{x}_0 \neq 0$ *при всех* $n \in \mathbb{N}$, $\widetilde{x}_0 = x/l \in (0,1)$. *Тогда, если* $f(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$ *и* $h(t) \in C^2[0,T]$, $h'(0) = a^2\varphi''(x_0)$, *то уравнение* (3.1) *имеет единственное решение* $g(t)$ *в классе функций* $C[0,T]$.

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 4 имеем

$$f_n = -\frac{f_n^{(3)}}{\mu_n^3} = \frac{1}{\mu_n^5}\frac{2}{l}\int_0^l f^{(5)}(\xi)\sin\mu_n\xi d\xi = \frac{f_n^{(5)}}{\mu_n^5}.$$

Отсюда получим

$$|f_n| \leqslant \frac{\varepsilon_n}{\mu_n^5}. \tag{3.9}$$

В силу оценки (3.9) ряд (3.2) сходится равномерно и допускает почленное дифференцирование по t дважды при $0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T$, поэтому функция $K_t''(t,\tau)$ непрерывна на указанном множестве.

Из условия $f(x_0) = 0$ следует, что $K(t,t) = 0$, тогда уравнение (3.5) примет вид

$$\int_0^t K_t(t,\tau)g(\tau)d\tau = \widetilde{h}'(t), \ \ 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{3.10}$$

Дифференцируя уравнение (3.10) по t, имеем

$$K_t'(t,t)g(t) + \int_0^t K_t''(t,\tau)g(\tau)d\tau = \widetilde{h}''(t), \ \ 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{3.11}$$

где

$$K_t'(t,t) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{l}\int_0^l f(\xi)\sin\mu_n\xi d\xi(\mu_n a)^2\sin\mu_n x_0. \tag{3.12}$$

Проинтегрировав два раза по частям интеграл в ряде (3.12), получим

$$K_t'(t,t) = a^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{l}\int_0^l f''(\xi)\sin\mu_n\xi d\xi\sin\mu_n x_0 =$$

$$= \frac{2a^2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^l f''(\xi)\sin\mu_n\xi d\xi\sin\mu_n x_0 = a^2 f''(x_0). \tag{3.13}$$

Дифференцируя ряд (3.5) дважды по t, найдем

$$K_t''(t,\tau) = -a^4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\mu_n^2}{l}\int_0^l f''(\xi)\sin\mu_n\xi d\xi e^{-(\mu_n a)^2(t-\tau)}\sin\mu_n x_0. \tag{3.14}$$

Теперь, интегрируя по частям два раза в интеграле ряда (3.14) и положив $\tau = t$, имеем

$$K_t''(t,t) = a^4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{l}\int_0^l f^{(4)}(\xi)\sin\mu_n\xi d\xi\cos\mu_n x_0 = a^4 f^{(4)}(x_0). \tag{3.15}$$

Ряды (3.14) и (3.15) сходятся равномерно при $0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T$ в силу оценки (3.9).

Правая часть равенства (3.13) представляет собой разложение в ряд по системе $\sin\mu_n x$ функции $a^2 f''(x)$ в точке $x = x_0$. Следовательно, $K_t'(t,t) = a^2 f''(x_0) \neq 0$. Уравнение (3.11) представляет собой интегральное уравнение Вольтерра второго рода с непрерывным ядром и непрерывной правой частью, а значит, оно имеет единственное решение $g(t)$ в классе непрерывных на $[0,T]$ функций. ■

На основании доказанных выше теорем можно показать справедливость следующего утверждения.

Теорема 6. *Пусть* $\varphi(x) \in C^{2k+3}[0,l]$, $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, $\varphi''(0) = \varphi''(l) = 0$, $\varphi^{(4)}(0) = \varphi^{(4)}(l) = 0, \ldots, \varphi^{(2k+2)}(0) = \varphi^{(2k+2)}(l) = 0$, $f(x) \in C^{2k+3}[0,l]$, $f(0) = f(l) = 0$, $f''(0) = f'(l) = 0$, $f^{(4)}(0) = f^{(4)}(l) = 0, \ldots, f^{(2k+2)}(0) = f^{(2k+2)}(l) = 0$ *и* $\sin \pi n \widetilde{x}_0 \neq 0$ *при всех* $n \in \mathbb{N}$, $\widetilde{x}_0 = x/l \in (0,1)$. *Тогда, если* $f(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{2k-2}(x_0) = 0$, $f^{(2k)}(x_0) \neq 0$ *и* $h(t) \in C^{k+1}[0,T]$, $h^{(k)}(0) = a^{2k}\varphi^{(2k)}(x_0)$, *где* $k \in \mathbb{N}_0$, *то уравнение* (3.1) *имеет единственное решение* $g(t)$ *в классе функций* $C[0,T]$.

Доказательство. Аналогично доказанным выше теоремам найдем представления для коэффициентов

$$f_n = -\frac{f_n^{(3)}}{\mu_n^3} = \frac{f_n^{(5)}}{\mu_n^5} = \cdots = (-1)^k \frac{f_n^{(2k+1)}}{\mu_n^{2k+1}} =$$

$$= \frac{(-1)^{k+1}2}{l\mu_n^{2k+3}} \int_0^l f^{(2k+3)}(\xi) \cos \mu_n \xi d\xi = (-1)^{k+1} \frac{f_n^{(2k+3)}}{\mu_n^{2k+3}}.$$

Отсюда получим оценку

$$|f_n| \leqslant \frac{\varepsilon_n}{\mu_n^{2k+3}}. \tag{3.16}$$

В силу оценки (3.16) ядро $K(t,\tau)$ уравнения (3.1) имеет непрерывную производную $K_t^{(k+1)}(t,\tau)$ при $0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T$. Дифференцируя уравнение (3.1) по t k+1 раз, с учетом условий $f(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(2k-2)}(x_0) = 0$ имеем

$$K_t^{(k)}(t,t)g(t) + \int_0^l K_t^{(k+1)}(t,\tau)g(\tau) = h^{(k+1)}(t), \ \ 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{3.17}$$

где

$$K_t^{(k)}(t,t) = -a^{2k}\mu_n^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \int_0^l f^{(2k-2)}(\xi) \sin \mu_n \xi d\xi \sin \mu_n x_0.$$

Проинтегрировав в последнем интеграле по частям дважды, получим

$$K_t^{(k)}(t,t) = a^{2k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \int_0^l f^{(2k)}(\xi) \sin \mu_n \xi d\xi \sin \mu_n x_0 =$$

$$= \frac{2a^{2k}}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^l f^{(2k)}(\xi) \sin \mu_n \xi d\xi \sin \mu_n x_0 = a^{2k} f^{(2k)}(x_0). \tag{3.18}$$

Правая часть равенства (3.18) представляет собой разложение в ряд функции $a^{2k}f^{(2k)}(x)$ в точке $x = x_0$. По условию $K_t^{(k)}(t,t) = a^{2k}f^{(2k)}(x_0) \neq 0$. Таким образом, уравнение (3.17) представляет собой интегральное уравнение Вольтерра второго рода такого же типа, что и уравнения (3.5) и (3.11), а значит, оно имеет единственное решение в классе функций $C[0,T]$. ■

Отметим, что в теоремах 5 и 6 условие $\sin \pi n \widetilde{x}_0 \neq 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$ существенно, так как в противном случае обратная задача 2 имеет ненулевое решение (3.8) при $f(x) = \sin \mu_m x$, $\varphi(x) \equiv 0$ и любой функции $h(t) \in C[0,T]$.

4. Обратная задача 3 при $g(t) \equiv 1$

Пусть $u(x,t)$ и $f(x)$ — решение задачи (1.2)–(1.5), (1.8). Следуя работам [6–8], рассмотрим интегралы

$$u_k(t) = \frac{2}{l} \int_0^l u(x,t) \sin \mu_k x dx, \tag{4.1}$$

$$f_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\mu_k x dx, \tag{4.2}$$

где $\mu_k = \pi k/l,\ \ k \in \mathbb{N}$.

На основании (4.1) введем вспомогательную функцию

$$u_{k,\varepsilon}(t) = \frac{2}{l}\int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u(x,t)\sin\mu_k x dx, \tag{4.3}$$

где $\varepsilon > 0$ — достаточно малое число.

Дифференцируя равенство (4.3) один раз по t и учитывая уравнение (1.3), получим

$$u'_{k,\varepsilon}(t) = \frac{2}{l}\int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u_t(x,t)\sin\mu_k x dx = \frac{2}{l}a^2\int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u_{xx}(x,t)\sin\mu_k x dx + f_k. \tag{4.4}$$

Проинтегрируем дважды по частям интеграл в правой части равенства (4.4) и, переходя в полученном равенстве к пределу при $\varepsilon \to 0$ с учетом граничных условий (1.4), заключаем, что $u_k(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$u'_k(t) + (\mu_k a)^2 u_k(t) = f_k. \tag{4.5}$$

Общее решение уравнения (4.5) при $k \in \mathbb{N}$ определяется по формуле

$$u_k(t) = \frac{f_k}{(a\mu_k)^2} + C_k e^{-(a\mu_k)^2 t}, \tag{4.6}$$

где C_k — произвольные постоянные.

Для нахождения коэффициентов C_k и f_k воспользуемся граничными условиями (1.5), (1.8) и формулой (4.1):

$$u_k(0) = \frac{2}{l}\int_0^l u(x,0)\sin\mu_k x dx = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\mu_k x dx = \varphi_k, \tag{4.7}$$

$$u_k(t_0) = \frac{2}{l}\int_0^l u(x,t_0)\sin\mu_k x dx = \frac{2}{l}\int_0^l \psi(x)\sin\mu_k x dx = \psi_k. \tag{4.8}$$

Теперь, удовлетворив функцию (4.6) условиям (4.7) и (4.8), получим систему относительно f_k и C_k:

$$\frac{f_k}{\mu_k^2} + C_k = \varphi_k,\ \ \frac{f_k}{\mu_k^2} + C_k e^{-\mu_k^2 t_0} = \psi_k. \tag{4.9}$$

Из системы (4.9) найдем

$$C_k = \frac{\varphi_k - \psi_k}{1 - e^{-\mu_k^2 t_0}}, \tag{4.10}$$

$$f_k = \mu_k^2\varphi_k - \mu_k^2\frac{\varphi_k - \psi_k}{1 - e^{-\mu_k^2 t_0}},\ \ k \in \mathbb{N}. \tag{4.11}$$

Подставив (4.10), (4.11) в (4.6), найдем окончательный вид функций

$$u_k(t) = \varphi_k + \frac{(\psi_k - \varphi_k)(1 - e^{-\mu_k^2 t})}{1 - e^{-\mu_k^2 t_0}},\ \ 0 \leqslant t \leqslant T,\ \ k \in \mathbb{N}. \tag{4.12}$$

Пусть теперь $\varphi(x) \equiv 0$ и $\psi(x) \equiv 0$ на $[0,l]$. Тогда $\varphi_k = \psi_k = 0$ и из (4.11), (4.12) следует, что $u_k(t) \equiv 0$ на сегменте $[0,T]$ и $f_k = 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Отсюда в силу (4.1) и (4.2) имеем

$$\int_0^l u(x,t)\sin\mu_k x dx = 0,\ \ \int_0^l f(x)\sin\mu_k x dx = 0,\ \ k \in \mathbb{N}.$$

В силу полноты системы $\{\sin\mu_k x\}_{k=1}^{+\infty}$ в пространстве $L_2[0,l]$ из последних равенств следует, что $u(x,t)=0$ и $f(x)=0$ почти всюду на $[0,l]$ при любом $t\in[0,T]$. Поскольку в силу (1.2) функции $u(x,t)$ и $f(x)$ непрерывны соответственно на $\overline{D}$ и $(0,l)$, то $u(x,t)\equiv 0$ в $\overline{D}$ и $f(x)\equiv 0$ на $[0,l]$.

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 7. *Если существует решение задачи* (1.2)–(1.5), (1.8)*, то оно единственно.*

Теперь при определенных условиях на функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ покажем, что функции

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(t)\sin\mu_k x, \tag{4.13}$$

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}f_k\sin\mu_k x \tag{4.14}$$

удовлетворяют условию (1.2), где $u_k(t)$ и f_k — определяются формулами (4.11), (4.12).

Лемма 1. *При любых $k\in\mathbb{N}$ и $t\in[0,T]$ справедливы оценки:*

$$|u_k(t)|\leqslant K_1(|\varphi_k|+|\psi_k|);\ \ |f_k|\leqslant K_2k^2(|\varphi_k|+|\psi_k|),\ \ k\in\mathbb{N},$$
$$|u_k'(t)|\leqslant K_3k^2(|\varphi_k|+|\psi_k|),\ \ k\in\mathbb{N},$$

где K_i — здесь и далее положительные постоянные, не зависящие от $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.

Справедливость данных оценок непосредственно следует из формул (4.11), (4.12).

Лемма 2. *Если функции $\varphi(x)$, $\psi(x)\in C^3[0,l]$, $\varphi''(0)=\varphi''(l)=\psi''(0)=\psi''(l)=0$, то справедливы равенства*

$$\varphi_k=-\frac{\varphi_k^{(3)}}{\mu_k^3},\ \ \psi_k=-\frac{\psi_k^{(3)}}{\mu_k^3}, \tag{4.15}$$

где φ_k, ψ_k — коэффициенты разложения $\varphi^{(3)}(x)$ и $\psi^{(3)}(x)$ в ряд по системе функций $\{\cos\mu_k x\}_{k=0}^{+\infty}$, при этом справедливы оценки

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\varphi_k^{(3)})^2\leqslant\frac{2}{l}||\varphi^{(3)}||^2_{L_2[0,l]},\ \ \sum_{k=1}^{\infty}(\psi_k^{(3)})^2\leqslant\frac{2}{l}||\psi^{(3)}||^2_{L_2[0,l]}. \tag{4.16}$$

Формально из (4.13) почленным дифференцированием составим ряды:

$$u_{xx}(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}(-\mu_k^2)u_k(t)\sin\mu_k x, \tag{4.17}$$

$$u_t(t)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k'(t)\sin\mu_k x. \tag{4.18}$$

Ряды (4.13), (4.14), (4.17) и (4.18) при любом $(x,t)\in\overline{D}$ в силу лемм 1 и 2 мажорируются сходящимся числовым рядом

$$K_4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}(|\varphi_k^{(3)}|+|\psi_k^{(3)}|). \tag{4.19}$$

Тогда ряды (4.13), (4.14), (4.17) и (4.18) на основании признака Вейерштрасса сходятся абсолютно и равномерно на $\overline{D}$. Тогда функции $u(x,t)$ и $f(x)$, определенные рядами (4.13) и (4.14), удовлетворяют условию (1.2).

Следовательно, нами доказана

Теорема 8. *Если функции* $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ *удовлетворяют условиям леммы 2, то существует единственное решение задачи* (1.2)–(1.5), (1.8), *и оно определяется рядами* (4.13) *и* (4.14).

Теорема 9. *Для решения* (4.13) *и* (4.14) *задачи* (1.2)–(1.5), (1.8) *справедливы оценки:*

$$||u(x,t)||_{L_2[0,l]} \leqslant K_5 \left(||\varphi||_{L_2[0,l]} + ||\psi||_{L_2[0,l]}\right), \tag{4.20}$$

$$||f(x)||_{L_2[0,l]} \leqslant K_6 \left(||\varphi||_{W_2^2[0,l]} + ||\psi||_{W_2^2[0,l]}\right), \tag{4.21}$$

$$||u(x,t)||_{C(\overline{D})} \leqslant K_7 \left(||\varphi||_{C^1[0,l]} + ||\psi||_{C^1[0,l]}\right), \tag{4.22}$$

$$||f(x)||_{C_2[0,l]} \leqslant K_8 \left(||\varphi||_{C^3[0,l]} + ||\psi||_{C^3[0,l]}\right). \tag{4.23}$$

Доказательство. Поскольку система $X_k(x)$ ортогональна в $L_2[0,l]$, то из формулы (4.13) на основании леммы 1 получим

$$||u(x,t)||^2_{L_2[0,l]} = \frac{l}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} u_k^2(t) \leqslant 2K_1^2 \left(\frac{l}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}(\varphi_k^2 + \psi_k^2)\right) \leqslant$$
$$\leqslant 2K_1^2 \left(\frac{l}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\varphi_k + \frac{l}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\psi_k^2\right) \leqslant K_5^2 \left(||\varphi||^2_{L_2[0,l]} + ||\psi||^2_{L_2[0,l]}\right).$$

Отсюда следует справедливость оценки (4.20). Аналогично из формулы (4.14) получим

$$||f(x)||^2_{L_2[0,l]} = \frac{l}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} f_k^2 \leqslant 2K_2^2 \left(\frac{l}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} k^4(\varphi_k^2 + \psi_k^2)\right). \tag{4.24}$$

По условию φ_k и ψ_k можно представить в следующем виде:

$$\varphi_k = -\frac{\varphi_k^{(2)}}{\mu_k^2}, \;\; \psi_k = -\frac{\psi_k^{(2)}}{\mu_k^2}, \tag{4.25}$$

где

$$\varphi_k^{(2)} = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi''(x)\sin\mu_k x dx, \;\; \psi_k^{(2)} = \frac{2}{l}\int_0^l \psi''(x)\sin\mu_k x dx.$$

Тогда из оценки (4.24) имеем

$$||f(x)||^2_{L_2[0,l]} \leqslant 2K_2^2 \left(\frac{l}{\pi}\right)^4 \frac{l}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\varphi_k^{(2)} + \psi_k^{(2)}\right) = 2K_2^2\left(\frac{l}{4}\right)^4 \times$$
$$\times \left(\frac{l}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\varphi_k^{(2)} + \psi_k^{(2)}\right)\right) \leqslant K_6^2 \left(||\varphi''||^2_{L_2[0,l]} + ||\psi''||^2_{L_2[0,l]}\right) \leqslant$$
$$\leqslant K_6^2 \left(||\varphi||^2_{W_2^2[0,l]} + ||\psi||^2_{W_2^2[0,l]}\right). \tag{4.26}$$

Из оценки (4.26) непосредственно следует оценка (4.21).

Пусть (x,t) произвольная точка $\overline{D}$. Тогда на основании леммы 1 имеем

$$|u(x,t)| \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty}|u_k(t)| \leqslant K_1 \left(\sum_{k=1}^{+\infty}(|\varphi_k| + |\psi_k|)\right). \tag{4.27}$$

Поскольку

$$\varphi_k = \frac{\varphi_k^{(1)}}{\mu_k}, \;\; \psi_k = \frac{\psi_k^{(1)}}{\mu_k}, \tag{4.28}$$

где

$$\varphi_k^{(1)} = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi'(x)\cos\mu_k x dx,\ \ \psi_k^{(1)} = \frac{2}{l}\int_0^l \psi'(x)\cos\mu_k x dx,$$

то из соотношений (4.27) и (4.28) будем иметь

$$|u(x,t)| \leqslant K_1\left(\frac{l}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}\left(|\varphi_k^{(1)}| + |\psi_k^{(1)}|\right)\right) \leqslant$$

$$\leqslant K_1\frac{l}{\pi}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}\right)^{1/2}\left(\left(\sum_{k=1}^{+\infty}|\varphi_k^{(1)}|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{+\infty}|\psi_k^{(1)}|^2\right)^{1/2}\right) =$$

$$= K_1\sqrt{\frac{l}{3}}\left(||\varphi^{(1)}(x)||_{L_2[0,l]} + ||\psi^{(1)}(x)||_{L_2[0,l]}\right).$$

Отсюда с учетом неравенств:

$$||\varphi||_{L_2[0,l]} \leqslant \sqrt{l}||\varphi||_{C[0,l]},\ \ ||\psi||_{L_2[0,l]} \leqslant \sqrt{l}||\psi||_{C[0,l]},$$

$$||\varphi'||_{L_2[0,l]} \leqslant \sqrt{l}||\varphi'||_{C[0,l]},\ \ ||\psi'||_{L_2[0,l]} \leqslant \sqrt{l}||\psi'||_{C[0,l]}$$

получим

$$|u(x,t)| \leqslant K_7\left(||\varphi'||_{C[0,l]} + ||\psi'||_{C[0,l]}\right) = K_7\left(||\varphi||_{C^1[0,l]} + ||\psi||_{C^1[0,l]}\right),$$

из которой уже следует (4.22).

Аналогично из формулы (4.14) на основании леммы 1 имеем

$$|f(x)| = \sum_{k=1}^{+\infty}|f_k| \leqslant K_2\sum_{k=1}^{+\infty}k^2(|\varphi_k| + |\psi_k|).$$

Из последнего соотношения с учетом (4.25) и (4.15) получим

$$|f(x)| \leqslant K_2\left(\frac{l}{\pi}\right)^3\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}\left(|\varphi_k^{(3)}| + |\psi_k^{(3)}|\right) \leqslant$$

$$\leqslant K_2\left(\frac{l}{\pi}\right)^3\frac{\pi}{\sqrt{6}}\sqrt{\frac{2}{l}}\left(||\varphi_k^{(3)}||_{L_2[0,l]} + ||\psi_k^{(3)}||_{L_2[0,l]}\right) \leqslant$$

$$\leqslant K_8\left(||\varphi^{(3)}||_{C[0,l]} + ||\psi^{(3)}||_{C[0,l]}\right) \leqslant K_8\left(||\varphi||_{C^3[0,l]} + ||\psi||_{C^3[0,l]}\right). \quad (4.29)$$

Из (4.29) следует справедливость оценки (4.23).■

5. Обратная задача 3 при $g(t) \not\equiv 1$

Рассуждая аналогично п. 4, введем функцию (4.1) и для нее получим уравнение

$$u_k'(t) + (\mu_k a)^2 u_k(t) = f_k g(t). \quad (5.1)$$

Общее решение уравнения (5.1) при $k \in \mathbb{N}$ определяется по формуле

$$u_k(t) = C_k e^{-(\mu_k a)^2 t} + f_k g_k(t), \quad (5.2)$$

здесь

$$g_k(t) = \int_0^t g(s)e^{-(\mu_k a)^2(t-s)}ds. \quad (5.3)$$

Удовлетворяя функцию (5.2) граничным условиям (4.7) и (4.8), найдем неизвестные постоянные C_k и f_k:

$$C_k = \varphi_k, \;\; f_k = \frac{1}{g_k(t_0)} \left[\psi_k - \varphi_k e^{-(\mu_k a)^2 t_0} \right] \tag{5.4}$$

при условии, когда при всех $k \in \mathbb{N}$

$$g_k(t_0) \neq 0. \tag{5.5}$$

Подставляя (5.4) в (5.1), построим в явном виде функции

$$u_k(t) = \varphi_k e^{-(\mu_k a)^2 t} + \frac{g_k(t)}{g_k(t_0)} \left[\psi_k - \varphi_k e^{-(\mu_k a)^2 t} \right]. \tag{5.6}$$

Теперь аналогично выше исходя из равенств (5.6), (4.1) и (4.2) на основании полноты системы $\{\sin \mu_k x\}_{k \geqslant 0}$ доказывается единственность решения обратной задачи 3 при произвольной непрерывной функции $g(t)$ и выполнении условий (5.5) при всех $k \in \mathbb{N}$.

Если при некоторых t_0 и $k = p$ выражение $g_p(t_0) = 0$, то однородная задача 3 (где $\varphi(x) = \psi(x) \equiv 0$) имеет ненулевое решение

$$u(x,t) = f_p g_p(t) \sin \mu_p x, \;\; f(x) = f_p \sin \mu_p x,$$

здесь $f_p \neq 0$ — произвольная постоянная.

Следовательно, нами установлен критерий единственности решения задачи 3.

Теорема 10. *Если существует решение задачи 3, то оно единственно только тогда, когда при всех* $k \in \mathbb{N}$ *выполнены условия* (5.5).

Лемма 3. *Если* $g(y)$ *непрерывна на* $[0,T]$ *и* $|g(y)| \geqslant m = const > 0$, *то существует постоянная* $C_0 > 0$ *такая, что при всех* $k \in N$

$$|g_k(t_0)| \geqslant \frac{C_0}{k^2}. \tag{5.7}$$

Доказательство. На основании теоремы о среднем из (5.3) имеем

$$g_k(t_0) = g(\xi) \int_0^{t_0} e^{-(\mu_k a)^2 (t_0 - s)} ds = g(\xi) \frac{1 - e^{-(\mu_k a)^2 t_0}}{(\mu_k a)^2}, \;\; \xi \in [0, t_0].$$

Отсюда получим оценку снизу

$$|g_k(t_0)| \geqslant \left(\frac{l}{\pi a} \right)^2 m (1 - e^{-(\mu_1 a)^2 t_0}) k^{-2},$$

из которой уже следует (5.7).■

Решение в этом случае строится в виде суммы рядов (4.13) и (4.14), где только коэффициенты $u_k(t)$ и f_k определяются формулами (5.4) и (5.6).

Теорема 11. *Если функции* $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ *удовлетворяют условиям леммы 2, а функция* $g(y)$ *условиям леммы 3, то существует единственное решение задачи 3, которое определяется рядами* (4.13) *и* (4.14), *где коэффициенты находятся по формулам* (5.4) *и* (5.6).

Отметим, что для решения (4.13) и (4.14) задачи 3 при $g(t) \not\equiv 1$ справедливы оценки (4.20)–(4.23), установленные в теореме 9, но только с другими постоянными K_i, $i = \overline{5,8}$.

Литература

[1] Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач. М.: Изд–во МГУ, 1994, 208 с.

[2] Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009, 457 с.

[3] Тихонов А.Н., Самарский А.Н. Уравнения математической физики. 3-е изд. М.: Физматлит, 1966. 724 с.

[4] Сабитов К.Б. Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2013, 352 с.

[5] Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973, 749 с.

[6] Сабитов К.Б.,Сафин Э.М. Обратная задача для уравнения параболо-гиперболического типа в прямоугольной области // ДАН. 2009. Т. 429. № 4. С. 451–454.

[7] Сабитов К.Б., Сафин Э.М. Обратная задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области // Известия вузов. Сер.: Математика. 2010. № 4. С. 55–62.

[8] Сабитов К.Б., Сафин Э.М. Обратная задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа // Мат. заметки. 2010. Т. 87. № 6. С. 907–918.

References

[1] Denisov A.M. Introduction to the theory of inverse problems. M., Izd-vo MGU, 1994, 208 p. [in Russian].

[2] Kabanikhin S.I. Inverse and ill-posed problems. Novosibirsk, Sibirskoe nauchnoe izdatelstvo, 2009, 457 p. [in Russian].

[3] Tikhonov A.N., Samaraskii A.N. Equations of mathematical physics. M., Izd-vo Fizmatlit, 1966, 724 p. (3rd edition) [in Russian].

[4] Sabitov K.B. Equations of mathematical physics. M., FIZMATLIT, 2013, 352 p. [in Russian].

[5] Lavrentev M.A., Shabat B.V. Methods of the theory of complex variable. M., Nauka, 1973, 749 p. [in Russian].

[6] Sabitov K.B., Safin E.M. Inverse problem for a parabolic-hyperbolic type for rectangular area. *DAN* [Proceedings of the Russian Academy of Sciences], 2009, Vol. 429, no. 4, pp. 451–454 [in Russian].

[7] Sabitov K.B., Safin E.M. Inverse problem for a mixed parabolic-hyperbolic type for a rectangular area. *Izvestiia vuzov. Matematika* [News of Higher Educational Institutions. Mathematics], 2010, no. 4, pp. 55–62 [in Russian].

[8] Sabitov K.B., Safin E.M. Inverse problem for a mixed parabolic-hyperbolic type. *Mat. zametki* [Mathematical notes], 2010, Vol. 87, no. 6, pp. 907–918 [in Russian].

A.R. Zaynullov[2]

INVERSE PROBLEMS FOR THE HEAT EQUATION

The inverse problem of finding initial conditions and the right-hand side had been studied for the inhomogeneous heat equation on the basis of formulas for the solution of the first initial-boundary value problem. A criterion of uniqueness of solution of the inverse problem for finding the initial condition was found with Spectral analysis. The right side of the heat equation is represented as a product of two functions, one of which depends on the spatial coordinates and the other from time. In one task, along with an unknown solution is sought factor on the right side, depending on the time, and in another — a factor that depends on the spatial coordinates. For these tasks, we prove uniqueness theorems, the existence and stability of solution.

Key words: heat equation, first initial-boundary value problem, inverse problems, spectral method, integral equation, uniqueness, existence, stability.

Статья поступила в редакцию 20/*III*/2015.

The article received 20/*III*/2015.

[2] *Zaynullov Artur Rashitovich* (arturzayn@mail.ru), Department of Mathematical Analysis, Sterlitamak Branch of Bashkir State University, 49, Prospekt Lenina Street, Sterlitamak, 453103, Russian Federation.